



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI S.M.F.N.  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale in  
Matematica

# Tassellazioni del piano Euclideo e del piano Iperbolico

**Candidato**

Martina Parisella

**Relatore**

Prof. Andrea Bruno

Anno Accademico 2010/2011

Classificazione: 22E40, 20H15, 30F35

Parole Chiave: Gruppi Discreti, Isometrie, Geometria Iperbolica

# Sintesi

La geometria nacque dai Greci come scienza deduttiva.

Nel 300 a.C. circa, il lavoro di numerosi pensatori di secoli diversi venne racchiuso da Euclide di Alessandria negli “*Elementi*”, opera sulla quale si fonda la cosiddetta geometria Euclidea.

Il sistema di geometria degli “Elementi” era basato su “nozioni comuni” e cinque postulati; quattro di essi erano brevi, semplici e facili da accettare, il quinto invece risultò problematico.

V POSTULATO: “*Per ogni retta  $\ell$  e ogni punto  $p$  non appartenente ad essa, esiste un’unica retta  $\ell'$  parallela a  $\ell$  e contenente  $p$ .*”

La difficoltà del V postulato, il Postulato della Parallele, risiede nel fatto che esso tratta le proprietà all’infinito di una retta e, quindi, non lo si può in alcun modo dimostrare fisicamente.

Molti tentarono di dimostrare il V postulato, in maniera diretta, a partire dai primi quattro. L’unico risultato di questi tentativi, però, fu la sostituzione del suddetto postulato con altri più intuitivi ma ad esso equivalenti.

Successivamente si passò alla dimostrazione per assurdo. Uno dei maggiori esponenti di questa scuola fu Giovanni Gerolamo Saccheri la cui dimostrazione per assurdo, anche se problematica, indicò la strada per la creazione di geometrie in cui non valesse il V postulato: le geometrie Non Euclidee.

Fu così che tra il XVIII e il XIX secolo molti uomini di scienza si impegnarono su questa linea.

Il primo ad avere una visione chiara di una geometria coerente in cui il V postulato fosse sostituito dalla sua negazione fu Gauss attorno al 1813, anche se non pubblicò mai nulla sull’argomento per paura del clamore che i suoi risultati avrebbero suscitato.

Nel 1832 Janos Bolyai pubblicò un trattato sulla geometria Non Euclidea il cui contenuto fu approvato e condiviso dallo stesso Gauss.

In realtà già nel 1829 Nikolai Lobachevsky aveva pubblicato un articolo sull'argomento che, inizialmente, rimase sconosciuto in Europa centrale e occidentale perché scritto in lingua russa.

Nel 1854 George F. B. Riemann in un suo scritto affermò che sostituire il V postulato con la sua negazione non era il solo modo per modificare la geometria Euclidea e così, nel giro di pochi anni, altre geometrie Non Euclidee coerenti fecero la loro comparsa. Dunque la geometria di Gauss, J. Bolyai e Lobachevsky fu solo la prima geometria Non Euclidea, più precisamente quella che oggi è conosciuta come geometria Iperbolica. Per rendere questa geometria veritiera tanto quanto quella Euclidea vennero forniti una serie di modelli; tra i più soddisfacenti ricordiamo quelli di Poincaré.

In questa Tesi si studiano le isometrie del piano e i loro gruppi discreti nella geometria Euclidea e nella geometria Iperbolica.

Argomento interessante legato alle isometrie del piano è lo studio dell'invarianza di un oggetto rispetto a tali isometrie: dato un motivo periodico del piano, si determina quali isometrie sovrappongono il motivo a se stesso.

Questo argomento ha trovato grande risonanza sia in ambito matematico che artistico con le *tassellazioni* del piano.

La divisione regolare del piano, detta tassellazione del piano, è l'insieme di forme chiuse che ricoprono il piano completamente senza sovrapporsi e senza lasciare spazi vuoti.

Nei primi quattro Capitoli si studiano le tassellazioni da un punto di vista matematico, nel quinto vengono dati alcuni esempi del loro utilizzo nel mondo dell'arte.

Nel dettaglio la Tesi si sviluppa in questo modo:

Nel **Capitolo 1** classifichiamo le isometrie del piano Euclideo.

Dopo aver introdotto brevemente il piano Euclideo, ne descriviamo le principali *isometrie* e alcune loro proprietà. In seguito passiamo alla loro classificazione.

Punto chiave per la classificazione è il seguente Teorema:

**Teorema 1. Primo Teorema di Struttura nel Piano**

*Ogni isometria può essere espressa come composizione di tre o meno riflessioni.*

Osservando, infatti, a quale tipo di isometria corrisponde il prodotto di tre o meno riflessioni si arriva alla classificazione finale delle isometrie del piano Euclideo:

**Teorema 2. Teorema di Classificazione delle Isometrie Piane (Chasles)**

*Ogni isometria del piano è esattamente una delle seguenti:*

1. identità  $\iota$ ,
2. riflessione  $\sigma_\ell$  rispetto a una retta  $\ell$ ,
3. rotazione  $\rho_{p,\theta}$  di angolo  $0 < \theta < 2\pi$  e centro  $p$ ,
4. traslazione  $\tau_{AB}$  parallela ad un segmento non banale  $\overline{AB}$
5. glissoriflessione  $\gamma_{\ell,s}$  con asse  $\ell$  e parametro  $s$  con  $|s| \neq 0$ .

La collezione  $\mathcal{E}_2$  delle isometrie del piano è un gruppo con sottogruppo,  $\mathcal{T}_2$ , dato dalle traslazioni.

Nel **Capitolo 2** classifichiamo i gruppi discreti di isometrie del piano Euclideo anche noti come Gruppi Ornamentali.

**Definizione 1. Gruppi Ornamentali**

*I Gruppi Ornamentali sono i gruppi di simmetrie degli ornamenti del piano: essi costituiscono la collezione completa dei gruppi discreti di isometrie del piano.*

I Gruppi Ornamentali si suddividono in:

- **Gruppi di Rosoni:** gruppi finiti di isometrie del piano; sono i gruppi di simmetria di figure limitate con un numero finito di simmetrie.
- **Gruppi di Fregi:** un Gruppo di Fregi con asse (o retta centrale)  $\ell$  è un gruppo  $\mathcal{F}$  di isometrie del piano che fissa  $\ell$  e contiene una traslazione  $\tau_d$  con spostamento minimo di traslazione  $d > 0$ .

- **Gruppi Cristallografici:** un *Gruppo Cristallografico* è un gruppo  $W$  di isometrie del piano che contiene traslazioni in due direzioni non collinari e per il quale esiste una costante positiva  $d > 0$  tale che ogni traslazione non banale in  $W$  ha uno spostamento di traslazione  $\geq d$ .

Per i Gruppi di Rosoni e i Gruppi di Fregi esponiamo solo il risultato finale della classificazione, mentre per i Gruppi Cristallografici mostriamo la classificazione nel dettaglio.

Per classificare Gruppi di Fregi e Gruppi Cristallografici bisogna introdurre alcune nozioni:

**Definizione 2.** Se  $\phi$  è un'isometria e  $p$  è un punto qualsiasi del piano, allora  $\phi = \phi_p \tau$  è la  **$p$ -fattorizzazione** di  $\phi$  e il fattore  $\phi_p$  è la  **$p$ -componente** di  $\phi$ .

**Definizione 3. Gruppo Puntuale**

Supponiamo che  $G \subseteq \mathcal{E}_2$  sia un gruppo di isometrie e  $p \in \mathcal{E}$ . Allora  $G_p$ , il gruppo delle  $p$ -componenti degli elementi di  $G$ , è il **Gruppo Puntuale di  $G$  in  $p$** .

**Definizione 4. Sottogruppo delle Traslazioni**

Dato un gruppo di isometrie  $G \subseteq \mathcal{E}_2$ , il **Sottogruppo delle Traslazioni**  $\Gamma_G$  di  $G$  è il sottogruppo di tutte le traslazioni in  $G$ , cioè  $\Gamma_G = G \cap \mathcal{T}_2$ .

**Definizione 5. Orbita di Traslazione**

Dato  $p_0 \in \mathcal{E}$  e il gruppo di traslazioni  $\Gamma \subseteq \mathcal{T}_2$ , l'**Orbita di Traslazione** per  $p_0$  è

$$L_{p_0} = \{\tau(p_0) \mid \tau \in \Gamma\}.$$

**Definizione 6. Gruppo Spezzato, Punto di Spezzamento**

Un gruppo di isometrie  $G \subseteq \mathcal{E}_2$  è **spezzato in  $p$**  se il gruppo puntuale  $G_p$  in  $p$  è contenuto in  $G$ ,  $G_p \subseteq G$ . Il punto  $p$  si dice **punto di spezzamento** per  $G$ . Un gruppo di isometrie  $G$  è **spezzato** se ha almeno un punto di spezzamento.

I gruppi non spezzati possono essere determinati come sottogruppi dei gruppi spezzati. Per la classificazione si sfrutta la seguente procedura:

**Procedura di Classificazione**

1. Determinare i Gruppi di Traslazioni e le Orbite di Traslazione

2. Determinare i Gruppi Puntuali
3. Costruire i Gruppi Spezzati
4. Analizzare i Gruppi Non Spezzati
5. Assemblare la classificazione finale

Per i Gruppi Cristallografici entrano in gioco i concetti di gruppo discreto di traslazioni del piano e di reticolo (che corrispondono ai sottogruppi delle traslazioni e alle loro orbite, usati per i Gruppi di Fregi):

**Definizione 7.** *Un gruppo discreto di traslazioni del piano è un gruppo  $\Gamma$  di traslazioni del piano che è:*

- (a) *discreto, cioè esiste un numero  $d > 0$  tale che ogni traslazione non banale di  $\Gamma$  abbia spostamento grande almeno quanto  $d$  e*
- (b) *due dimensionale, cioè  $\Gamma$  possiede traslazioni in direzioni non collineari.*

**Definizione 8.** *Dato un punto  $p_0 \in \mathcal{E}$ , il reticolo  $L_{p_0}$ , per un gruppo discreto  $\Gamma$  di traslazioni del piano, è semplicemente la sua orbita di traslazione in  $p_0$ .*

Ci sono cinque classi di simmetria di reticoli standard  $L(q)$ ; dividendo la classe dei reticoli rombici in due parti, abbiamo: reticolo obliquo, rettangolare stretto, rombo (lungo), rombo (largo), quadrato e reticolo esagonale.

Per la classificazione si sfrutta la procedura precedente nella quale si determinano tutte le possibili coppie di gruppi puntuali e reticoli invarianti che, sotto opportune condizioni, forniscono i gruppi cristallografici spezzati o i gruppi non spezzati.

I Teoremi che sintetizzano la classificazione finale sono i seguenti:

**Teorema 3. Gruppi Cristallografici Spezzati**

- (a) *Fissato un punto  $p$ , sia  $\{K, \mathcal{L}\}$  una coppia invariante gruppo/reticolo con  $K \subset \mathcal{E}_2(p)$  e  $\Gamma$  un gruppo di traslazioni associato. Allora l'insieme  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(K, \Gamma) = K \cdot \Gamma = \{\kappa\tau \mid \kappa \in K, \tau \in \Gamma\}$  è un gruppo cristallografico spezzato con sottogruppo delle traslazioni  $\Gamma_{\mathcal{W}} = \Gamma$  e gruppo puntuale  $\mathcal{W}_p = K$ . Il punto  $p$  è un punto di spezzamento per  $\mathcal{W}$ .*

- (b) *Per il coniugio tramite similitudini, la collezione di gruppi costruiti nel punto (a) è indipendente dal punto  $p$ .*
- (c) *Due gruppi cristallografici spezzati,  $\mathcal{W}(K_1, \Gamma_1)$  e  $\mathcal{W}(K_2, \Gamma_2)$ , sono coniugati tramite una similitudine  $\Phi$  se e solo se esiste una similitudine  $\Psi$  che fissa  $p$  tale che  $K_1^\Psi = K_2$  e  $\Gamma_1^\Psi = \Gamma_2$ .*
- (d) *Due gruppi cristallografici spezzati,  $\mathcal{W}(K, \Gamma_1)$  e  $\mathcal{W}(K, \Gamma_2)$ , con stesso gruppo puntuale  $K$  sono coniugati tramite una similitudine  $\Phi$  se e solo se esiste una similitudine  $\Psi$  tale che  $K^\Psi = K$  e  $\Gamma_1^\Psi = \Gamma_2$ .*

I tredici gruppi cristallografici spezzati sono:  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1^{rett}, D_1^{rom}, D_2^{rett}, D_2^{rom}, D_3^{ess}, D_3^{es\ell}, D_4, D_6$ .

**Teorema 4. Gruppi Cristallografici Non Spezzati**

*Ci sono esattamente quattro classi di gruppi cristallografici non spezzati.*

- (a) *C'è una classe di gruppi non spezzati  $D_1^{ns}$  con gruppo puntuale  $D_1$ . Ogni gruppo  $\mathcal{W} \in D_1^{ns}$  ha un reticolo di traslazione rettangolare, tutte le glissoriflessioni in  $\mathcal{W}$  hanno assi paralleli e non sono spezzate.*
- (b) *Ci sono due classi di gruppi non spezzati,  $D_2^{1,ns}$  e  $D_2^{2,ns}$ , con gruppo puntuale  $D_2$ . Ogni gruppo  $\mathcal{W}$  ha un reticolo di traslazione rettangolare e tutte le glissoriflessioni in  $\mathcal{W}$  hanno assi paralleli ai lati del rettangolo fondamentale. Se  $\mathcal{W} \in D_2^{1,ns}$ , tutte le glissoriflessioni in una direzione sono spezzate, mentre nessuna di quelle nell'altra direzione lo sono. Se  $\mathcal{W} \in D_2^{2,ns}$ , nessuna delle glissoriflessioni in entrambe le direzioni è spezzata.*
- (c) *C'è una classe di gruppi non spezzati  $D_4^{ns}$  con gruppo puntuale  $D_4$ . Ogni  $\mathcal{W} \in D_4^{ns}$  ha un reticolo di traslazione quadrato, e tutte le glissoriflessioni in  $\mathcal{W}$  hanno assi paralleli ai lati o alle diagonali del quadrato fondamentale. Tutte le glissoriflessioni parallele alle diagonali sono spezzate, mentre nessuna di quelle parallele ai lati è spezzata.*

I risultati della classificazione dei **Gruppi Cristallografici** sono racchiusi nel seguente Teorema:

**Teorema 5. Classificazione dei Gruppi Cristallografici (Fedorov)**

Ci sono diciassette classi di gruppi cristallografici per l'equivalenza tramite simmetria. Tredici classi consistono dei gruppi spezzati del Teorema 3. Quattro classi consistono dei gruppi non spezzati del Teorema 4.

Nel **Capitolo 3** studiamo le isometrie del piano Iperbolico.

Introduciamo il piano Iperbolico sfruttando i due modelli forniti da Poincaré:

- il **Semipiano Superiore di Poincaré**  $H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ ,
- il **Disco di Poincaré**  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

Per  $H^2$  consideriamo delle particolari trasformazioni:

dato  $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \det(A) = ad - bc = 1 \right\}$ , consideriamo l'insieme delle **Trasformazioni di Möbius** di  $\hat{\mathbb{C}}$  in se stesso della forma

$$\left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \right\}. \quad (1)$$

Questo insieme costituisce un gruppo in cui il prodotto di due trasformazioni corrisponde al prodotto delle matrici corrispondenti e l'inverso alla matrice inversa.

Ogni trasformazione  $T$  della forma (1) è rappresentata da una coppia di matrici  $\pm A \in SL(2, \mathbb{R})$ .

Il gruppo delle trasformazioni (1), detto **PSL(2,  $\mathbb{R}$ )**, è isomorfo a  $SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$ .

Di ciascuno dei modelli di Poincaré descriviamo le caratteristiche principali, tra cui la metrica e le **geodetiche**.

Le geodetiche di  $H^2$  sono semicerchi e rette ortogonali all'asse reale; le geodetiche di  $\Delta$  sono i segmenti di cerchi Euclidei ortogonali al cerchio principale  $\Sigma$  (bordo di  $\Delta$ ) e i suoi diametri.

Mentre nel piano Euclideo due rette possono intersecarsi o essere parallele, nel piano Iperbolico due geodetiche distinte  $L_1$  ed  $L_2$ :

- sono **parallele**  $\Leftrightarrow$  esse hanno esattamente un punto-finale in comune;
- **si intersecano** se non hanno punti-finali in comune ed  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ ;



- sono **disgiunte** se non hanno punti-finali in comune e  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ .

Questo fornisce il piano Iperbolico di una maggiore varietà di isometrie rispetto al piano Euclideo.

In accordo con le tre possibili posizioni reciproche di due geodetiche possiamo classificare i fasci di geodetiche: ogni coppia di geodetiche,  $L$  ed  $L'$ , giace in una famiglia  $\mathcal{P}$  di geodetiche detta **fascio** determinato da  $L$  ed  $L'$ .

Il fascio determinato da  $L$  ed  $L'$  é:

(i) **parabolico** se  $L$  ed  $L'$  sono parallele;

(ii) **ellittico** se  $L$  ed  $L'$  si intersecano;

(iii) **iperbolico** se  $L$  ed  $L'$  sono disgiunte.

Identifichiamo tutte le **isometrie** per i due modelli.

In  $H^2$  sia  $PS^*L(2, \mathbb{R}) = S^*L(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$ , con  $S^*L(2, \mathbb{R})$  gruppo delle matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } \det(A) = \pm 1.$$

**Teorema 6.** *Il gruppo  $Isom(H^2)$  è generato dalle trasformazioni di Möbius (1) in  $PSL(2, \mathbb{R})$  con l'applicazione  $z \rightarrow -\bar{z}$ , ed è isomorfo a  $PS^*L(2, \mathbb{R})$ .*

*Il gruppo  $PSL(2, \mathbb{R})$  è un sottogruppo di  $Isom(H^2)$  di indice 2.*

Il segno del determinante della matrice corrispondente determina l'**orientazione** di un'isometria. Le trasformazioni in  $PSL(2, \mathbb{R})$  sono **pari** e le restanti trasformazioni in  $PS^*L(2, \mathbb{R})$  sono **dispari**.

Le isometrie di  $\Delta$  sono

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \tag{2}$$

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}, \tag{3}$$

con  $|a|^2 - |c|^2 = 1$ .

Le isometrie del piano Iperbolico si distinguono in isometrie pari e dispari; nel nostro studio ci concentriamo su quelle pari.

Soffermandoci, in particolare, su  $H^2$  vediamo che le isometrie pari si possono classificare sfruttando due metodi diversi: tramite  $tr^2(T)$  o i fasci di geodetiche.

In entrambi i casi si ottengono tre tipi di trasformazioni:

- **trasformazioni ellittiche** (rotazioni) con un unico punto fisso in  $H^2$ ;
- **trasformazioni paraboliche** (orolazioni) con un unico punto fisso su  $\partial H^2$ ;
- **trasformazioni iperboliche** (traslazioni) con due punti fissi su  $\partial H^2$ .

Le informazioni ottenute per un modello si possono trasferire sull'altro tramite un'opportuna isometria.

Nel **Capitolo 4** studiamo i gruppi discreti di isometrie del piano Iperbolico.

In particolare focalizziamo la nostra attenzione sui sottogruppi discreti di  $PSL(2, \mathbb{R})$ : i **gruppi Fuchsiani**; essi possono essere definiti anche come gruppi di isometrie pari di  $H^2$  che agiscono propriamente discontinuamente su  $H^2$ .

**Definizione 9.** *Un gruppo di isometrie  $G$  agisce **propriamente discontinuamente** su  $X$ , spazio metrico localmente compatto, se la  $G$ -orbita di ogni punto  $x \in X$  è localmente finita.*

Una delle caratteristiche principali di un Gruppo Fuchsiano è la sua capacità di tassellare il piano Iperbolico con mattonelle di varie forme in modo che ogni mattonella venga “posata” una e una sola volta in una data posizione da un elemento del gruppo.

**Definizione 10.** *Sia  $X$  uno spazio metrico localmente compatto e  $G$  un gruppo di isometrie che agisce propriamente discontinuamente su  $X$ . Una regione chiusa  $F \subset X$  (cioè la chiusura di un insieme aperto non-vuoto  $\overset{\circ}{F}$ , detto l'interno di  $F$ ) è una **regione fondamentale** per  $G$  se:*

$$(i) \bigcup_{T \in G} T(F) = X,$$

$$(ii) \overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \emptyset \text{ per ogni } T \in G - \{I\}.$$

L'insieme  $\partial F = F - \overset{\circ}{F}$  è detto **bordo** di  $F$ .

La famiglia  $\{T(F) : T \in G\}$  è detta **tassellazione** di  $X$ .

L'area iperbolica di una regione fondamentale (con bordo opportuno), se finita, è un invariante numerico del gruppo ed è ben definita.

**Definizione 11.** Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano e  $p \in H^2$  un punto non fissato da ogni elemento di  $\Gamma - \{I\}$ .

La **Regione di Dirichlet per  $\Gamma$  centrata in  $p$**  è l'insieme

$$D_p(\Gamma) = \{z \in H^2 : \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)), \forall T \in \Gamma\}. \quad (4)$$

$D_p(\Gamma)$  è l'intersezione di metà-piano iperboliche:

$$D_p(\Gamma) = \bigcap_{\substack{T \in \Gamma \\ T \neq I}} H_p(T). \quad (5)$$

Inoltre  $D_p(\Gamma)$  è una regione fondamentale connessa per  $\Gamma$ .

Analizziamo la struttura di una regione di Dirichlet.

Una regione di Dirichlet  $F$  per un gruppo Fuchsiano in  $H^2$  è delimitata da un'unione di geodetiche; l'intersezione tra queste geodetiche determina i **vertici** della regione, invece, l'intersezione delle geodetiche con  $F$  ne determina i **lati**.

Si può introdurre una relazione di congruenza sia tra i vertici che tra i lati di una regione di Dirichlet: i vertici congruenti sono quelli che appartengono a una stessa  $\Gamma$ -orbita, i lati sono accoppiati a due a due.

Definiamo un **ciclo** come un insieme di vertici congruenti; in particolare un **ciclo ellittico** è un ciclo i cui vertici sono fissati da elementi ellittici coniugati.

Dato un gruppo Fuchsiano  $\Gamma$  e una sua regione fondamentale  $F$  si può introdurre una funzione **area su  $H^2/\Gamma$** :  $\mu(H^2/\Gamma) = \mu(F)$ .

Data  $F$  regione di Dirichlet compatta (per il gruppo Fuchsiano  $\Gamma$ ) con cicli ellittici i cui stabilizzatori abbiano ordini  $m_1, m_2, \dots, m_r$ ,  $H^2/\Gamma$  è omeomorfa a  $F/\Gamma$ , superficie orientata di genere  $g$  con  $r$  punti segnati (che corrispondono ai cicli ellittici).

Diciamo che  $\Gamma$  ha **segnatura**  $(g; m_1, m_2, \dots, m_r)$ .

Ponendo una restrizione sull'area di  $H^2/\Gamma$  otteniamo la condizione di esistenza dei gruppi Fuchsiani con una determinata segnatura; questo è proprio il risultato del Teorema di Poincaré:

**Teorema 7. Teorema di Poincaré**

Se  $g \geq 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $m_i \geq 2$  ( $1 \leq i \leq r$ ) sono interi e se

$$(2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0,$$

allora esiste un gruppo Fuchsiano con segnatura  $(g; m_1, \dots, m_r)$ .

Questo Teorema conclude la nostra panoramica sui gruppi Fuchsiani e, di conseguenza, la trattazione da un punto di vista matematico dell'argomento delle tassellazioni.

Nel **Capitolo 5** forniamo un riscontro visivo della teoria studiata nei Capitoli precedenti mostrando alcune opere del grafico olandese M. C. Escher.

Per quanto riguarda il *piano Euclideo*, mostriamo alcune opere dell'artista classificandole in base al gruppo cristallografico corrispondente e indicandone il dominio fondamentale e il tipo di reticolo.

Per il *piano Iperbolico* mostriamo la serie di stampe *Circle Limit* che rappresentano tassellazioni del disco di Poincaré.

Diamo, per brevità, solo un esempio del lavoro svolto sul piano Iperbolico.

### *Circle Limit iii*

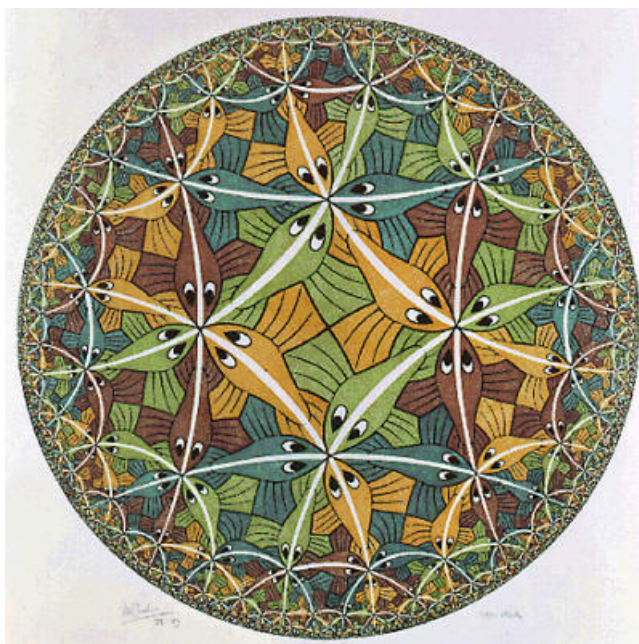


Figura 1: *Circle Limit iii*.

L'incisione *Circle Limit iii* utilizza lo schema degli ottagoni regolari disposti a tre a tre attorno a ogni vertice:

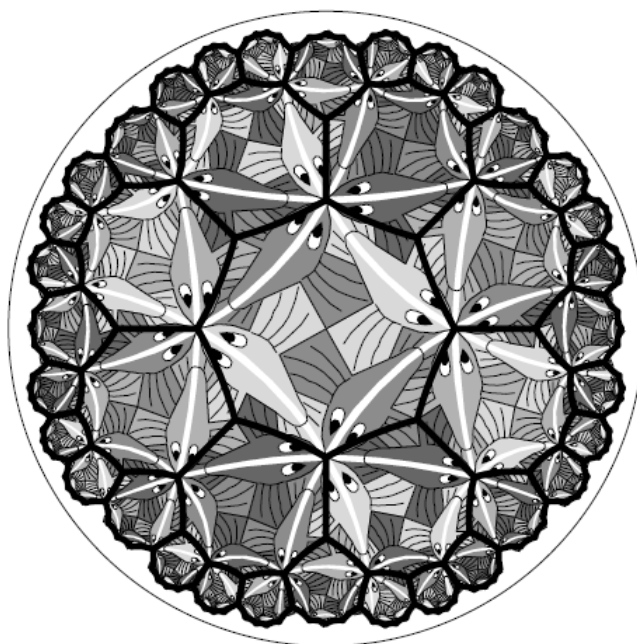


Figura 2: Tassellazione *Circle Limit iii*.

Escher suddivise ogni ottagono in quattro parti e deformò i lati ottenendo, così, quattro pesci con le pinne congiunte al centro dell'ottagono. Ai vertici del poligono ci sono alternativamente la pinna esterna dei pesci e l'incontro di testa e coda di due pesci consecutivi. Gli ottagoni si incastrano perfettamente completando lo schema. I colori dei pesci vennero scelti accuratamente in modo tale che pesci dello stesso colore si toccassero al massimo in un solo punto. Sono necessari quattro colori per ottenere questo risultato. Gli ottagoni, inoltre, dovevano essere colorati in sei modi diversi, cioè venivano sfruttate tutte le combinazioni possibili di due colori.

Osservando il disegno completo, i bordi degli ottagoni sono dissimulati dall'incastro delle pinne e l'intero schema ottagonale non è per nulla evidente.

La linea bianca che divide i pesci in due non è una retta del piano iperbolico. Si tratta invece di un arco di cerchio che si mantiene sempre alla stessa distanza da una retta che ha i suoi stessi estremi sul cerchio limite.

# Bibliografia

- [1] William Barker, Roger Howe. *Continuous Symmetry: from Euclid to Klein*.  
American Mathematical Society, 2007.
- [2] Svetlana Katok. *Fuchsian Groups*.  
The University of Chicago Press, Chicago and London, 1992.
- [3] James Buchanan. *Poincaré's theorem for Fuchsian groups*.  
<http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Buchanan.pdf>
- [4] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*.  
Volume 91 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1983.
- [5] Birger Iversen. *Hyperbolic Geometry*.  
London Mathematical Society Student Texts 25, Cambridge University Press,  
Cambridge, 1992.
- [6] James W. Anderson. *Hyperbolic Geometry, Second Edition*.  
Springer-Verlag London Limited 2005.
- [7] V.V. Nikulin, I.R. Shafarevich. *Geometries and Groups*.  
Springer-Verlag, 1987.
- [8] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*.  
Bollati Boringhieri.
- [9] Richard J. Trudeau. *La rivoluzione non euclidea*.  
Bollati Boringhieri.

- [10] Michele Emmer. *Matematica e cultura 2010*.  
Springer-Verlag Italia, 2010. pp.129-143
- [11] Doris Schattschneider. *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*.  
[http://www.math.fsu.edu/quine/MB\\_10/schattschneider.pdf](http://www.math.fsu.edu/quine/MB_10/schattschneider.pdf)
- [12] Doris Schattschneider. *Visioni della Simmetria: I disegni periodici di M. C. Escher*.  
Zanichelli, 1992.
- [13] Douglas Dunham. *Hamiltonian Paths and Hyperbolic Patterns*.  
<http://www.d.umn.edu/ddunham/commmath.pdf>
- [14] Douglas Dunham. *A Tale Both Shocking and Hyperbolic*.  
<http://www.maa.org/news/Horizons-April03-Dunham.pdf>
- [15] Doris Schattschneider. *The Mathematical Side of M. C. Escher*.  
<http://www.ams.org/notices/201006/rtx100600706p.pdf>
- [16] [http://euler.slu.edu/escher/index.php/Regular\\_Division\\_of\\_the\\_Plane\\_Drawings](http://euler.slu.edu/escher/index.php/Regular_Division_of_the_Plane_Drawings)