UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N

Tesi di Laurea in Matematica

di

Anastasia Paolucci

SINTESI

Gruppi di omotopia superiori di varietà topologiche

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

febbraio 2004

Anastasia Paolucci è nata a Roma il 14/11/1980.
Ha conseguito il diploma presso il liceo Scientifico Statale C. Cavour di Roma con la votazione di 100/100 nel luglio del 1999.
Si è iscritta al Corso di Laurea in Matematica della Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali presso l'Università degli studi di 'Roma Tre' nell'anno accademico 1999/2000.
Ha scelto le seguenti tesine per le prove di qualificazione:

1. Proprietà di separazione negli spazi topologici (Geometria)
2. Metodo di Eulero per il problema di Cauchy delle equazioni differenziali ordinarie (Analisi Numerica)

Ha discusso la seconda tesina a marzo del 2003.

GRUPPI DI OMOTOPIA SUPERIORI DI VARIETA' TOPOLOGICHE

SINTESI

La topologia algebrica ricorre spesso allo studio degli invarianti topologici per poter studiare le proprietà che caratterizzano due varietà legate da una qualche relazione o per capire cosa possa rendere le varietà topologiche considerate più o meno simili.
L'argomento trattato in questa tesi è lo studio dei gruppi di omotopia superiori di alcune varietà topologiche note e in particolare delle sfere.
I gruppi di omotopia superiori di una varietà topologica, denotati con $\pi_n(X, x)$, sono invarianti algebrici introdotti in letteratura dal matematico polacco Witold Hurewicz.
La loro importanza risiede nel seguente fatto:
Se un'applicazione continua $f : X \to Y$, tra due varietà con buone proprietà, con Y connesso, induce un isomorfimo $\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(Y, y)$,$\forall n \geq 0$, la mappa f diventa un'equivalenza omotopica tra X e Y.
L'importanza topologica di questo invariante giustifica la notevole difficoltà di calcolo, al punto che solo nei primi anni '50, sotto l'impulso dei lavori di Jean-Pierre Serre, che gli valsero la medaglia Fields nel 1954, si iniziò a calcolare esplicitamente i gruppi di omotopia superiori delle sfere.
Una ulteriore difficoltà insita nel calcolo di tali invarianti è che essi costituiscono una successione infinita: ad esempio $\pi_n(S^m)$ può essere non nullo anche se $m < n$.

I risultati dimostrati in questa tesi si possono riassumere nella seguente tabella, in cui la prima colonna indica la varietà di cui si vuole calcolare il gruppo di omotopia (che indicheremo con X), la seconda illustra la relazione che lega l'ordine del gruppo di omotopia (che indicheremo con n) alla dimensione della varietà presa in considerazione (che indicheremo con m) e l'ultima colonna descrive proprio il gruppo di omotopia superiore che si calcola:

X	**Relazione tra ordine e dimensione**	$\pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{X})$
$\mathbb{R}^m$	$\forall m$ e $\forall n$	0
D^m	$\forall m$ e $\forall n$	0
S^m	$n < m$	0
S^m	$n = m$	$\mathbb{Z}$
S^m	$n = 3$ e $m = 2$	$\mathbb{Z}$
S^m	$n = m + 1$ e $m \geq 3$	$\mathbb{Z}_2$
S^m	$n = m + 2$	$\mathbb{Z}_2$
T^m	$\forall m$ e $\forall n$ con $n \neq 1$	0
$\mathbb{R}P^m$	$n < m$ e $n \neq 1$	0
$\mathbb{R}P^m$	$n = m$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}P^m$	$n = 3$ e $m = 2$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}P^m$	$n = m + 1$ e $m \geq 3$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{R}P^m$	$n = m + 2$	$\mathbb{Z}_2$

Nel dettaglio la tesi risulta così organizzata:

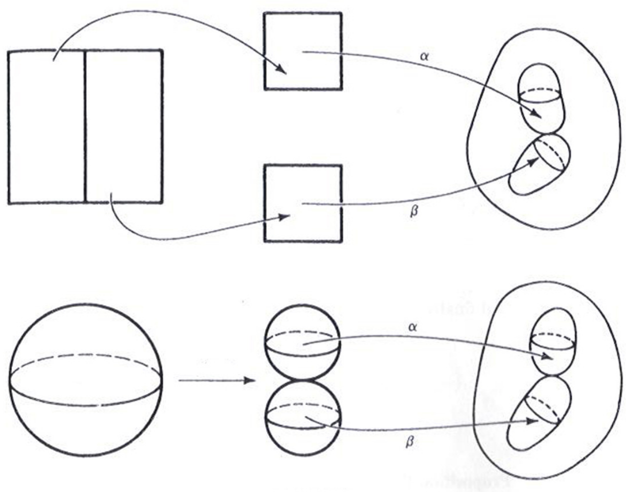
Nel primo capitolo ricordiamo il significato di omotopia e di omotopia relativa tra applicazioni e definiremo il gruppo fondamentale, $\pi_1(X, x)$, come l'insieme delle classi di equivalenza dei cappi di base un punto $x \in X$, con l'operazione tra cappi definita per giustapposizione.

In perfetta analogia con il gruppo fondamentale, introduciamo i gruppi di omotopia superiori (alternativamente li chiameremo gruppi di omotopia di ordine n), $\pi_n(X, x)$, che definiamo come l'insieme di tutte le classi di omotopia delle applicazioni del tipo $\alpha : I^n \to X$ tale che $\alpha(\partial I) = \{x\}$, dove I^n è l'n-cubo.

L'operazione che permette ai $\pi_n(X, x)$ di avere una struttura di gruppo è la seguente:

$$(\alpha + \beta)(s_1, ..., s_n) = \begin{cases} \alpha(2s_1, ..., s_n) & \text{se } s_1 \in [0, 1/2] \\ \beta((2s_1 - 1), ..., s_n) & \text{se } s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Successivamente verrà usata una definizione del tutto equivalente che vede i gruppi di omotopia superiori come le classi di omotopia delle applicazioni da S^n alla varietà X, che mandano il punto s della sfera nel punto x appartenente a X.
La somma tra elementi del gruppo di omotopia $\pi_n(X, x)$ può essere quindi schematizzata usando la doppia notazione, come si può vedere in figura:



In generale i teoremi dimostrati per il gruppo fondamentale sono validi anche per i gruppi di omotopia superiori ma il viceversa non è vero. Esistono, infatti, alcuni teoremi che caratterizzano solo i $\pi_n(X, x)$ per $n > 1$:

- I $\pi_n(X, x)$ sono un gruppo commutativo con l'operazione sopra definita.
- Se $P : R \rightarrow X$ un rivestimento,allora $\pi_n(R, r) \simeq \pi_n(X, x)$

L'ultima parte di questo capitolo è dedicato allo studio dei gruppi di omotopia relativi, $\pi_n(X, A, x)$, definiti come l'insieme delle classi di omotopia delle applicazioni che soddisfano le seguenti caratteristiche:
$\alpha : I^n \rightarrow X$ tale che $\alpha(\partial I^n) \subset A$ e $\alpha(s) = \{x\}$, dove l'operazione che dota $\pi_n(X, A, x)$ della struttura di gruppo è analoga a quella già definita per i gruppi di omotopia assoluti.
Dopo aver definito alcuni omomorfismi ad essi relativi, illustriamo il teorema che consente di affermare che la seguente successione è esatta:

$$... \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x) \xrightarrow{j} \pi_n(X, A, x) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x) \rightarrow ...$$

L'importanza di questo risultato sarà evidente nei capitoli seguenti quando varrà introdotto il concetto di fibrazione.

Il secondo capitolo è totalmente dedicato ad argomenti di geometria differenziale, indispensabili per il calcolo dei gruppi di omotopia.
Introduciamo il concetto di varietà e applicazioni differenziabili, soffermandoci in particolar modo sulla definizione di orientabilità e di atlante orientato, proprio perché le varietà che tratteremo saranno caratterizzate dall'orientabilità.
Spiegando nei dettagli cosa si intende per valore regolare e valore critico di una mappa e studiando parte dei concetti ad esso correlati, possiamo così iniziare la dimostrazione dei risultati più importanti.
Gran parte dei teoremi illustrati in questo capitolo è dedicata all'approssimazione di applicazioni continue con applicazioni differenziabili. La dimostrazione di tale risultato scaturisce da alcuni passaggi logici indispensabili:

1. Se f è un'applicazione continua in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, allora esiste sempre un'applicazione g differenziabile in un aperto $V \subset U$, che dista da f di un ϵ sufficientemente piccolo.

2. Se f è un'applicazione continua tra due varietà compatte, allora esiste sempre un'applicazione g differenziabile tale che $d(f, g) < \epsilon$.

3. Due applicazioni continue f e g tra due varietà differenziabili e compatte, tali che $d(f, g) < \epsilon$, sono omotope.

Arriviamo quindi al seguente teorema :

Teorema:
Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra due varietà differenziabili X e Y compatte e connesse, allora nella classe di omotopia di f esiste sempre una mappa $g : X \to Y$ differenziabile.

Questo risultato è molto importante proprio perché ogni elemento di un gruppo di omotopia, rappresenta una classe di applicazioni omotope tra le quali troviamo sicuramente un'applicazione differenziabile, che verrà scelta, senza perdere in generalità, come rappresentante della classe, questo perché tutte le operazioni che dovremmo fare saranno a meno di omotopia.
Dopo aver illustrato il concetto di isotopia tra applicazioni abbiamo così finito tutti i prerequisiti di geometria differenziale .
Un'altra parte fondamentale per il calcolo dei gruppi di omotopia superiori, che concluderà questo secondo capitolo, riguarderà i teoremi di classificazione delle varietà differenziabili compatte, connesse ed orientabile che in dimensione 1 sono diffeomorfe alla circonferenza, S^1, mentre in dimensione 2 sono diffeomorfe o alla sfera, S^2, o al toro di genere g, $gT = \underbrace{T\#...\#T}_{g\,volte}$; studieremo, inoltre, la struttura differenziale che caratterizza tali varietà.

Per quanto riguarda la classificazione delle varietà di dimensione 3, essa non è definita in modo univoco e non esiste la maniera per identificare tutte le varietà di dimensione 3 e suddividerle in classi ben precise.

Una volta definiti e descritti tutti gli oggetti ed i concetti topologici e differenziali necessari per il calcolo esplicito dei gruppi di omotopia superiori, esporremo nei capitoli successivi i risultati fondamentali che ci proponiamo di dimostrare e quelli ad essi correlati, illustrando come le tecniche algebriche integrate da quelle strettamente geometriche e topologiche possano rappresentare uno strumento potente ed efficace per ottenere risultati particolarmente significativi.

Lo scopo di questo lavoro è infatti quello di dimostrare quanto segue:

$$\pi_n(S^m) \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = m \text{ oppure } n = 3 \text{ e } m = 2 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n = m + 1 \text{ e } m \geq 3 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n = m + 2 \qquad \forall m \end{cases}$$

Dopo la dimostrazione di tale risultato,seguono una serie di risultati in merito ai gruppi di omotopia superiori di varietà topologiche fortemente legate a S^n.

Nel terzo capitolo introduciamo il concetto di fibrazione definendola come una mappa $p : X \to Y$ che ha le proprietà di sollevamento di omotopia rispetto ad uno spazio Z, che nel nostro caso sarà l'n-cubo, I^n.
Utilizzando il concetto di omotopia relativa e quello di fibrazione, dimostriamo che la successione che segue è esatta:

$$... \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, f) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, f) \xrightarrow{j} \pi_n(X, F, f) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f) \to ...$$

dove F rappresenta la fibra di p, ovvero $F = p^{-1}(y)$ per ogni $y \in Y$.
La parte dedicata alle fibrazioni si conclude quindi con la descrizione delle fibrazioni che saranno usate nello studio dei gruppi di omotopia delle sfere:

- La fibrazione di Hopf: $S^1 \to S^3 \to S^2$

- La fibrazione di Hopf dei quaternioni: $S^3 \to S^7 \to S^4$
- La fibrazione $SO(n) \to SO(n+1) \to SO(n+1)/SO(n) \approx S^n$

A questo punto la nostra attenzione si sposta sullo studio delle applicazioni da S^n a S^m.
Risulta utile definire il grado di un'applicazione, come segue :
Definizione: Sia $f : X \to Y$ un'applicazione differenziabile e $x \in X$ un punto regolare di f , il grado di f è: $deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign\, df_x$.

E' possibile ora studiare il caso in cui $n = m$ e dimostriamo perciò il seguente teorema:

Teorema:

1. Ogni $h \in \mathbb{Z}$ è il grado di un'applicazione da S^n a S^n.
2. Se $f \simeq g$ allora $deg\, f = deg\, g$.
3. Se $deg\, f = deg\, g$ allora $f \simeq g$.

Osservando che ogni elemento di $\pi_n(S^m)$ è costituito dalla classe di applicazioni omotope del tipo $\alpha : S^n \to S^m$ dove indichiamo con $[\alpha]$ il rappresentante, possiamo dire che tutte le applicazioni S^n a S^n omotope sono caratterizzate dallo stesso grado, rappresentato da un numero $h \in \mathbb{Z}$, ovvero la scelta del grado comporta l'univoca determinazione di una classe del gruppo di omotopia in questione.
Questo risultato ci permette quindi di affermare che $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Per quanto riguarda il caso in cui $n < m$, gli elementi di $\pi_n(S^m)$ sono rappresentati, anch'essi, dalle classi delle applicazioni da S^n a S^m. Naturalmente, le mappe di questo tipo non sono suriettive, poiché la dimensione del dominio è strettamente minore di quella del codominio; dimostriamo perciò che le applicazioni da S^n a S^m con $n < m$ sono tutte omotope all'applicazione costante. Da ciò deduciamo che esiste un'unica classe di omotopia e conseguenzialmente $\pi_n(S^m) = 0$ per $n < m$.

Otteniamo così il seguente risultato:

Corollario:

$$\pi_n(S^m) \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = m \end{cases}$$

L'ultimo capitolo è interamente dedicato allo studio dei gruppi di omotopia superiori in cui l'ordine è strettamente maggiore della dimensione della varietà. A tale scopo introduciamo un oggetto geometrico molto importante che ci renderà più facile lo studio dei gruppi di omotopia stabili e il calcolo esplicito di $\pi_{n+1}(S^n)$ e di $\pi_{n+2}(S^n)$.

Definizione: Una coppia (W^k, τ^n) definita da una varietà chiusa $W^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ di dimensione k nella quale è definito un campo di n vettori normali non degeneri τ^n, è chiamata varietà equipaggiata con un campo normale di basi orientate senza bordo o più semplicemente varietà equipaggiata .

Le varietà equipaggiate risultano importanti poiché la loro costruzione

evidenzia lo stretto legame con gli elementi di $\pi_{n+k}(S^n)$; vediamola più in dettaglio:
Consideriamo un'applicazione differenziabile $f : S^{n+k} \to S^n$ e sia $s \in S^n$ un valore regolare di f (che per il Lemma di Sard esiste sempre). Introduciamo sulla sfera un sistema di coordinate locali $\phi_1, ..., \phi_n$ per un aperto del punto s, centrate in s ovvero:
$\phi_1(s) = 0 = ... = \phi_n(s) = 0$. Il fatto che s sia un punto regolare di f e che S^{n+k} sia compatta implica , per il teorema della funzione implicita che $f^{-1}(s)$ sia una varietà differenziabile chiusa di dimensione k .

$$f^{-1}(s) = W^k \subset S^{n+k}$$

Ciò significa che W^k è dato dall'equazione $\tilde{\phi_1} = 0, ..., \tilde{\phi_n} = 0$ dove per $i = 1, ..., n$, ϕ_i sono funzioni definite in un certo aperto di W^k detto preimmagine dell'aperto di s dato dalle coordinate ϕ_i, ovvero $\tilde{\phi_i} = f^*\phi_i(x) = \phi_i \circ f(x)$.
Naturalmente risulta che $\tau^n = (grad\tilde{\phi_1}, ..., grad\tilde{\phi_n})$ sono linearmente indipendenti e normali a $f^{-1}(s) = W^k$.
In questo modo abbiamo associato ad un'applicazione $f : S^{n+k} \to S^n$ una coppia (W^k, τ^n) dove $f^{-1}(s) = W^k$ è una sottovarietà chiusa di S^{n+k} e $\tau^n = (grad\tilde{\phi_1}, ..., grad\tilde{\phi_n})$ è un campo di basi orientate su $W^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ e normali a W^k.

Definiamo, inoltre, l'equivalenza tra due varietà equipaggiate nel seguente modo: (W_1^k, τ_1^n) e (W_2^k, τ_2^n) sono equivalenti se esiste una varietà equipaggiata (W^k, τ^n) tale che $W^k = W_1^k \cup W_2^k$ e τ^n coincida con τ_1^n su W_1 e differisca da τ_2^n su W_2 solo per la direzione del primo vettore ed inoltre W^k deve risultare equivalente alla varietà equipaggiata vuota.

Legati al concetto di varietà equipaggiate, ci sono due importanti teoremi, fondamentali per il calcolo dei gruppi di omotopia superiori:

Teorema:

1. Esiste di una naturale corrispondenza biunivoca tra le classi di equivalenza (W^k, τ^n) dove $W^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ e gli elementi del gruppo di omotopia $\pi_{n+k}(S^n)$.

2. Ogni classe di equivalenza di varietà equipaggiate contiene una varietà equipaggiata connessa.

Utilizzando questi due risultati, possiamo quindi associare ad ogni elemento di $\pi_{n+k}(S^n)$ una varietà equipaggiata connessa (W^k, τ^n).
Prima di passare al calcolo esplicito dei gruppi di omotopia, studiamo il comportamento di immersioni da una varietà X a $\mathbb{R}^{2k+q}$ che, per $q \geq 2$ risultano isotope. In particolare, se $n = k + q$, consideriamo una varietà k-dimensionale in (X, τ^n) dove $X \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ e, aggiungendo a τ^n il vettore normale a $\mathbb{R}^{n+k}$ in $\mathbb{R}^{n+k+1}$, otteniamo la seguente mappa di sospensione: $E(X, \tau^n) = (X, (m_0, \tau^n))$, che induce un'applicazione tra $\pi_{n+k}(S^n)$ e $\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$.

$$
\begin{array}{ccc}
(X, \tau^n) & \xrightarrow{E} & (X, (m_0, \tau^n)) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\pi_{n+k}(S^n) & \longrightarrow & \pi_{n+k+1}(S^{n+1})
\end{array}
$$

Tale applicazione risulta essere un omomorfismo di gruppi detto appunto di sospensione.

Nel caso in cui $n > k + 1$, sfruttando le proprietà dell'isotopia, questo omomorfismo diventa un isomorfismo:

$$\pi_{n+k}(S^n) \simeq \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

Con il termine gruppi di omotopia stabili indichiamo proprio quei gruppi di omotopia che soddisfano questa relazione. Lo studio dei gruppi di omotopia stabili renderà più facile il calcolo esplicito di alcuni gruppi di omotopia superiori.

Trattiamo quindi i gruppi di omotopia $\pi_{n+k}(S^n)$ in cui $k = 1$ e $k = 2$.

Analizziamo inizialmente in caso in cui $k = 1$ ovvero: $\pi_{n+1}(S^n)$.
Sapendo, infatti, che ogni elemento $\alpha \in \pi_{n+1}(S^n)$ è in corrispondenza biunivoca con una varietà equipaggiata di dimensione 1, che possiamo considerare compatta e connessa, studiamo quindi tutte le classi di equivalenza delle varietà equipaggiate su S^1.
Consideriamo prima il caso dei gruppi stabili in cui $n \geq 3$. Dotiamo (banalmente) S^1 di un campo di basi orientate τ_0^n: la varietà equipaggiata (S^1, τ_0^n) corrisponde, per costruzione, all'elemento neutro di $\pi_{n+1}(S^n)$. Tutte le altre classi si ottengono facendo ruotare τ_0^n e si ottiene così una corrispondenza biunivoca tra $\pi_{n+1}(S^n)$ e (S^1, τ^n) dove $\tau^n = A(x)\tau_0^n$ e A(x) è un'applicazione da S^1 a $SO(n)$ e quindi è un elemento di $\pi_1(SO(n))$.
Otterremo così: $\pi_{n+1}(S^n) \simeq \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$.
Per quanto riguarda il caso in cui $n = 2$, basta studiare la successione di gruppi di omotopia indotta dalla fibrazione di Hopf per dire che $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Passiamo al caso in cui $k = 2$ e quindi allo studio di $\pi_{n+2}(S^n)$.
Consideriamo prima il caso dei gruppi stabili in cui $n > 3$. Possiamo identificare ogni elemento di $\pi_{n+2}(S^n)$ con una varietà equipaggiata compatta e connessa di dimensione 2, $X \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
Con lo stesso procedimento usato per il calcolo di $\pi_{n+1}(S^n)$, dotiamo X di un campo di basi orientate $(X, A(x)\tau_0^n)$ e costruiamo una corrispondenza biunivoca tra le applicazioni da X a $SO(n)$, che indicheremo con $[X, SO(n)]$, e gli elementi di $\pi_{n+2}(S^n)$. Grazie alla funzione di Arf, che per ogni scelta di $\alpha \in \pi_1(X)$ associa ad ogni elemento della classe di $[X, SO(n)]$ una varietà equipaggiata (X, τ^n) che risulta essere legata ad una varietà equipaggiata su S^1, otteniamo una situazione che si può così schematizzare :

$$\begin{array}{l} [X, SO(n)] \,=\, (X, A(x)\tau_0^n) \quad \leftrightarrow \quad \pi_{n+2}(S^n) \\ \qquad \downarrow \Phi(\alpha, \cdot) \\ (S^1, \tau^{n+1}) \leftrightarrow \pi_{n+2}(S^{n+1}) \simeq \pi_{n+1}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Utilizzando, inoltre, appropriate operazioni di taglio e cucito ci riduciamo allo studio di due casi particolari che dipendono dalla scelta della varietà di partenza X che è 2-dimensionale, compatta e connessa:
Se $X = S^2$, la varietà equipaggiata (S^2, τ^n) corrisponde proprio all'elemento neutro di $\pi_{n+2}(S^n)$.
Se $X = T$, otteniamo che $\pi_{n+2}(S^n) \simeq \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2 = \langle f \rangle$ dove f è una mappa da X a $SO(n)$ con $X = T$.
Per quanto riguarda i casi in cui n=3 ed n=2 , utilizzando sempre le fibrazioni di Hopf, otterremo che $\pi_4(S^2) \simeq \mathbb{Z}_2$ e $\pi_5(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Per quanto riguarda i casi in cui $k \geq 3$ e in particolare il caso in cui $k = 3$, la difficoltà di classificare le varietà di dimensione 3 renderà notevolmente complicato riuscire ad estendere praticamente ai $\pi_{n+3}(S^n)$ la tecnica sviluppata per lo studio dei gruppi di omotopia di ordine inferiore, anche se teoricamente gli strumenti da usare sono gli stessi applicati per il calcolo di $\pi_{n+1}(S^n)$ e $\pi_{n+2}(S^n)$.

Bibliografia

[BNF82] Doubrovine B., S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. II,Géométrie et topologie des variétés*. "Mir", Moscow, 1982. Traduit du Russe par da Vladimir Kotliar.

[BNF90] Doubrovine B., S. Novikov, and A. Fomenko. *Modern Geometry - Methods and Application III, Introduction to Homology Theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.

[BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[CS52] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre. Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I. Constructions générales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:288–290, 1952.

[Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Mil90] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* The University press of Virginia, Charlotteville, 1990.

[Nab97] Gregory L. Naber. *Topology, geometry, and gauge fields*, volume 25 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 1997. Foundation.

[Ser94] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[War87] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1987.