UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Tesi Magistrale in Matematica
di

Gabriele Nocco

# Decomposizione di Zariski dei Divisori Pseudo-Effettivi

Relatore

Prof. Angelo Felice Lopez

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2008 - 2009
9 LUGLIO 2009

Classificazione AMS: 14C20, 14J99
Parole Chiave: Divisori, pseudo-effettivi, decomposizione di Zariski

# Sintesi

Il concetto principale nella geometria algebrica è la nozione di *varietà algebrica.* Possiamo considerare una varietà algebrica come l'insieme di tutti i punti dove una famiglia di polinomi si annulla (se siamo in uno spazio proiettivo questa famiglia deve essere omogenea).

Uno dei più interessanti problemi in geometria algebrica è quello di studiare gli invarianti algebrici o geometrici delle varietà algebriche. Un importante strumento geometrico è il gruppo dei divisori su una varietà $X$.

Per la nostra sintesi abbiamo bisogno di definire alcuni concetti: per semplicità supponiamo che $X$ sia una varietà algebrica non singolare.

Un divisore è un elemento del gruppo abeliano libero generato dalle sottovarietà di codimensione uno, quindi possiamo pensare a un divisore come una somma finita formale $D = \sum a_i C_i$, dove i $C_i$ sono sottovarietà di codimensione uno e i coefficienti $a_i$ sono in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ (quindi abbiamo il gruppo dei divisori, dei $\mathbb{Q}$-divisori o $\mathbb{R}$-divisori).

Definiamo *effettivo* un divisore $E$ tale che i coefficienti $a_i$ sono tutti non negativi.

A questo punto è naturale definire una teoria dell'intersezione. Il *numero di intersezione* è una forma multilineare associata ai divisori che può essere definita in vari modi (vedere [2, Appendice A] o [6, capitolo IV]). Per esempio se siamo su una superficie, $C$ e $D$ sono due sottovarietà di codimensione uno distinte, allora possiamo pensare $C \cdot D$ come il numero di punti dell'intersezione di $C$ con $D$.

Diremo che due divisori $D'$ e $D''$ sono *numericamente equivalenti* se $D' \cdot C = D'' \cdot C$ per ogni curva irriducibile $C$. Ovviamente questa è una relazione di equivalenza, quindi possiamo prendere il quoziente del gruppo dei divisori su questa relazione. Lo spazio risultante prende il nome di spazio di *Neron-Severi* di $X$. Questo è uno spazio vettoriale di dimensione finita e lo possiamo considerare dotato della topologia euclidea.

Questo è un importante invariante intrinseco di $X$.

Grazie alla teoria dell'intersezione abbiamo un modo molto semplice di descrivere alcune definizioni centrali per questa tesi.

Un divisore *ampio* è un divisore $A$ tale che $A^{dimV} \cdot V > 0$ per ogni sottovarietà $V$ di dimensione positiva (criterio di Nakai-Moishezon).

Un divisore *nef* è un divisore $D$ tale che $D^{dimV} \cdot V \geqslant 0$ per ogni sottovarietà $V$ di dimensione positiva (teorema di Kleiman).

Una classe *pseudo-effettiva* dello spazio di Neron-Severi è una classe limite di divisori effettivi.

La serie lineare di un divisore $D$, che indicheremo con $|D|$, è l'insieme di tutti i divisori effettivi linearmente equivalenti a $D$.

Nel primo capitolo richiameremo le definizioni e le proprietà fondamentali di queste nozioni.

Il seguente problema è fondamentale nella geometria algebrica:

studiare il sistema lineare $|nD|$ per $n \geqslant 1$.

Una della basilari costruzioni in questa direzione è il teorema di Riemann-Roch. Questo collega invarianti geometrici, come il numero di intersezione tra due divisori, e invarianti algebrici, come la caratteristica di Eulero, in una unica equazione. In questo senso è fondamentale.

Il teorema di Riemann-Roch ci da un importante modo per studiare la serie lineare, $|mD|$, di un multiplo di un divisore.

Di questo problema esiste una ben sviluppata teoria nel caso in cui $dimX = 1$.

Nel caso in cui $dimX = 2$, nei primi anni 60, O. Zariski ridusse questo problema al caso in cui $D$ è nef.

Nel suo articolo [1], Zariski risolse il problema di Riemann-Roch per multipli abbastanza grandi di un divisore effettivo su una superficie liscia proiettiva.

Zariski provò l'esistenza di una decomposizione per un divisore *effettivo* $D$ in un $\mathbb{Q}$-divisore nef $P$ e un $\mathbb{Q}$-divisore effettivo $N$ tale che $h^0(nP) = h^0(nD)$ quando $n$ è un numero intero positivo per cui $nP$ è un divisore intero. Questa decomposizione prende il nome di *decomposizione di Zariski.* $P$ e $N$ vengono chiamati rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di $D$.

Più specificatamente, Zariski dimostrò il seguente risultato se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$:

**Teorema 0.0.1** (**Zariski**, Teorema 2.1.3)**.** *Sia $D$ un $\mathbb{K}$-divisore effettivo su una superficie proiettiva liscia $X$. Allora sono univocamente determinati dei $\mathbb{K}$-divisori effettivi (possibilmente nulli) $P$ e $N$ con $D = P + N$ tali che*

1. *$P$ è nef,*
2. *$N$ è nullo o ha matrice di intersezione definita negativa,*
3. *$P \cdot C = 0$ per ogni componente irriducibile $C$ di $N$.*

Una semplice dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della decomposizione di Zariski per $\mathbb{Q}$-divisori effettivi è dovuta a Bauer [3] (la nostra sezione 2.1).

Mentre Zariski costruì la sua decomposizione lavorando con la parte negativa, nel suo articolo Bauer da un modo per costruire la parte positiva della decomposizione usando l'importante proprietà per la quale $P$ è il più grande nef contenuto in $D$. Il teorema è esattamente lo stesso di Zariski, ma la dimostrazione richiede molta meno teoria.

Fujita [4] estese l'esistenza e l'unicità della decomposizione ai $\mathbb{Q}$-divisori *pseudo-effettivi* (la nostra sezione 2.2) usando pesantemente la dimensione finita dello spazio di Neron-Severi. Fujita provò questo risultato per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$:

**Teorema 0.0.2** (**Zariski-Fujita**, Teorema 2.2.8)**.** *Sia $D$ un $\mathbb{K}$-divisore pseudo-effettivo su una superficie proiettiva liscia $X$. Allora sono univocamente determinati due $\mathbb{K}$-divisori $P$ e $N$ tali che $D = P + N$, $N$ è effettivo (possibilmente nullo) e:*

1. *$P$ è nef,*
2. *$N$ è nullo o ha matrice di intersezione definita negativa,*

*3.* $P \cdot C = 0$ *per ogni componente irriducibile* $C$ *di* $N$*.*

In questo caso la dimostrazione è basata sulla costruzione della parte negativa, sottraendo divisori effettivi fino a quando non rimanga un divisore nef.

*Un risultato originale ottenuto in questa tesi* è quello di estendere la costruzione di Bauer agli $\mathbb{R}$-divisori effettivi e la costruzione di Fujita agli $\mathbb{R}$-divisori pseudo-effettivi, cioé i teoremi 0.0.1 e 0.0.2 nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Esempi fanno vedere come la decomposizione di Zariski non può essere generalizzata in dimensioni superiori senza significative variazioni.

Molte generalizzazioni in dimensioni superiori sono basate su queste due proprietà della decomposizione di Zariski: $P$ è nef e $H^0(X, \lfloor kP \rfloor) = H^0(X, \lfloor kD \rfloor)$ per ogni $k$, alcune volte passando attraverso mappe birazionali.

Un'altra possibile costruzione è la $\sigma$-decomposizione, dovuta a Nakayama [5]. Questa costruzione è legata alla funzione $\sigma_\Gamma$ definita nel modo seguente:

**Definizione 0.0.3** (Definizione 3.1.2)**.** *Sia* $\Gamma$ *un divisore primo e sia* $B$ *un* $\mathbb{R}$*-divisore big, definiamo:*

$$\sigma_\Gamma(B) := \inf\{mult_\Gamma E \mid E \in |B|_{num}\}$$

*dove* $|B|_{num}$ *è l'insieme di tutti gli* $\mathbb{R}$*-divisori effettivi* $E$ *tali che* $E \equiv_{num} B$*.*

Per gli $\mathbb{R}$-divisori pseudo-effettivi possiamo estendere questa funzione in un modo molto semplice:

**Definizione 0.0.4** (Definizione 3.1.11)**.** *Per un* $\mathbb{R}$*-divisore pseudo-effettivo* $D$ *e un divisore primo* $\Gamma$*, definiamo*

$$\sigma_\Gamma(D) := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \sigma_\Gamma(D + \epsilon A)$$

*per ogni* $A$ *divisore ampio.*

Ora definiamo la $\sigma$-decomposizione in questo modo:

**Definizione 0.0.5** (Definizione 3.2.1)**.** *Sia* $D$ *un* $\mathbb{R}$*-divisore pseudo-effettivo di una varietà non singolare proiettiva* $X$*. Definiamo*

$$N_\sigma(D) := \sum \sigma_\Gamma(D)\Gamma,$$

*e $P_\sigma(D) := D - N_\sigma(D)$.*

*La decomposizione $D = P_\sigma(D)+N_\sigma(D)$ è chiamata la $\sigma$-decomposizione di $D$. Definiamo $P_\sigma(D)$ e $N_\sigma(D)$ rispettivamente la parte positiva e la parte negativa della $\sigma$-decomposizione di $D$.*

Notiamo che $N_\sigma(D)$ è ben definito per via del seguente fatto:

**Corollario 0.0.6** (Corollario 3.1.18)**.** *Per ogni $\mathbb{R}$-divisore pseudo-effettivo $D$, il numero di divisori primi $\Gamma$, tali che $\sigma_\Gamma(D) > 0$ è minore del numero di Picard, $\rho(X)$.*

Abbiamo che

**Definizione 0.0.7** (Definizione 3.2.6)**.** *La $\sigma$-decomposizione $D = P_\sigma(D) + N_\sigma(D)$ per un $\mathbb{R}$-divisore pseudo-effettivo è chiamata decomposizione di Zariski se $P_\sigma(D)$ è nef.*

In generale la parte positiva della $\sigma$-decomposizione non è nef, bensì è una classe nel cono mobile, ma su una superficie abbiamo che:

**Osservazione 0.0.8** (Osservazione 3.2.7)**.** *Se $X$ è una superficie, allora il cono mobile $\overline{Mv(X)}$ coincide con il cono nef, $Nef(X)$. Di conseguenza la $\sigma$-decomposizione di un $\mathbb{R}$-divisore pseudo-effettivo, $D$, non è altro che la usuale decomposizione di Zariski.*

In fine proveremo la continuità di questa funzione:

**Proposizione 0.0.9** (Proposizione 3.2.11)**.** *La funzione $\sigma_\Gamma : \overline{Eff(X)} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ per un divisore primo $\Gamma$ su una superficie non singolare proiettiva $X$ è continua.*

# Bibliografia


[1] Oscar Zariski, *The Theorem of Riemann-Roch for High Multiples of an Effective Divisor on an Algebraic Surface*. Ann. of Math, 1962

[2] Robert Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry*. Springer, 2004.

[3] Thomas Bauer, *A Simple Proof For The Existence Of Zariski Decompositions On Surfaces*. arXiv:0712.1576v1, 2007

[4] Takao Fujita, *On Zariski Problem*. Ann. of Math, 1979

[5] Noboru Nakayama, *Zariski-decomposition and Abundance*. MSJ Memoires, 2004

[6] Igor Rostislavovich Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry* 1. Springer, edition 1998