UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica

Francesca Moruzzi

Su alcune proprietà aritmetiche degli ideali dei domini di Prüfer

Relatore Prof. Marco Fontana

Il Candidato Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 1996 - 1997

FEBBRAIO 1998

Classificazione AMS: 13F05, 13B30.

Parole chiave: Domini di Prüfer, Ideali divisoriali, Inverso di un ideale, Trasformato di Nagata.

Francesca Moruzzi è nata a Roma il 28 febbraio 1974.

Ha conseguito il Diploma di maturità classica presso il Liceo Ginnasio statale "Platone" di Roma, nel luglio 1992.

Si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso la Terza Università degli Studi di Roma nell'anno accademico 1992 -1993 ed ha sostenuto iseguenti esami:

Analisi I, Geometria I, Algebra, FisicaI, Analisi II, Geometria II, Meccanica Razionale, Fisica II, Istituzioni di Analisi superiore, Istituzioni di Geometria superiore, Istituzioni di Fisica Matematica, Istituzioni di Algebra superiore, Geometria algebrica, Geometria superiore, Calcolo delle Probabilità.

Ha presentato per la prova di qualificazione all'esame di laurea, le seguenti tesine orali:

"Il Teorema Cinese dei Resti e le sue generalizzazioni" e "Catene di Markov e sistemi algebrici".

Indice

Introduzione

Nozioni ormai acquisite dal linguaggio dell'algebra, quale quella di ideale, di prodotto di ideali, della fattorizzazione di ideali, sotto opportune ipotesi sull'anello R, sono state introdotte essenzialmente da Dedekind, nella metà del secolo scorso. Con il ricorso a tali nuovi concetti, Dedekind mirava ad ottenere una generalizzazione della teoria della fattorizzazione, nel caso di estensioni algebriche finite del campo dei razionali. Tale problema era già stato proposto da Kummer come una possibile via di soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat ed esaminato da questi solo per i campi ciclotomici, ricorrendo al concetto di "ideale numerico", un sottoinsieme chiuso rispetto al prodotto dei suoi elementi e dotato di proprietà di fattorizzabilità, cioè, una sorta di definizione primitiva della nozione di ideale. La teoria di Kummer per la fattorizzazione degli interi ciclotomici, fu per Dedekind motivo d'ispirazione, in particolare egli iniziò il suo lavoro puntualizzando i concetti che in essa erano stati introdotti più intuitivamente che formalmente. Kummer affermava che ogni intero ciclotomico fosse divisibile per un numero finito di volte per un fattore ideale primo, senza specificare, secondo Dedekind, "cosa" effettivamente fosse tale fattore ideale, inoltre, ricorreva massicciamente alle proprietà degli interi ciclotomici, rendendo inapplicabili i suoi risultati ad una qualsiasi altra estensione algebrica. Dedekind, quindi, caratterizzò innanzitutto gli ideali numerici di Kummer con la chiusura rispetto all'addizione ed al prodotto per tutti gli elementi dell'anello, ne studiò le caratteristiche negli anni successivi e le applicazioni nella teoria di Kummer. Dedekind trattò specificatamente le estensioni finite di interi algebrici, non usava il termine di anello, introdotto solo successivamente da Hilbert, ed in-

vece di ideale parlava di "sistema" di interi, ma a parte queste differenze di notazione e di terminologia, egli formalizzò la teoria degli ideali, quale noi ora la conosciamo e creò un nuovo linguaggio, che fu universalmente accettato e sul quale si sono basati tutti gli sviluppi successivi dell'algebra. Il ricorso agli ideali risultò determinante nella teoria della divisibilità, infatti i nuovi concetti introdotti da Dedekind per gli interi algebrici ed in seguito estesi da E. Noether ad un qualsiasi anello astratto, permisero di generalizzare quelle proprietà aritmetiche note fino ad allora solo per gli interi ed i razionali. Dedekind introdusse la nozione di divisibilità di un ideale per un altro, tramite un sistema di congruenze e generalizzò, per le estensioni finite di interi algebrici, la fattorizzazione unica per gli ideali come prodotto finito di potenze di ideali primi. Tale fattorizzazione unica fu poi estesa a tutti quegli anelli soddisfacenti i cosiddetti postulati di Noether: la stazionarietà delle catene ascendenti di ideali, la chiusura integrale, la massimalità degli ideali primi non nulli. Tali anelli furono appunto denominati anelli di Dedekind.
In un articolo del 1932 ([18]), Prüfer introdusse un ideale, identificato come soluzione di un sistema *infinito* di congruenze, tale che ogni sottosistema finito di questo fosse risolubile. Egli definì un "sistema ideale" una classe di ideali con particolari caratteristiche ed indagò sull'attribuzione di proprietà aritmetiche per determinati sistemi ideali. Prüfer dimostrò, quindi, che se nel sistema degli ideali finitamente generati vale la proprietà che un ideale è contenuto in un altro se ne è multiplo, allora nell'anello è risolubile qualsiasi sistema, anche infinito, le cui congruenze siano compatibili a coppie, inoltre ogni ideale finitamente generato dell'anello risulta invertibile. Prüfer nel suo articolo non applicò i risultati della teoria di Dedekind, ma partì da un punto di vista diverso, mostrando che lo studio delle proprietà degli ideali poteva essere affrontato anche con un approccio alternativo a quello

di Dedekind; il suo lavoro fu quindi di spunto, per quei matematici, quali Krull, Artin, van der Waerden, che erano impegnati nella generalizzazione dei risultati di quest'ultimo soprattutto nella teoria della divisibilità. Solo in seguito la proprietà individuata da Prüfer in grado di garantire la risoluzione dei sistemi di congruenze in un anello R, si rivelò equivalente alla proprietà che le localizzazioni effettuate rispetto agli ideali massimali fossero anelli di valutazione. È stata definita, quindi, una classe di domini, detti appunto di Prüfer, con questa proprietà astratta che ne ha portato l'applicazione ai più moderni sviluppi dell'algebra commutativa, quando l'interesse per le problematiche sollevate dalla teoria cosiddetta "classica" degli ideali si spostarono sulla teoria delle valutazioni, per la cui generalizzazione dei risultati, i domini di Prüfer furono impiegati.

Con questo lavoro ci proponiamo pertanto di evidenziare come i domini di Prüfer, pur restando una classe assai vasta di domini, abbiano costituito, più volte, un ambiente privilegiato per la risoluzione di alcuni problemi, altrimenti ancora aperti. Ci soffermeremo soprattutto su alcune questioni sui sovranelli che sono state oggetto d'indagine ed il cui esame nel caso dei domini di Prüfer ha permesso di giungere ad interessanti conclusioni: caratterizzare quando l'inverso di un ideale sia un anello ed in caso affermativo, descriverne la struttura e stabilire quando tale ideale sia divisoriale; stabilire le rappresentazioni, in termini di localizzazioni, di anelli del tipo $(I : I)$ e del Trasformato di Nagata, dove I è un ideale di un dominio di Prüfer.

Nel primo capitolo cercheremo di riprendere il percorso storico che ha portato all' introduzione dei domini di Prüfer. Partiremo dal Teorema Cinese dei Resti, vero e proprio, per arrivare ad una sua generalizzazione in termini di ideali per un anello qualsiasi; caratterizzeremo, poi, le proprietà che per un anello commutativo unitario sono equivalenti a quella di garantire la sufficienza della condizione necessaria alla risolubilità di un sistema di congruenze ideali e cioè, che sia valida la distributività delle operazioni di somma e intersezione sull'insieme degli ideali ([SZ], [G]) e che le localizzazioni dell' anello rispetto agli ideali massimali siano anelli di valutazione ([16]). Definiremo quindi i domini di Prüfer come i domini in cui siano soddisfatte tali condizioni, perché risultino caratterizzati proprio dalla validità in essi del Teorema Cinese dei Resti, nella sua generalizzazione in termini di ideali. Daremo infine alcune conseguenze della definizione al fine di possedere alcune proprietà preliminari al resto della trattazione.

Nel secondo capitolo enunceremo invece un Teorema valido per tutti i sovranelli di un dominio di Prüfer che ne stabilisce la rappresentabilità come intersezione di localizzazioni, effettuate rispetto a quell'insieme di ideali primi del dominio, la cui estensione al sovranello resta un ideale proprio ([G]). Applicheremo poi tale risultato ad alcuni sovranelli notevoli definibili in corrispondenza di ogni ideale non nullo I del dominio, cercando di individuare per ognuno di questi il corrispondente insieme di ideali primi che ne caratterizza la rappresentazione. Mostreremo innanzitutto come l'esprimibilità, in termini di tale intersezione sia un criterio per stabilire almeno nei domini di Prüfer quando l'inverso di un ideale, sia un anello ([15]), problema ancora aperto in ambiti più generali ([1]). Rappresenteremo poi $(I : I)$ in un dominio di Prüfer qualsiasi e nel caso specifico dei QR-domini, dove i risultati potranno essere ulteriormente rivisti ([9]). Discuteremo, invece, la rappresentazione del Trasformato di Nagata di I, $T(I)$, solo per i casi particolari degli ideali degli anelli di valutazione ([FHP]) e degli ideali finitamente generati ([2],[G]), mentre forniremo, per gli ideali qualsiasi, solo l'inclusione in una possibile rappresentazione ([G]). Con questo lavoro illustreremo poi altri casi per cui tale inclusione risulta essere un'uguaglianza, oltre a quello già noto degli ideali con un numero finito di primi minimali ([FHP]).

Nel terzo capitolo indagheremo su quando l'inverso di un ideale I, nell'ipotesi che sia un anello, coincida con $(I : I)$. Verificheremo con un controesempio che anche nei domini di Prüfer, tale identità sia una condizione sufficiente ad assicurare che I^{-1} sia un anello, ma non necessaria. Svilupperemo alcuni risultati validi nel contesto più generale dei domini seminormali, in cui i Prüfer sono compresi, per concludere che, I^{-1} è un anello, se e solo se coincide con $(\sqrt{I} : \sqrt{I})$, ([9]). Il problema di stabilire quando I^{-1} coincida con $(I : I)$ si sposterà allora, su quello di individuare le ipotesi sull'ideale I che consentono la validità dell'uguaglianza $(I : I) = (\sqrt{I} : \sqrt{I})$; confronteremo, quindi, le rappresentazioni di questi sovranelli ed in particolare gli insiemi di ideali primi che le caratterizzano. Mostreremo così, con questo lavoro, che la condizione sull'ideale I di essere privo di divisori primi distinti dai suoi primi minimali, già ritenuta sufficiente alla validità di tale uguaglianza, sia anche necessaria, migliorando così il risultato esposto in [9].

Infine, nell'ultimo capitolo, parleremo degli ideali divisoriali nei domini di Prüfer. Caratterizzeremo il caso in cui gli ideali primi e le loro potenze sono divisoriali, ricorrendo soprattutto alle proprietà dei loro Trasformati, ([7], [8]) ed individueremo nei ##-domini, introdotti da Gilmer e Heinzer in ([11]), la classe di domini di Prüfer in cui tali ipotesi sono sempre soddisfatte; concluderemo allora, con la descrizione della classe di domini di Prüfer i cui ideali sono tutti divisoriali ([13], [FHP]).

1 Introduzione ai domini di Prüfer

Definizione:

Siano a b e $c \in \mathbb{Z}$, diciamo che $a \equiv b$ $(mod\ c)$ se esiste un intero h per cui $a = b + ch$ o, equivalentemente, se $a - b \in (c)$.

Proposizione 1.1 *Siano a, b e $m \in \mathbb{Z}$. La congruenza $ax \equiv b$ $(mod\ m)$, se e soltanto se $d \mid b$, dove $d := MCD(a, m)$. In tal caso, $x*$ è una soluzione se e soltanto se $x* \equiv \alpha b/d$ $(mod\ m/d)$, dove α è l'inverso aritmetico di a/d $(mod\ m/d)$.*

Dimostrazione:

Se la congruenza $ax \equiv b$ $(mod\ m)$ ammette soluzione, allora esiste un intero $y \in \mathbb{Z}$ tale che $ax - b = my$. Pertanto $b = ax - my$ è un multiplo di $MCD(a, m)$: Viceversa supponiamo che $MCD(a, m)$ sia un divisore di b. Sappiamo che esistono due interi t e s per i quali $MCD(a, m) = at + sm$; allora, $b = MCD(a, m)z = (at + sm)z$, esiste $z \in \mathbb{Z}$. Da ciò risulta che $a(tz) - b = -m(sz)$, da cui otteniamo $a(tz) \equiv b$ $(mod\ m)$ e che, quindi tz è una soluzione della congruenza proposta.

Consideriamo allora il caso in cui $d = 1$. Se α è l'inverso aritmetico di a $(mod\ m)$, abbiamo che $a\alpha \equiv 1$ $(mod\ m)$ e che $a(\alpha b) \equiv b$ $(mod\ m)$, dunque αb è una soluzione. Se poi $x*$ è un'altra soluzione, $ax* \equiv b$ $(mod\ m)$, per cui $\alpha a x* \equiv x* \equiv \alpha b$ $(mod\ m)$. Sia allora $d > 1$; $x*$ è una soluzione della congruenza proposta, se e soltanto se risolve anche la congruenza $(a/d)x \equiv b/d$ $(mod\ m/d)$ e poiché $MCD(a/d, m/d) = 1$, dal caso precedente abbiamo che $x* \equiv \alpha b/d$ $(mod\ m/d)$ con α inverso aritmetico di a/d $(mod\ m/d)$, da cui discende la conclusione.

È noto sotto il nome di Teorema Cinese dei Resti un complesso di ipotesi che garantiscono la risolubilità di un sistema di congruenze a coefficienti interi.

Possiamo enunciare non restrittivamente tale teorema per i sistemi in cui compaiono solo congruenze del tipo $x \equiv c \ (mod\ m)$, in quanto, per la proposizione precedente, qualsiasi congruenza $ax \equiv c \ (mod\ m)$, con $a \neq 1$ e risolubile è riesprimibile in questa forma

Teorema 1.2 (Teorema cinese dei resti).
Sia:

$$\begin{aligned} x &\equiv c_1 \ (mod\ m_1) \\ &\vdots \\ x &\equiv c_n \ (mod\ m_n) \end{aligned}$$

un sistema di congruenze in $\mathbb{Z}$. *Se gli interi* $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ *sono primi fra loro, il sistema ammette una soluzione unica* $(mod\ m_1 \dots m_n)$

Dimostrazione:
Procediamo per induzione sul numero n di equazioni che compaiono nel sistema. Se $n = 2$, per ogni $y \in \mathbb{Z}$, $x = c_1 + ym_1$ è una soluzione della prima congruenza, che risolve anche la seconda congruenza e quindi il sistema, se e soltanto se $ym_1 \equiv c_2 - c_1 \ (mod\ m_2)$. Perché questa condizione sia soddisfatta, dobbiamo trovare k e $y \in \mathbb{Z}$, per cui $ym_1 + km_2 = c_2 - c_1$. Poiché $MCD(m_1, m_2) = 1$, esistono α e $\beta \in \mathbb{Z}$ per cui $\alpha m_1 + \beta m_2$, basta, quindi, porre $y = \alpha(c_2 - c_1)$ e $k = \beta(c_2 - c_1)$, per garantire la risolubilità del sistema. Siano allora x e $x*$ due soluzioni distinte, abbiamo che $x - x* \equiv 0 \ (mod\ m_1)$ e $x - x* \equiv 0 \ (mod\ m_2)$; segue che $m_1 m_2 \mid x - x*$ e che quindi esiste $h \in \mathbb{Z}$, per cui $x* = x + m_1 m_2 h$; possiamo perciò concludere che $x* \equiv x \ (mod\ m_1 m_2)$. Supponiamo ora che l'asserto sia verificato per il sistema costituito dalle prime $n - 1$ equazioni, che ammette quindi un'unica

soluzione $x \equiv c\ (mod\ m_1 \dots m_{n-1})$: il sistema complessivo ammette soluzione se e soltanto se è risolubile il sistema

$$\begin{aligned} x &\equiv c\ (mod\ m_1 \dots m_{n-1}) \\ x &\equiv c_n\ (mod\ m_n). \end{aligned}$$

Poiché il coefficiente m_n è primo con tutti gli altri coefficienti $\{m_i\}_{i=1}^{n-1}$, è primo anche con il loro prodotto, pertanto, come già mostrato nell'ipotesi induttiva, tale sistema ammette soluzione unica $(mod\ m_1 \dots m_n)$.

Teorema 1.3 *Una condizione necessaria e sufficiente per cui il sistema abbia soluzione è che $MCD(m_i, m_j) \mid MCD(c_i, c_j)$, presi comunque $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Inoltre se la soluzione esiste, essa è unica mod $mcm(m_1, \dots, m_n)$.*

Dimostrazione:
La congruenza $x \equiv\ c_i\ (mod\ m_i)$ è verificata solamente se, $x \equiv c_i (mod\ p_i^{e_i})$, per ogni fattore $p_i^{e_i}$ che compare nella rappresentazione di m_i come prodotto di potenze di elementi primi. Indichiamo con t_p, la potenza massima di p che compare nelle fattorizzazioni degli m_i: possiamo supporre senza perdita di generalità che $t_p = e_1$. Poiché p^{e_i} è la p-esima componente di $MCD(m_1, m_i)$, dall'ipotesi segue che $c_1 \equiv c_j\ (mod\ p^{e_i})$, allora la congruenza $x \equiv c_1\ (mod p^{t_p})$ implica ogni altra congruenza del tipo $x \equiv c_i\ (mod\ p^{e_i})$. Al sistema di partenza possiamo quindi sostituire un sistema equivalente

$$\begin{aligned} x &\equiv c_{p_1}\ (mod\ p_1^{t_{p_1}}) \\ &\vdots \\ x &\equiv c_{p_s}\ (mod\ p_s^{t_{p_s}}) \end{aligned}$$

dove i $p_i^{t_{p_i}}$ sono primi fra loro, per il quale, dal Teorema Cinese dei Resti, esiste un'unica soluzione modulo $(p_1^{t_{p_1}} ... p_s^{t_{p_s}}) = mcm(m_1, ..., m_n)$.

Possiamo definire una relazione di congruenza anche in un anello qualsiasi, generalizzando la nozione già introdotta in $\mathbb{Z}$

Definizione:
Sia R un anello e sia I un suo ideale non nullo. Diciamo che $a \equiv b \ (mod\ I)$ se $a - b \in I$.

Ci proponiamo, quindi di stabilire, analogamente al caso intero, delle condizioni di risolubilità di un sistema di congruenze in un anello R e di individuare le ipotesi su R per cui tali condizioni risultino le più deboli possibili. Abbiamo un primo risultato nel caso in cui R sia un anello commutativo unitario.

Definizione:
Siano I e J due ideali di un anello R, I e J si dicono *comassimali* se $I + J = (1)$.

Teorema 1.4 *Sia R un anello commutativo unitario e $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una famiglia di suoi ideali. Consideriamo l'omomorfismo di anelli:*

$$\begin{aligned} \phi : R &\longrightarrow \Pi_{i=1}^{n} (R/A_i) \\ x &\longmapsto (x + A_1, ..., x + A_n) \end{aligned}$$

allora:

1. *$Ker(\phi) = \bigcap A_i$ e se gli $\{A_i\}$ sono a due a due comassimali*
   $Ker(\phi) = \bigcap A_i = \Pi A_i$.

2. *ϕ è suriettivo se e soltanto se gli ideali $\{A_i\}$ sono a due a due comassimali.*

Dimostrazione:

1. Osserviamo innanzitutto che $\phi(x) = (0, \ldots, 0)$, se e soltanto se $x \in A_i$ per ogni A_i e quindi, se e soltanto se $x \in \bigcap A_i$. Pertanto resta solamente da verificare che $\Pi A_i = \bigcap A_i$. Procediamo per induzione sul numero degli ideali $\{A_i\}$. Se $n = 2$, basta verificare che $A_1 \cap A_2 = A_1 A_2$. In generale, dati due ideali I e J di un anello R abbiamo che $IJ \subseteq I \cap J$ e che $(I + J)(I \cap J) \subseteq IJ$, essendo però A_1 e A_2 comassimali per ipotesi, possiamo concludere da questa seconda inclusione, che $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 A_2$, da cui discende la tesi. Supponiamo ora che $\Pi_{i=1}^{n-1} A_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$. Poiché, per ogni indice i compreso fra 1 e $n - 1$, $A_i + A_n = (1)$, abbiamo equazioni della forma $x_i + y_i = 1$ con $x_i \in A_i$ e $y_i \in A_n$, dalle quali otteniamo:
$$\Pi_{i=1}^{n-1} x_i = \Pi_{i=1}^{n-1}(1 - y_i) \equiv 1 \ (mod\ A_n).$$
Allora $A_n + \Pi_{i=1}^{n-1} A_i = (1)$ e quindi
$$\Pi_{i=1}^{n} A_i \left(\Pi_{i=1}^{n-1} A_i\right) A_n = \left(\Pi_{i=1}^{n-1} A_i\right) A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

2. $(\Rightarrow)$
Mostriamo ad esempio che A_1 e A_2 sono fra loro comassimali. Poiché ϕ è suriettivo, esiste un elemento $x \in R$ tale che $\phi(x) = (1, 0, \ldots, 0)$, pertanto risulta che $x \equiv 1 \ (mod\ A_1)$ e che $x \equiv 0 \ (mod\ A_2)$, da cui discende che: $1 = (1 - x) + x \in A_1 + A_2$.
$(\Leftarrow)$
Basterà verificare l'esistenza di un elemento $x \in R$ per il quale $\phi(x) = (1, 0 \ldots, 0)$. Poichè $A_1 + A_n = (1)$, abbiamo equazioni della forma $u_i + v_i = 1$ con $u_i \in A_1$ e $v_i \in A_n$. Consideriamo quindi $x = \Pi_{i=2}^{n} v_i$, $x = \Pi(1 - u_i) \equiv 1 \ (mod\ A_1)$ e $x \equiv 0 \ (mod\ A_i)$, da cui segue che x è l'elemento cercato.

Definizione:

Sia R un anello, diciamo che *in R vale il Teorema Cinese dei Resti* se per ogni insieme finito $\{A_i\}_{i=1}^n$, di ideali di R e per ogni suo sottoinsieme $\{x_i\}_{i=1}^n$ di elementi, tali che $x_i \equiv x_j \ (mod\ A_i + A_j)$, al variare degli indici i e j fra 1 e n, il sistema di congruenze:

$$\begin{array}{rcl} x & \equiv & x_1 \ (mod\ A_1) \\ & \vdots & \\ x & \equiv & x_n \ (mod\ A_n) \end{array}$$

ammette soluzione in R.

Teorema 1.5 *In un anello R le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *In R vale il Teorema Cinese dei Resti*

2. *Se A, B e C sono ideali di R, allora:*

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap B)$$

Dimostrazione:

$(2) \Leftrightarrow (3)$

Siano A, B e C degli ideali di R: supponiamo che valga l'asserto (2)

$$\begin{aligned} (A + B) \cap (A + C) &= [(A + B) \cap A] + [(A + B) \cap C] \\ &= A + [(A \cap C) + (B \cap C)] \\ &= A + (B \cap C) \end{aligned}$$

Se invece supponiamo vero l'asserto (3):

$$\begin{aligned} (A \cap B) + (A \cap C) &= [(A \cap B) + A] \cap [(A \cap B) + C] \\ &= A \cap [(A + C) \cap (B + C)] \\ &= A \cap (B + C) \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (3)

L'inclusione $A+(B\cap C)\subseteq(A+B)\cap(A+C)$ è sempre valida. Per provare l'inclusione inversa, mostriamo che un qualsiasi elemento $t\in(A+B)\cap(A+C)$ si può esprimere come somma di due elementi $x\in A$ e $y\in(B\cap C)$, cioè, equivalentemente, cerchiamo una soluzione per il sistema:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0\ (mod\ A)\\ x &\equiv t\ (mod\ B)\\ x &\equiv t\ (mod\ C). \end{aligned}$$

Poiché $t\equiv 0\ (mod\ A+B)$, $t\equiv 0\ (mod\ A+C)$ e $t\equiv t\ (mod\ B+C)$ per la validità del Teorema Cinese dei Resti, tale sistema ammette soluzione per cui la tesi è dimostrata.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1\ (mod\ A_1)\\ &\vdots\\ x &\equiv x_n\ (mod\ A_n) \end{aligned}$$

dove $x_i\equiv x_j\ (mod\ A_i{+}A_j)$, al variare degli indici i e j fra 1 e n. Dimostriamo che tale sistema ammette soluzione per induzione sul numero n di equazioni. Se $n=2$, il sistema ha soluzione a prescindere dalla validità dell'ipotesi, infatti, se $x_1-x_2=a_1+a_2$ con $a_i\in A_i$, ponendo $x=x_1-a_1=x_2+a_2$, si ottiene che x è una soluzione, in quanto $x{-}x_1=-a_1\in A_1$ e $x{-}x_2=a_2\in A_2$. Supponiamo ora che il sistema costituito dalle prime $n-1$ congruenze sia risolubile, cioè, che esista un elemento $y\in R$ tale che $y\equiv x_i\ (mod\ A_i)$, per ogni indice i compreso fra 1 e $n-1$. Allora il sistema complessivo di n

equazioni ha soluzione se e soltanto se è risolubile il sistema:

$$\begin{aligned} x &\equiv y \; (mod \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \\ x &\equiv x_n \; (mod \; A_n). \end{aligned}$$

Basterà quindi verificare che $y \equiv x_n \; (mod \; [\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i] + A_n)$. Per ipotesi segue che

$$[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i] + A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i + A_n)$$

e poiché:

$$y - x_n = (y - x_i) + (xi - x_n) \in A_i + (A_i + A_n) = A_i + A_n,$$

$y \equiv x_n \; (mod \; \bigcap_{i=1}^{n} A_i + A_n)$ da cui discende la tesi.

Proposizione 1.6 *Sia R un dominio e siano A, B e C dei suoi ideali: allora*

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

se e soltanto se l'anello quoziente R_M è un anello di valutazione per ogni ideale M massimale in R.

Dimostrazione:

$(\Leftarrow)$

Poiché per ogni ideale I di R, vale l'uguaglianza $I = \bigcap_{M \in Specm(R)} IR_M$, segue che, ogni ideale di R è unicamente determinato dalle sue componenti locali rispetto agli anelli quozienti R_M, al variare di M nell'insieme degli ideali massimali di R. Basta mostrare, quindi, che la legge distributiva rispetto alle operazioni di somma ed intersezione degli ideali sia verificata negli anelli quozienti R_M, ma questo è banalmente vero, perché, gli anelli R_M sono anelli di valutazione, e come tali , hanno i loro ideali totalmente ordinati per inclusione.

($\Rightarrow$)

Innanzitutto osserviamo che la legge distributiva rispetto alla somma ed all'intersezione degli ideali di R si trasporta agli anelli quozienti di R. Sia S un sistema moltiplicativo e sia R_S il relativo anello quoziente di R. Consideriamo A', B' e C', ideali qualsiasi di R_S e le loro contrazioni A, B e C. Dobbiamo dimostrare che $A' \cap (B' + C') \subseteq A' \cap B' + A' \cap C'$, visto che l'inclusione inversa è valida per ogni anello commutativo. Ogni elemento $x \in A' \cap (B' + C')$ ammette le seguenti rappresentazioni: $x = a/s_1$, con $a \in A$ e $s_1 \in S$ e $x = b/s_2 + c/s_3$, con $b \in B$, $c \in C$ e s_2 e $s_3 \in S$. Poiché $s_1 s_2 s_3 x \in A \cap (B + C)$, $s_1 s_2 s_3 x = u + v$ con $u \in A \cap B$ e $v \in A \cap C$ ed essendo $s_1 s_2 s_3$ un elemento invertibile di R_S, discende l'inclusione cercata. Basta, quindi, verificare che la validità della legge distributiva degli ideali rispetto alle operazioni di somma ed intersezione in un anello locale, comporta che l'insieme degli ideali sia totalmente ordinato per inclusione. Sia pertanto R un anello locale, mostriamo, allora, che per ogni coppia di elementi a e $b \in R$ o $a \mid b$ o $b \mid a$. Infatti, poiché :

$$(a) = (a) \cap [(b) + (a - b)] = (a) \cap (b) + (a) \cap (a) \cap (a - b),$$

a può essere espresso come $a = t + (a - b)c$ con $t \in (a) \cap (b)$ e $bc \in (a)$. Se c è invertibile, b è un multiplo di bc e come tale appartiene all'ideale (a). Mentre se c non è invertibile, sicuramente lo è $1 - c$, perché, altrimenti, gli elementi non invertibili di R, non costituirebbero l'unico ideale massimale proprio di R. pertanto a è un multiplo di $a(1 - c) = t - bc$ che è un elemento in (b). Da ciò segue quindi che o $a \mid b$ o $b \mid a$.

Teorema 1.7 *Sia R un dominio, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *R_P è un anello di valutazione per ogni ideale primo P di R.*

2. *R_M è un anello di valutazione per ogni ideale massimale M di R.*

3. *Ogni ideale finitamente generato è invertibile.*

4. *Ogni ideale di R generato da due elementi è invertibile.*

Dimostrazione:
Le implicazioni (1) $\Rightarrow$ (2) e (3) $\Rightarrow$ (4) sono immediate.
(2) $\Rightarrow$ (3)
Sia I un ideale finitamente generato non nullo di R, allora IR_M è un ideale finitamente generato per ogni ideale $M \in Spec(R)$. Poiché R_M è un anello di valutazione, IR_M è in particolare principale e quindi I è invertibile.
(4) $\Rightarrow$ (1)
Dimostreremo che R_P è un anello di valutazione verificando che ogni sua coppia di ideali principali è legata da una relazione d'inclusione. Siano x e y due elementi di R_P quindi esistono x' e $y' \in R$ e s_1 e $s_2 \in R \setminus P$ tali che $x = x'/s_1$ e $y = y'/s_2$ per cui abbiamo anche che $xR_P = x'R_P$ e $yR_P = y'R_P$. Consideriamo quindi l'ideale (x', y'), esso risulta invertibile per ipotesi, per cui anche $(x', y')R_P$ è invertibile per ogni P ideale primo di R. Ma allora o $(x', y')R_P = x'R_P$ o $(x', y')R_P = R_P$ da cui possiamo concludere o che $yR_P \subseteq xR_P$ o che $xR_P \subseteq yR_P$.

Definizione:
Sia R un dominio, R si definisce un *dominio di Prüfer* se, per ogni ideale massimale M di R, l'anello quoziente R_M è un anello di valutazione.

Così definiti, i domini di Prüfer, possono essere caratterizzati come i domini in cui vale il Teorema cinese dei resti; seguono poi altre proprietà aritmetiche degli ideali:

Teorema 1.8 *Sia R un dominio e siano A, B e C degli ideali di R, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *R è un dominio di Prüfer;*

2. *In R vale il Teorema cinese dei resti;*

3. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (B \cap C)$*;*

4. $A(B \cap C) = AB \cap AC$*;*

5. $(A + B)(A \cap B) = AB$*;*

6. *Se C è un ideale finitamente generato:* $(A+B) : C = (A : C)+(B : C)$

7. *Se A e B sono ideali finitamente generati:* $C : (A\cap B) = C : A+C : B$.

Dimostrazione: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)
La tesi discende dall'applicazione del Teorema (**??**) e della Proposizione (**??**).
(1) $\Rightarrow$ (4), (5), (6), (7)
La conclusione discende osservando che le operazioni di somma, intersezione, divisione e prodotto di ideali, si preservano sotto estensione ad ideali di un anello quoziente (cfr. [G,Th. 4.3, 4.4]), e che la validità delle uguaglianze (4) e (5) è sempre verificata negli anelli R_M, perché questi sono per ipotesi anelli di valutazione ed hanno, quindi, gli ideali totalmente ordinati rispetto all'inclusione.
(4) $\Rightarrow$ (5)
Applicando l'uguaglianza (4) si ottiene:

$$(A + B)(A \cap B) = (A + B)A \cap (A + B)B \supseteq AB$$

e poiché l'altra inclusione è valida per ogni anello commutativo, segue la conclusione.

(5) $\Rightarrow$ (1)
Per quanto dimostrato nel Teorema (**??**), basta verificare che ogni ideale non nullo di R, finitamente generato è invertibile. Procediamo per induzione sul numero n di generatori di un ideale. Se $n = 1$ gli ideali considerati saranno principali e quindi invertibili. Supponiamo dimostrato che gli ideali di R generati da $n-1$ elementi siano invertibili; consideriamo, quindi C, un ideale di R generato da n elementi, $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Poniamo $A = (c_1, \ldots, c_{n-1})$ e $B = (c_n)$, A e B sono invertibili e quindi lo è anche AB, perché il prodotto di ideali è invertibile se e soltanto se lo sono tutti i suoi fattori (cfr. [G,pag 69]) e poichè $C(A \cap B) = AB$ anche C è invertibile perché compare come fattore moltiplicativo di un ideale invertibile.
(6) $\Rightarrow$ (1)
Per il Teorema (**??**), basta verificare che ogni ideale di R generato da due elementi sia invertibile. Siano a, $b \in R$, applicando l'uguaglianza (6) per gli ideali $A = (a)$, $B = (b)$ e $C = (a, b)$ otteniamo:

$$R = (1) = (a) : (b) + (b) : (a),$$

esistono, quindi due elementi, $x \in (a) : (b)$ e $y \in (b) : (a)$, tali che $1 = x + y$; abbiamo allora che $ab \mid b(bx)$ e $ab \mid a(ay)$ e che $ab = ab(x+y) = a(bx)+b(ay)$, risulta quindi che $(ab) = (a, b)(bx, ay)$, da cui segue che (a, b) è invertibile.
(7) $\Rightarrow$ (1)
Supponendo vero che $C : (A \cap B) = C : A + C : B$, per A, B, C ideali qualsiasi di R di cui A e B finitamente generati, otteniamo che, dati due elementi a, $b \in R$:

$$R = (1) = [(a) \cap (b)] : (a) + [(a) \cap (b)] : (b);$$

segue allora che $a = bz + ay$ con $z \in R$ e $y \in [(a) \cap (b)] : (b)$. Se M è un ideale massimale di R, indicando con $(a)^e$ e $(b)^e$ le estensioni degli ideali (a)

e (b) ai corrispondenti ideali dell'anello quoziente R_M, risulta che se $y \notin M$, b è multiplo di by e come tale è contenuto in $(a) \cap (b)$ da cui otteniamo che $(b)^e \subseteq (a)^e$, mentre, se $y \in M$, allora $1 - y$ è invertibile, pertanto segue che, $(a)^e \subseteq (b)^e$, per cui gli ideali principali di R_M risultano ordinati per inclusione e perciò, l'anello R_M è di valutazione per ogni $M \in Specm(R)$.

Descriviamo, infine le proprietà degli ideali primi e primari di un dominio di Prüfer.

Lemma 1.9 *Sia R un anello unitario, denotiamo con e_λ e c_λ, rispettivamente l'estensione e la contrazione degli ideali di R all'anello quoziente R_{M_λ}, dove M_λ è un qualsiasi ideale massimale di R. Se I è un ideale di R con ideale radicale primo, tale che I^{e_λ} sia un ideale P^{e_λ}-primario, allora I è un ideale P-primario.*

Per la dimostrazione di questo risultato si rimanda a [G,Th. 23.1]

Teorema 1.10 *Sia P un ideale primo proprio di un dominio di Prüfer R.*

1. *Se Q è un ideale P-primario e $x \in R \setminus P$, allora $Q = Q[Q + (x)]$. Se Q è finitamente generato, allora P è un ideale massimale in R*

2. *Se $\mathcal{S} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è l'insieme degli ideali P-primari di R, $\mathcal{S}$ è chiuso sotto la moltiplicazione. In particolare, $\{P^k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{S}$. Se $P \neq P^2$, allora $\mathcal{S} = \{P^k\}_{k \geq 1}$.*

3. *Se P possiede almeno un ideale P-primario distinto da se stesso e se $Q \neq P$ è un ideale P-primario,allora $\bigcap_{n \geq 1} Q^n = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$.*

4. *$P_0 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ è un ideale primo di R e non ci sono altri ideali primi compresi propriamente fra P_0 e P.*

Dimostrazione:

1. Perché $Q = Q^2 + Q(x)$, basta verificare che $QR_M = (Q^2 + Q(x))R_M$ per ogni ideale M massimale in R. Se $Q \nsubseteq M$ allora $QR_M = Q^2R_M = R_M$, per cui l'uguaglianza è verificata. Se invece $Q \subseteq M$, QR_M è PR_M-primario ed essendo R_M un anello di valutazione, vale la seguente uguaglianza: $QR_M = Q(x)R_M$ (cfr. [G, Th. 17.3]), da cui discende la tesi.

2. Se Q_1 e $Q_2 \in \mathcal{S}$ mostriamo che $Q_1Q_2 \in \mathcal{S}$: Q_1Q_2 ha come ideale radicale P, inoltre $Q_1Q_2R_M$ è PR_M-primario per ogni ideale massimale M, come prodotto di due ideali PR_M-primari (cfr.[G, Th. 17.3]). Dal Lemma (**??**) segue quindi che anche Q_1Q_2 è P-primario. Se $P \neq P^2$ allora $PR_P \neq P^2R_P$ da cui possiamo concludere, poiché R_P un anello di valutazione essendo P^2 P-primario, $P^2 = P^2R_P \cap R$. per il Teorema (**??**), che $\{P^kR_P\}$ sia l'insieme degli ideali primari di R_P (cfr.[G,Th. 17.3]). Per la corrispondenza fra ideali primari di un anello sotto estensione ad un anello quoziente, otteniamo, quindi che l'insieme degli ideali P-primari di R è uguale all'insieme $\{P^kR_P \cap R\}_{k\geq 1} = \{P^k\}_{k\geq 1}$.

3. La conclusione segue dall'uguaglianza $\bigcap_{n\geq 1} Q^nR_P = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda R_P$, valida in generale per gli anelli di valutazione (cfr.[G,Th. 17.3]) e dall'uguaglianza $Q_\lambda = Q_\lambda R_P \cap R$ per ogni ideale P-primario.

4. Sia P un ideale primo di un anello di valutazione, l'intersezione degli ideali P-primari è un ideale primo tale che non esiste nessun altro ideale primo propriamente compreso fra questo e P (cfr.[G,Th. 17.3]). Applicando questa considerazione all'anello R_P ed osservando che $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda R_P) \cap R = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$, otteniamo la conclusione.

2 Teoremi di rappresentazione per particolari sovranelli di un dominio di Prüfer

Sia R un dominio e K il suo campo dei quozienti. Un sovranello di R è un anello T tale che $R \subset T \subset K$.
Se R è un dominio di Prüfer i suoi sovranelli godono della proprietà di essere rappresentabili come intersezione di localizzazioni. Ricordiamo infatti il seguente risultato:

Teorema 2.1 *Sia T un sovranello di un dominio di Prüfer R e sia* $\mathcal{C} = \{P \in Spec(R) \mid PT \neq T\}$*, allora:*

1. *Se M è un ideale primo proprio di T e se $P = M \cap R$ allora, $R_P = T_M$ e $M = PR_P \cap T$.*

2. *Se $P \in Spec(R)$, allora $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow R_P \supseteq T$. Per cui risulta:* $T = (\bigcap_{P \in C} R_P)$.

3. *Se A' è un ideale di T e se $A = A' \cap R$, allora $A' = AT$.*

4. *$\{PT\}_{P \in \mathcal{C}}$ è l'insieme degli ideali primi propri di T.*

Dimostrazione:

1. Sia $R \setminus P$, $T_M \supseteq T_S \supseteq R_P$. Poiché R_P è un anello di valutazione T_M è un anello di valutazione che è un anello quoziente di R_P. Quindi T_M è un anello quoziente di R esprimibile nel seguent modo $T_M = R_Q$ con $Q = MT_M \cap R = MT_M \cap T \cap R = M \cap R = P$. Perciò $T_M = R_P$ e $PR_P \cap T$.

2. Se $R_P \supseteq T$, allora $PT \subseteq PR_P \subseteq R_P$ e quindi $PT \subseteq T$. Se invece $PT \subseteq T$, esiste un ideale massimale $M \in T$ che contiene PT. Pertanto $P \subseteq M \cap R$ e così $R_P \supseteq R_{M\cap R}$. Ma da quanto dimostrato in precedenza segue che $R_{M\cap R} \supseteq T_M \supseteq T$. Possiamo quindi concludere che $T = \bigcap_{P\in\mathcal{C}} R_P$. Infatti $T \subseteq R_P$ per ogni $P \in \mathcal{C}$, mentre $T = \bigcap_{M\in Specm(T)} T_M$, ma ogni localizzazione che interviene in questa intersezione, è uguale a R_P con $P \in \mathcal{C}$.

3. Per dimostrare la tesi basta verificare che $A' \subseteq AT$. Sia $\{M_i\}_{i\in I}$ l'insieme degli ideali massimali di T, allora $A' = \bigcap_{i\in I} A'T_{M_i}$. Se $P_i = M_i \cap R$, $T_{M_i} = R_{P_i}$ perciò $A'T_{M_i} = A'R_{P_i}$. Se $x \in A'R_{P_i}$ allora $x = a'/v$ con $a' \in A'$ e $v \in D\backslash P_i$. Inoltre $A' \subseteq T \subseteq R_{P_i}$, quindi $a' = a/u$ con $a \in R$ e $u \in R \setminus P_i$. Perciò $x = a/uv \in AR_{P_i} = ATR_{P_i} = ATT_{M_i}$, da cui segue che $AT_{M_i} = ATT_{M_i}$ e che $A' = A'T$.

4. Da quanto già mostrato, ogni ideale primo proprio di T è della forma PT con $P \in \mathcal{C}$; se invece $P \in \mathcal{C}$, $T \subseteq R_P$ e quindi $PR_P \cap T$ è un ideale primo proprio di T, da cui segue che $PR_P \cap T = (PR_P \cap T \cap R)T = PT$.

Tale intersersezione è determinabile, a patto che se ne individui esplicitamente il corrispondente insieme di primi descritto nel teorema.
In questo capitolo ci proporremo allora di rappresentare in tal modo alcuni sovranelli particolarmente importanti di R.

Sia R un dominio e sia I un suo ideale non nullo.

Si definiscono:

$$\begin{aligned}(I : I) &:= \{x \in K \mid xI \subseteq I\}\\ (R : I) &:= \{x \in K \mid xI \subseteq R\} = I^{-1}\end{aligned}$$

$$T(I) \;:=\; \bigcup_{n\geq 1}(R:I^n)$$

$(R:I)$ è detto il *duale* (o inverso) dell'ideale I e $T(I)$ è detto *trasformato di Nagata di* I *in* R. Notiamo innanzitutto che, a differenza di $(I:I)$ e $T(I)$, I^{-1} non è sempre un anello:

Lemma 2.2 *Sia I un ideale non nullo di un dominio R:*

1. *I^{-1} è un anello $\Leftrightarrow I^{-1}R_M$ è un anello $\forall\, M \in Specm(R)$.*

2. *Se $(IR_M)^{-1}$ è un anello $\forall\, M \in Specm(R) \Rightarrow I^{-1}$ è un anello.*

3. *Se I è finitamente generato allora:*
   I^{-1} è un anello $\Leftrightarrow (IR_M)^{-1}$ è un anello $\forall\, M \in Specm(R)$.

Dimostrazione:

1. $I^{-1} = \bigcap_{M\in Spec(R)} I^{-1}R_M$, pertanto, se $I^{-1}R_M$ è un anello per ogni $M \in Specm(R)$, anche I^{-1} è un anello. Mentre se I^{-1} è un anello, $I^{-1}R_M$ è una localizzazione di I^{-1} e quindi un anello.

2. Poiché $\bigcap_{M\in Specm(R)}(IR_M)^{-1} = \bigcap_{M\in Specm(R)}(R_M : IR_M) = (R:I) = I^{-1}$ segue che I^{-1} è un anello.

3. La tesi segue osservando che se I è un ideale finitamente generato $I^{-1}R_M = (IR_M)^{-1}$.

Proposizione 2.3 *Sia I un ideale proprio invertibile di un dominio R,*
I^{-1} non è un sottoanello di K

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo che lo sia, poiché I è finitamente generato $(IR_M)^{-1}$

è un anello per ogni $M \in Specm(R)$. Sia allora $N \in Specm(R)$ tale che $I \subseteq N$: in tal caso, esiste $a \in I$ per cui $IR_N = aR_N$, perciò $1/a^2 \notin IR_N$, sebbene $1/a \in IR_N$.

Non si hanno in generale caratterizzazioni dei casi in cui I^{-1} è un sottoanello di K, ma se R è un dominio di Prüfer, ne esiste una in termini di rappresentabilità di I^{-1} come sovranello di R.

Indichiamo:

$$\mathbf{M}(R, I) = \{M \in Specm(R) \mid I \subset M\}$$

$$\mathbf{M}'(R, I) = \{M \in Specm(R) \mid I \nsubseteq M\}$$

Teorema 2.4 *Sia R un dominio di Prüfer ed I un suo ideale non nullo. Sia $\{P_\alpha\}$ l'insieme dei primi minimali su I. Allora:*

1. $I^{-1} \subseteq (\bigcap R_{P_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$ *con* $M_\beta \in M(R, I)$.
2. $I^{-1} = (\bigcap R_{P_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta}) \Leftrightarrow I^{-1}$ *è un sottoanello di* K.

Dimostrazione:

1. Sia $u \in (\bigcap R_{P_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$ e $a \in I$. Bisogna verificare che $au \in R$ cioè equivalentemente che $ua \in R_M$ per ogni $M \in Specm(R)$.
   Poiché $u \in R_{M_\beta}$ per ogni $M_\beta \in \mathbf{M}(R, I)$, allora $ua \in R_{M_\beta}$ per ogni M_β.
   Resta da mostrare quindi che $ua \in (\bigcap R_{M_\alpha})$per ogni $M_\alpha \in \mathbf{M}(R, I)$.
   Per ogni P_i ideale primo contenente I, esiste N_i massimale tale che $P_i \subseteq N_i$. Sia $u = r/s$ con $s \in R \setminus P_i$; allora $a/s \in R_{N_i}$ Infatti se per assurdo non vi appartenesse $s/a \in R_{N_i}$ quindi $s = sa/a \in P_\alpha R_{N_i} \cap R = P_\alpha$.

2. In generale $I^{-1} \subseteq \bigcap(R_{M_\beta})$ con $M_\beta \in \mathbf{M}(R, I)$.

   Infatti per ogni M_β sia $a_\beta \in I \setminus M_\beta$ e sia $u \in I^{-1}$; allora, $ua_\beta \in R$ quindi $u \in R_{M_\beta}$. Resta da mostrare che $I^{-1} \subsetneq (R_{P\alpha})$ per ogni P_α minimale su I. Dal Teorema (**??**) segue che $I^{-1} \subseteq R_P \Leftrightarrow PI^{-1} \neq I^{-1}$.

   Supponiamo per assurdo che esista un ideale primo minimale P_α per cui $P_\alpha I^{-1} = I^{-1}$.

   Osserviamo innanzitutto che $(P_\alpha I^{-1})_{R \setminus P_\alpha} \subset R_{P_\alpha}$.

   Sia $x \in (P_\alpha I^{-1})_{R\setminus P_\alpha}$ allora esiste $s \in R \setminus P_\alpha$ per cui $xs \in P_\alpha I^{-1}$.

   Sia quindi $J = IR_{P_\alpha} \cap R$: si ha che $\sqrt{J} = P_\alpha$. Poiché I^{-1} è un anello, esiste un intero n per cui $(xs)^n \in JI^{-1}$ e $x^n \in (JI^{-1})_{R\setminus P_\alpha}$. Allora $(JI^{-1})_{R\setminus P_\alpha} = (JR_{P\alpha})(I^{-1})_{R\setminus P_\alpha} \subsetneq (IR_{P_\alpha})(R_{P_\alpha} : IR_{P_\alpha}) \subsetneq R_{P_\alpha}$. Inoltre $x^n \in R_{P_\alpha} \Leftrightarrow x \in R_{P_\alpha}$ perché R_{P_α} come dominio di valutazione è integralmente chiuso. Ma allora $I^{-1} = P_\alpha I^{-1} \subsetneq (P_\alpha I^{-1})_{R\setminus P_\alpha} \subsetneq R_{P_\alpha}$ che è assurdo.

   Pertanto $P_\alpha I^{-1} \neq I^{-1}$ per ogni α, da cui la conclusione.

Consideriamo ora $(I : I)$.
Sia inizialmente I un ideale non nullo di un dominio di valutazione.
Indichiamo con:

$$\mathbf{Z}(R, I) := \{x \in R \mid x + I \textit{ è un divisore dello zero di } R/I\}$$

Proposizione 2.5 *Sia I un ideale non nullo di un dominio di valutazione R. Allora $(I : I) = R_P$ con $P = \mathbf{Z}(R, I)$*

Dimostrazione:
$(\subseteq)$
Sia $z \in (I : I)$. Poiché $R \subseteq (I : I)$, posso supporre $z \notin R$ e quindi $1/z = x \in R$. Si verifica facilmente che $x \notin P$.

Infatti se per assurdo vi appartenesse esisterebbe $y \in R \setminus I$ tale che $yx \in I$, quindi $y \in zI \subset I$. Pertanto $z = 1/x \in R_P$.

$(\supseteq)$

Sia $z \in R_P$. Consideriamo $z \notin R$ e quindi $1/z = x \in R$. $x \notin P$ allora $I \subseteq xR$ pertanto esiste un ideale J di R tale che $I = xJ$ quindi:

$J \subseteq I$ per cui $I \subseteq xI$ e $z \in (I : I)$

Sia ora R un dominio di Prüfer e I un suo ideale non zero.

Per ogni $P \in Spec(R)$ tale che $I \subseteq P$ sia $G(P)$, l'unico ideale primo di R tale che: $G(P)R_P = \mathbf{Z}(R_P, IR_P)$.

Denotiamo con $\mathcal{Z}(R, I)$ l'insieme $\{P \in Spec(R) \mid P \subseteq \mathbf{Z}(R, I)\}$ e con $\mathcal{MZ}(R, I)$ l'insieme degli ideali massimali di $\mathcal{Z}(R, I)$

Osservazione 2.6 *Sia $P \in Spec(R)$ tale che $P \supseteq I$, allora: $G(P) \in \mathcal{Z}(R, I)$.*

Infatti sia $u \in G(P)$: $u \in G(P)R_P$, cioè esiste $r/s \in R_P \setminus IR_P$ con $r \in R \setminus I$ e $s \in R \setminus P$ per cui si ha $ru/s = i/t$ con $i \in I$ e $t \in R \setminus P$. Allora $rut = is$ e siccome $rt \notin I$, $u \in \mathcal{Z}(R, I)$.

Teorema 2.7 *Sia R un dominio di Prüfer e sia I un suo ideale non nullo. Allora*

$$(I : I) = (\bigcap R_{M_\alpha}) \cap (\bigcap R_{G(M_\beta)})$$

con $M_\alpha \in \mathbf{M}(R, I)$ e $M_\beta \in \mathbf{M}'(R, I)$.

Dimostrazione:

Mostriamo innanzitutto che: $(I : I) = \bigcap_{M \in Specm(R)} (IR_M : IR_M)$.

Infatti se $x \in (I : I)$, $xI \subseteq I$ e quindi $xIR_M \subseteq IR_M$ per ogni ideale M massimale in R, perché l'estensione degli ideali di un anello ad un anello quoziente rispetta le inclusioni (cfr. [G, Th.4.3]).

Viceversa, se $x \in \bigcap_M (IR_M : IR_M)$, $xIR_M \subseteq IR_M$ per ogni $M \in Specm(R)$, quindi $\bigcap_M xIR_M \subseteq \bigcap_M IR_M$, da cui discende che $xI \subseteq I$.
Da questa uguaglianza segue che se $M \in \mathbf{M}(R, I)$, allora $IR_M = R_M$, mentre, se $M \in \mathbf{M}'(R, I)$, $(IR_M : IR_M) = (R_M)_{G(M)R_M} = R_{G(M)}$ come volevamo dimostrare.

Il risultato precedente è esprimibile in termini più generali.
A questo proposito consideriamo i seguenti sistemi moltiplicativi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(R, I) &:= \{a \in R \mid a + I \text{ è invertibile in } R/I\ \} \\
\mathcal{N}(R, I) &:= \{a \in R \mid a + I \text{ è un nonzero divisore in } R/I\ \} \\
\mathcal{A}(R, I) &:= \{a \in R \mid a \in \mathcal{N}(T, IT)\ \forall\ T \supset R \text{ per cui } IT \neq T\}
\end{aligned}$$

Se R è un dominio qualsiasi si ha:

$$\mathcal{U}(R, I) \subseteq \mathcal{A}(R, I) \subseteq \mathcal{N}(R, I)$$

Se invece R è un dominio di Prüfer, la seconda inclusione è un'uguaglianza, infatti, ricordiamo innanzitutto che (cfr. [G, Prop. 4.8, Th.4.10]):

Lemma 2.8 *Sia R un anello unitario: per ogni I suo ideale non nullo e per ogni S sistema moltiplicativo $IR_S = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(S)} IR_M$ dove con $\mathcal{M}(S)$ si denota l'insieme degli ideali che sono massimali rispetto alla proprietà di non intersecare S*

si ha:

Lemma 2.9 *Sia R dominio di Prüfer*

1. *Sia* $\mathcal{U} = \mathcal{U}(R, I)$ *e* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, I)$, *allora:* $IR_{\mathcal{U}} = IR_{\mathcal{A}}$

2. $\mathcal{A}(R, I) = \mathcal{N}(R, I)$ *e quindi* $IR_{\mathcal{U}}$=$IR_{\mathcal{A}}$=$IR_{\mathcal{N}}$.

Dimostrazione:

1. Poiché $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ allora $IR_{\mathcal{U}} \subseteq IR_{\mathcal{A}}$.

   Dobbiamo mostrare quindi l'inclusione inversa.

   Sia $x \in IR_{\mathcal{A}}$ allora $x = i/a$ con $i \in I$ e $a \in \mathcal{A}(R, I)$. Basta verificare, dal Lemma (**??**), che $x \in IR_M$, per ogni $M \in \mathbf{M}(R, I)$.
   Supponiamo per assurdo che esista $N \in \mathbf{M}(R, I)$ per cui $x \notin IR_N$, allora $x \notin R_N$ implica che $1/x \in R_N$. Pertanto $a/i = r/n$ con $r \in R$ e $n \in R \setminus N$. Quindi $an = ri \in I$ e dalle proprietà di a segue che $n \in I$.

2. Poiché $\mathcal{A}(R, I) \subset \mathcal{N}(R, I)$, resta da verificare l'inclusione inversa.
   Sia $x \in \mathcal{N}(R, I)$, supponiamo per assurdo che $x \notin \mathcal{A}(R, I)$ allora esiste $T \supseteq R$ tale che $IT \neq I$ e per cui $x \in \mathbf{Z}(T, IT)$. Poichè $IT \neq T$, $T = \bigcap R_{P_i}$ con $I \subset P_i$ per ogni i, quindi esiste $y = r/q$ con $r \in R \setminus I$ e $q \in R \setminus \bigcup_i P_i$ tale che $xr/q = i/n$ con $i \in I$ e $n \in R \setminus \bigcup_i P_i$, da cui segue che $x/q = i/rn \in T$ e che $rn \in R \setminus \bigcup_i P_i$. Ma allora $xrn = iq \in I$, con $rn \in R \setminus \bigcup_i P_i \subset R \setminus I$ pertanto $x \in \mathbf{Z}(R, I)$.

Teorema 2.10 *Sia R dominio di Prüfer e S un sistema moltiplicativo tale che* $\mathcal{U} \subseteq S \subseteq \mathcal{N}$, *allora*

1. $$(I : I) = (\bigcap R_{G(M)}) \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$$
   con $M \in \mathcal{M}(S)$ *e* $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R, I)$.

2. $$(I : I) = (\bigcap R_{G(M)}) \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$$

con $M \in \mathcal{MZ}(R,I)$ *e* $M_\beta \in \mathbf{M}'(R,I)$

Dimostrazione:
Dal lemma precedente $IR_{\mathcal{U}} = IR_S = IR_{\mathcal{N}}$, perciò dal risultato (**??**) si ha:

$$\begin{aligned}
(I:I) &= \left(\bigcap_{M_\alpha \in \mathbf{M}(R,I)} R_{G(M_\alpha)}\right) \cap \left(\bigcap_{M_\beta \in \mathbf{M}'(R,I)} R_{M_\beta}\right) \\
&= \left(\bigcap_{M_\alpha \in \mathbf{M}(R,I)} (IR_{M_\alpha} : IR_{M_\alpha})\right) \cap \left(\bigcap_{M_\beta \in \mathbf{M}'(R,I)} R_{M_\beta}\right) \\
&= (IR_{\mathcal{U}} : IR_{\mathcal{U}}) \cap \left(\bigcap_{M_\beta \in \mathbf{M}'(R,I)} R_{M_\beta}\right) \\
&= (IR_S : IR_S) \cap \left(\bigcap_{M_\beta \in M'(R,I)} R_{M_\beta}\right) \\
&= \left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}(S)} R_{G(M)}\right) \cap \left(\bigcap_{M_\beta \in \mathbf{M}'(R,I)} R_{M_\beta}\right)
\end{aligned}$$

Applicando poi la (1) per $S = \mathcal{N}$ ricordando che $\mathcal{M}(\mathcal{N}) = \mathcal{MZ}(R,I)$ segue la (2).

Il Teorema (**??**) non descrive tuttavia l'insieme dei primi che caratterizza la rappresentazione di $(I:I)$.

Sia $\mathcal{G}(R,I) = \{P \in Spec(R) \mid P = G(P)\}$

Teorema 2.11 *Sia R dominio di Prüfer e S un sistema moltiplicativo tale che $\mathcal{U} \subseteq S \subseteq \mathcal{N}$. Allora*

1. $\mathcal{G}(R,I) = \{P \in Spec(R) \mid P \subseteq G(M) \quad \exists\, M \in \mathbf{M}(S)\}$
2. $(I:I) = (\bigcap R_P) \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$ *con* $P \in \mathcal{G}(R,I)$ *e* $\{M_\alpha\} \in \mathbf{M}'(R,I)$.

Dimostrazione:

1. Sia $P \in \mathcal{G}(R, I)$ allora per l'osservazione (**??**) $P \in \mathcal{Z}(R, I)$. Poiché $S \subseteq \mathcal{N}$ esiste $M \in \mathcal{M}(S)$ tale che $P \subseteq M$. Osserviamo che $P \subseteq Q \Rightarrow G(P) \subseteq G(Q)$, infatti $\mathbf{Z}(R_P, IR_P) \cap R_Q \subseteq \mathbf{Z}(R_Q, IR_Q)$. Pertanto $P \subseteq G(M)$.

2. L'inclusione $(\supseteq)$ è ovvia.

   Per l'inclusione inversa basta osservare che per ogni $P \in \mathcal{G}(R, I)$ esiste $M \in \mathcal{M}(S)$ tale che $P \subseteq G(M)$ per cui $R_{G(M)} \subseteq R_P$. La conclusione segue dal Teorema (**??**)

Sotto ipotesi aggiuntive sul dominio di Prüfer R, ci proponiamo di dimostrare la seguente rappresentazione:

$$(I : I) = (\bigcap R_M) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$$

con $M_\beta \in \mathbf{M}'(R, I)$ e $M \in \mathcal{MZ}(R, I)$.

oppure equivalentemente

$$(I : I) = R_{\mathcal{N}} \cap (\bigcap R_{M_\beta}).$$

In generale si ha:

Teorema 2.12 *Sia R dominio di Prüfer, allora*

$$R_{\mathcal{N}} \cap (\bigcap R_{M_\beta}) \subseteq (I : I).$$

Dimostrazione:

Sia $u \in R_{\mathcal{N}} \cap (R_{M_\beta})$ e $a \in I$; devo verificare che $ua \in I$ e poiché $ua \in \bigcap R_{M_\beta}$ per ogni $M_\beta \in \mathbf{M}'(R, I)$, basta che ua appartenga a IR_{N_γ} per ogni $N_\gamma \in \mathbf{M}(R, I)$. Si ha $u = r/s$ con $r \in R$ e $s \in \mathcal{N}$. Fissiamo γ e consideriamo N_γ. Mostriamo innanzitutto che $a/s \in R_{N_\gamma}$. Se così non fosse $s/a = t/n \in R_{N_\gamma}$ allora $sn = at \in I$ e poiché $n \in R \setminus N_\gamma$ $s \in \mathbf{Z}(R, I)$. Pertanto $ua = ra/s \in R_{N_\gamma}$. Basta allora verificare che è in IR_{N_γ}; se così non fosse $ua = ra/s = c/b$ con $c \in R \setminus I$ e $b \in R \setminus R_{N_\gamma}$ quindi risulterebbe $rab = cs \in I$ e quindi $s \in \mathbf{Z}(R, I)$ che sarebbe un assurdo.

Definizione:
R è un *QR-dominio* se ogni suo sovranello è un anello quoziente di R.

Un QR-dominio è un dominio di Prüfer perché rientra nella caratterizzazione dei domini di Prüfer come domini i cui sovranelli sono intersezione di anelli quozienti, (cfr. [G, Th. 26.2]).

Forniremo ora una caratterizzazione dei domini di Prüfer che sono QR-domini, enunciando preliminarmente due risultati ausiliari per la cui dimostrazione si rimanda a: ([G,Lemma 27.1, Prop 26.7]).

Lemma 2.13 *Sia R un dominio unitario e sia J un suo sovranello: se $R[x]$ è un anello quoziente di R, per ogni $x \in J$, allora J è un anello quoziente di R.*

Lemma 2.14 *Sia R un dominio e sia B_x l'ideale $(x^{-1}) \cap R$. Allora $T(B_x) = R[x]$.*

Proposizione 2.15 *In un dominio di Prüfer R, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *R è un QR-dominio.*
2. *Il radicale di ogni ideale finitamente generato è il radicale di un ideale principale.*

Dimostrazione:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sia A un ideale finitamente generato di R. Consideriamo $T(A)$ che, come sovranello di R è un anello quoziente di R rispetto ad un sistema moltiplicativo S in R. Poichè $T = AT$, l'intersezione fra A e S è non vuota. Sia $a \in A \cap S$: $a^{-1} \in T$ perciò esiste un intero n per cui $a^{-1}A^n \subseteq R$. Quindi $A^n \subseteq (a) \subseteq A$.

(1) $\Leftarrow$ (2)

Innanzitutto osserviamo che basta verificare che $R[x]$ sia un anello quoziente di R per ogni elemento x nel campo dei quozienti di R perché dal Lemma (**??**), questa è una condizione sufficiente a garantire che ogni sovranello di R sia un anello quoziente.

Consideriamo l'ideale finitamente generato B_x. Per ipotesi esiste un elemento $b \in B_x$ per cui $B_x^n \subseteq (b) \subseteq B_x$. Risulta quindi che $T(B_x) = T((b))$ e poiché, dal Lemma (**??**), $T(B_x) = R[x] = T((b)) = R[1/b]$, dove $R[1/b]$ è un anello quoziente di R, segue la conclusione.

Lemma 2.16 *Sia R un dominio di Prüfer. Allora*

1. *Sia $q \in K \setminus \{0\}$, allora esistono $a, b \in R \setminus \{0\}$ tali che $q = a/b$ e per cui $Rq^{-1} \cap R = R(1-a) + Rb$.*

2. *Sia x elemento non nullo di $(I : I)$ e sia $L = Rx^{-1} \cap R$, allora $I = IL$.*

Dimostrazione:

1. Sia quindi $q \in K \setminus \{0\}$, $q = s/t$ con $s, t \in R$. L'ideale $Rs + Rt$ è invertibile, pertanto esistono $x, y \in (Rs + Rt)^{-1}$ per cui $1 = xs + yt$. Sia allora $a = xs$: si ha che $(1-a)q = ys \in R$. Ponendo $b = tx$ posso riesprimere q come a/b, allora $b = a/q$ e quindi $b \in Rq^{-1} \cap R$. Inoltre

$(1-a)q \in R$ perciò $(1-a) \in Rq^{-1} \cap R$ e quindi risulta $Rq^{-1} \cap R \subseteq Ra + Rb$

Sia invece $x \in Rq^{-1} \cap R$ allora $x = x(1-a) + xbq \in R(1-a) + Rb$ da cui $Rq^{-1} \cap R = R(1-a) + Rb$.

2. Sia $x \in (I : I)$. Dal punto (1) segue l'esistenza di a e $b \in R$ per cui $x = a/b$ e $L = (1-a)R + Rb$. Se $i \in I$ allora:
   $i = (1-a)i + ia = i(1-a) + b(xi) \in LI$.

Teorema 2.17 *Sia I un ideale di un dominio di Prüfer R.*
Se R è un QR-dominio allora:

$$R_{\mathcal{N}} \cap (\bigcap R_{M_\beta}) = (I : I)$$

Dimostrazione:
Basta mostare, per il Teorema (**??**), che $(I : I) \subseteq R_{\mathcal{N}}$.
Sia $x \in R$ elemento non nullo e sia $t = 1/x$. Considero $L = Rt \cap R$. Dal lemma precedente segue che L è generato da due elementi. Poiché R è un QR-dominio esiste $s \in R$ tale che $\sqrt{L} = \sqrt{(s)}$, perciò esiste $m \geq 1$ per cui $L^m \subseteq (s)$. Quindi $I = L^m I \subseteq sI$ e $s \in \mathcal{A}(R, I) = \mathcal{N}(R, I)$. Poiché esiste $n \geq 1$ per cui si ha $s^n \in L$, $s^n x \in R$ e quindi $x \in R_{\mathcal{N}}$.

Passiamo ora alla rappresentazione di $T(I)$.
Enunciamo innanzitutto un risultato generale:

Proposizione 2.18 *Sia R un anello integro ed I un suo ideale.*
Se R' è un sovranello di R tale che $R \subseteq R' \subseteq T(I)$ esiste una corrispondenza biunivoca canonica fra i seguenti insiemi di ideali
$\{P \in Spec(R) \mid I \nsubseteq P\}$ *e* $\{P' \in R' \mid IR' \nsubseteq P'\}$.
Se, poi, P e P' si corrispondono in tale biiezione allora, $R_P = R'_{P'}$.

Dimostrazione:

Consideriamo

$$\begin{aligned} \phi : \{P \in Spec(R) \mid \; I \nsubseteq P\} &\longrightarrow \{P' \in Spec(R') \mid \; IR' \nsubseteq P'\} \\ P &\longmapsto PR_P \cap R' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : \{P' \in Spec(R') \mid \; IR' \nsubseteq P'\} &\longrightarrow \{P \in Spec(R) \mid \; I \nsubseteq P\} \\ Q &\longmapsto Q \cap R \end{aligned}$$

Mostriamo che ϕ e ψ sono l'una inversa dell'altra.

È ben noto che $PR_P \cap R = \psi(\phi(P)) = P$ con $P \in Spec(R)$ tale che $P \nsupseteq I$. Sia $Q \in Spec(R')$ tale che $IR' \nsubseteq Q$. Poniamo $Q \cap R = P$: mostriamo che si ha che $R_P = R'_Q$.

Dal momento che in generale $R_P \subseteq R'_Q$, basta verificare l'inclusione inversa. Poiché $IR' \nsubseteq Q$, allora $P \nsupseteq I$ ed esiste $x \in I \setminus P$. Sia $y = s/t \in R'_Q$ con $s, t \in R'$ ma $t \notin Q$. Poiché $R' \subset T(I)$ esiste un intero n per cui sx^n e $tx^n \in R$. Osservo inoltre che $tx^n \notin P$, pertanto $y = sx^n/tx^n \in R_P$. Essendo $R_P = R'_Q$, come anelli locali essi hanno lo stesso ideale massimale, segue quindi:

$$PR_P = QR'_Q \Rightarrow PR_P \cap R = QR'_Q \cap R = Q$$

da cui la tesi.

Applicando questa proposizione nel caso in cui R sia un dominio di Prüfer e I un suo ideale finitamente generato, segue un primo teorema di rappresentazione.

Teorema 2.19 *Sia I un ideale finitamente generato di un dominio di Prüfer R. Allora $T(I) = \bigcap_{P \not\supseteq I} R_P$*

Dimostrazione:
In un dominio di Prüfer gli ideali finitamente generati sono invertibili per il Teorema (**??**), pertanto $IT(I) = T(I)$. Se $Q \in Spec(R)$ è tale che $Q \supset I$ allora $T(I) = IT(I) \subset QT(I)$, quindi $QT(I) = T(I)$. Dalla proposizione precedente segue quindi che gli ideali primi propri di $T(I)$ sono del tipo $PT(I)$ con $P \not\supseteq I$ e quindi dal Teorema (**??**) $T(I) = \bigcap_{P \not\supseteq I} R_P$.

Il risultato precedente è stato dimostrato in generale per gli ideali finitamente generati di un dominio qualsiasi da Brewer (cfr. [2]). Tuttavia abbiamo preferito riportarlo in una versione ristretta ai domini di Prüfer, perché il ricorso alle proprietà di questi ultimi, ne ha reso più agevole la dimostrazione. Sia ora I un ideale generico non necessariamente finitamente generato.

Premettiamo il caso in cui I sia un ideale non nullo di un dominio di valutazione:

Proposizione 2.20 *Sia R dominio di valutazione ed I un suo ideale non nullo.*

Se $Q := \bigcap_{n \geq 1} I^n$ *allora* $T(I) = R_Q$

Dimostrazione:
Verifichiamo preliminarmente che Q è un ideale primo di R, mostrando che $R \setminus Q$ è un sistema moltiplicativo. Infatti, siano x e y due elementi di Q: esistono due interi n, m, per cui $x \notin I^n$, $y \notin I^m$ e quindi $I^n \subseteq (x)$ e $I^m \subseteq (y)$. Moltiplicando la prima inclusione per l'ideale invertibile (y) si ottiene che $I^n(y) \subseteq (xy)$, mentre dalla seconda inclusione si ottiene che $I^{m+n} \subseteq I^n(y)$, moltiplicando per I^m. Unendo i due risultati segue che $I^{n+m} \subseteq (xy)$ e che

$xy \in R \setminus Q$.
Consideriamo quindi i due casi:

1. $I = I^2$

2. $I \neq I^2$

Se I è idempotente allora $I = Q$ e quindi anche Q è idempotente. Pertanto: $T(I) = T(Q) = (R : Q) = R_Q$
Se I non è idempotente allora sia $a \in I \setminus I^2$ si ha $I^2 \subseteq (a) \subseteq I$ quindi $T(I) = T((a)) = R_Q$

Sia R un dominio di Prüfer:

Teorema 2.21 *Sia R un dominio di Prüfer allora:*

1. $$T(I) \subseteq (\bigcap R_{Q_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$$
   con Q_α tale che $Q_\alpha R_{P_\alpha} = \bigcap_{n \geq 1} I^n R_{P_\alpha}$ per ogni P_α minimale su I e $M_\beta \in \mathbf{M}(R, I)$.

2. $$T(I) = (\bigcap R_{Q_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$$
   se i primi minimali di I sono in numero finito.

Dimostrazione:

1. $T(I) \subseteq T(IR_M)$ per ogni $M \in Specm(R)$. Inoltre dalla proposizione precedente segue che per ogni P_α primo minimale di I, $T(I) \subseteq T(IR_{P_\alpha}) = R_{Q_\alpha}$ da cui discende la tesi.

2. Sia $\{P_1, ..., P_n\}$ l'insieme dei primi minimali di I e sia
$u \in R_{Q_1} \cap ... \cap R_{Q_n} \cap (\bigcap R_{M_\beta}) = T(IR_{P_1}) \cap .. \cap T(IR_{P_n}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$.
Allora esiste un intero k tale che
$uI^k R_{P_i} \subseteq (R_{P_i})$ per ogni i e $uI^k \bigcap R_{M_\beta} \subseteq (\bigcap R_{M_\beta})$.
Pertanto:
$uI^k \subseteq uI^k R_{P_1} \cap .. \cap uI^k R_{P_n} \cap uI^k \bigcap R_{M_\beta} \subseteq R_{P_1} \cap .. \cap R_{P_n} \cap (\bigcap R_{M_\beta}) \subseteq I^{-1}$.
Risulta quindi che $u \in (I^{-1} : I^k) = (R : I^{k+1}) \subseteq T(I)$ da cui segue la tesi.

Si può ottenere la rappresentazione di $T(I)$, sopra descritta, allorché si verifichi:

$$T(I) = \bigcap_{M \in Specm(R)} T(IR_M)$$

Infatti applicando la Proposizione (**??**) si ottiene:

$$T(I) = (\bigcap R_{Q_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$$

con $Q_\alpha \in Spec(R)$ tale che $Q_\alpha R_{M_\alpha} = \bigcap_{n \geq 1} I^n R_{M_\alpha}$ per ogni $M_\alpha \in M(R, I)$ e $M_\beta \in \mathbf{M}'(R, I)$, cioè, (cfr.[G, Th.17.6]), la rappresentazione del Teorema (**??**).

Per individuare uno dei casi di validità di tale uguaglianza risulta utile il confronto fra $T(I)$ e un altro sovranello di R

$$\Omega(I) = \{x \in K \mid \forall\, i \in I\ \exists\, n(i) \text{ intero per cui } xi^{n(i)} \in R\}$$

detto *Trasformato di Kaplansky di* I *in* R.

Lemma 2.22 *Sia R un anello integro e I un suo ideale non nullo. Allora:*
$\Omega(I) = \bigcap_{a \in I} \Omega((a)) = \bigcap_{a \in I} T((a)) \supset T(I)$

Dimostrazione:
Basta verificare solo l'inclusione $T(I) \subseteq \bigcap_{a \in I} T((a))$ perché le due uguaglianze sono conseguenza della definizione di $\Omega(I)$. Osserviamo più in generale che se $J \subseteq I$, $T(I) \subseteq T(J)$. Infatti se $x \in T(I)$, esiste un intero positivo n, per cui $xI^n \subseteq R$. Ma questo implica che $xJ^n \subseteq R$ e che $x \in T(J)$.
Quindi $T(I) \subseteq T((a))$ per ogni elemento a di I, da cui discende la tesi.

Proposizione 2.23 *Sia I un ideale di un anello integro R.Allora:*

$$\Omega(I) = \bigcap_{M \in Specm(R)} \Omega(IR_M)$$

Dimostrazione:
$\Omega(I) \subseteq \bigcap_M \Omega(IR_M)$.
Sia quindi $x \in \bigcap_M \Omega(IR_M)$ e $i \in I$. Considero

$$B = \{y \in R \mid yx \in \Omega(i)\}$$

B è un ideale di R. Sia M un ideale massimale: esiste $n \in R \setminus M$ e s intero per cui $nxi^s \in R$. Questo implica che $nx \in \Omega(i)$ e che $n \in B$. Ma allora risulta che B non è contenuto in nessun ideale massimale, quindi $B = R$, allora $x \in \Omega(i)$ per ogni $i \in I$ e $x \in \Omega(I)$.

Nel caso in cui valga l'uguaglianza $T(I) = \Omega(I)$ si ha:

Proposizione 2.24 *Sia I ideale di un dominio R.*
Se $\Omega(I) = T(I)$ allora $\bigcap_M T(IR_M) = T(I)$.
*In particolare se R è un dominio di Prüfer vale la rappresentazione (**??**)(2).*

Dimostrazione:
In generale $T(I) \subseteq T(IR_M)$ per ogni $M \in Specm(R)$.
Per l'inclusione inversa si ha: $\bigcap_M T(IR_M) \subseteq \bigcap_M \Omega(IR_M) = \Omega(I) = T(I)$.

La rappresentazione del Teorema (**??**)(2) vale in particolare nel caso in cui R sia un dominio di Prüfer con un numero finito di ideali massimali. Infatti, più generalmente si ha:

Proposizione 2.25 *Sia R un dominio con un numero finito di ideali massimali e sia I un suo ideale non nullo. Allora $\bigcap_M T(IR_M) = T(I)$ e se R è un dominio di Prüfer vale la rappresentazione del Teorema (**??**)(2).*

Dimostrazione:
Sia $x \in \bigcap T(IR_{M_i})$, per ogni M_i esiste k_{m_i} per cui $xI^{k_{m_i}}R_{M_i}$. Sia quindi $h = max\{k_{m_i}\}$. Allora $xI^h R_{M_i} \subseteq R_M$, per ogni M_i, quindi $x \in (R : I^h)$ e $x \in T(I)$.

3 $I^{-1} = (I : I)$

Sia I un ideale di un dominio R.

Come già osservato nel capitolo precedente, resta un problema aperto individuare i casi in cui I^{-1} è un sovranello di R. L'uguaglianza fra I^{-1} e $(I : I)$ è una condizione sufficiente a garantire la validità di tale affemazione, ma in generale non necessaria. Presentiamo a proposito un controesempio: (cfr. [1]).

Esempio:

Sia F un campo e sia $R = F[[X^3, X^5]]$, cioè l'anello delle serie formali a coefficienti in F, prive dei termini in X, X^2 e X^4. Se $I = (X^3, X^7)$, allora $I^{-1} = F[[X^2]]$, mentre $(I : I) = F[[X^3]]$.

Ci proporremo quindi di valutare quando $I^{-1} = (I : I)$, per I ideale di un dominio di Prüfer R. Innanzitutto mostriamo che, anche sotto questa ipotesi aggiutiva su R, I^{-1} può essere un sovranello di R distinto da $(I : I)$.

Esempio:

Sia R un dominio di Prüfer con due ideali massimali M_1 e M_2 e tale che P sia il suo unico ideale primo proprio contenuto in $M_1 \cap M_2$. Supponiamo inoltre che R_P sia un anello di valutazione discreto. Consideriamo l'ideale $I = PR_{M_1} \cap xR_{M_2}$, dove $x \in P$ è tale che $PR_P = xR_P$, segue allora che $IR_{M_1} = PR_{M_1}$ e $IR_{M_2} = xR_{M_2}$. Mostriamo che $I^{-1} = R_P$. Infatti, poiché $I \subseteq P$, $P^{-1} = R_P \subseteq I^{-1}$, mentre l'inclusione inversa si dimostra nel modo seguente: sia $u \in I^{-1}$ allora $uIR_{M_1} \subseteq R_{M_1}$ e $uPR_{M_1} \subseteq R_{M_1}$. Quindi $u \in (R_{M_1} : PR_{M_1}) = (R_{M_1})_{PR_{M_1}} = R_P$. Invece $(I : I) = R_{M_2}$. Osserviamo innanzitutto che $xR_{M_1} \subseteq PR_{M_2} = PR_P = PR_{M_1}$ perciò $I = xRM_2$ e $(I : I) = R_{M_2}$.

Premettiamo ora alcuni risultati validi in un contesto più generale di quello dei domini di Prüfer.

Definizione:

Sia R un dominio e K il suo campo dei quozienti. R è detto un *dominio seminormale* se per ogni $x \in K$ per cui esiste $n \geq 1$ tale che $x^n \in R$, si ha che $x \in R$.

I domini integralmente chiusi sono seminormali e, come tali, i domini di Prüfer sono seminormali.

Proposizione 3.1 *Se R è un dominio seminormale ed I un suo ideale non nullo, allora $(\sqrt{I} : \sqrt{I})$ è seminormale e*

$$\begin{aligned} (\sqrt{I} : \sqrt{I}) &= \{x \in K \mid x^n \in (R : I)\ \forall\, n \geq 1\} \\ &= \{x \in K \mid x^n \in (R : I) \ \text{ per qualche } \ \mathrm{n} \gg 0\} \end{aligned}$$

Dimostrazione:

Sia $x \in K$ per cui esiste $n \geq 1$ tale che $x^n \in (R : I)$ e sia $t \in \sqrt{I}$. Allora esiste un intero positivo m per cui $t^m \in I$ e quindi, per ogni $s \geq m, n$, $(xt)^s \in R$. Per la seminormalità di R segue che $xt \in R$, quindi $x \in (R : \sqrt{I}) \subseteq (R : I)$ per ogni $n \geq 1$. Inoltre $(xt^{s+1}) = (x^{s+1}t^s)t \in \sqrt{I}$, perciò $xt \in \sqrt{I}$ e $x \in (\sqrt{I} : \sqrt{I})$.

La seminormalità di $(\sqrt{I} : \sqrt{I})$ si dimostra invece nel modo seguente: sia n un intero positivo per cui $x^n \in (\sqrt{I} : \sqrt{I})$, allora $x^n \in (R : I)$ e quindi $x \in (\sqrt{I} : \sqrt{I})$.

Corollario 3.2 *Sia R un dominio seminormale e I un suo ideale non nullo. $(\sqrt{I} : \sqrt{I})$ è il maggior sottoanello di $(R : I)$.*

Dimostrazione:
Sia $x \in S$ dove S indica un sottoanello generico di $(R : I)$, allora $x^m \in S \subseteq (R : I)$ per ogni $m \geq 1$ e quindi $x \in (\sqrt{I} : \sqrt{I})$.

Corollario 3.3 *Sia R un dominio seminormale.*

1. *$(R : I)$ è un anello $\Leftrightarrow$ $(R : I) = (\sqrt{I} : \sqrt{I})$.*

2. *Se $(R : I)$ è un anello allora è seminormale.*

Se allora R è un dominio seminormale e I^{-1} è un anello si ottiene:

$$(I : I) \subseteq (\sqrt{I} : \sqrt{I}) = (R : \sqrt{I}) = (R : I)$$

e quindi anche $(\sqrt{I})^{-1}$ è un anello.

Consideriamo ora le conseguenze di tali risultati in un dominio di Prüfer.

Lemma 3.4 *Se I e J sono due ideali comassimali di un dominio R, allora $(I \cap J)^{-1} = I^{-1} + J^{-1}$.*

Dimostrazione:
Se I e J sono comassimali, allora esistono due elementi $a \in I$ e $b \in J$ tali che $a+b = 1$. Sia $u \in (I \cap J)^{-1}$, allora $uaJ \subseteq u(I \cap J) \subseteq R$ e $ubI \subseteq u(I \cap J) \subseteq R$. Quindi $ua \in J^{-1}$ e $ub \in I^{-1}$ e $u = ua + ub \in I^{-1} + J^{-1}$. L'altra inclusione segue osservando che $(I \cap J)$ è contenuto sia in I che in J e quindi tali inclusioni si rovesciano per i loro inversi. Indichiamo:

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{P \in Spec(R) \mid P \text{ è invertibile}\} \\
S_2 &:= \{P \in Spec(R) \mid P \text{ è massimale}\} \\
S_3 &:= \{P \in Spec(R) \mid P \notin S_1 \cup S_2\}
\end{aligned}$$

Gli elementi di S_1 sono gli ideali massimali invertibili di I, mentre gli elementi di S_2 sono gli ideali massimali di I non finitamente generati e localmente principali.

Definizione:
Un'intersezione di ideali primi si dice *irridondante* se per ogni coppia di indici α e β, $\bigcap_{\alpha \neq \beta} P_\alpha \nsubseteq P_\beta$.

Teorema 3.5 *Sia I un ideale radicale di un dominio di Prüfer R.*

1. *Se I^{-1} è un anello coincide con $(I : I)$.*

2. *Sia $\{P_\alpha\}$ l'insieme degli ideali primi minimali di I. Supponiamo che $\bigcap P_\alpha$ sia irridondante. Allora*
   I^{-1} è un anello $\Leftrightarrow \{P_\alpha\} \subseteq S_2 \cup S_3$.

Dimostrazione:

1. La tesi segue dal Corollario (**??**)

2. $(\Rightarrow)$
   Supponiamo per assurdo che esista un primo minimale P_α di I in S_1 e sia $J = \bigcap_{\beta \neq \alpha} P_\beta$. Applicando il lemma precedente si ha $I^{-1} = J^{-1} + P_\alpha^{-1}$ e poiché P_α è invertibile $1 = \sum_{i=1}^n p_i u_i$ con $p_i \in P_\alpha$ e $u_i \in P_\alpha^{-1}$. Essendo $P_\alpha = (p_1, .., p_n)$, $P_\alpha^{-1} = \bigcap (1/p_i)R$. Quindi per ogni i esiste $r_i \in R$, per cui $u_i = r_i/p_i$ e risulta che $1 = \sum_{i=1}^n r_i$. Possiamo inoltre supporre senza perdita di generalità che $r_1 \notin P_\alpha$. Per ottenere una contraddizione mosteremo che $u_1^2 \notin J^{-1} + P_\alpha^{-1}$. Supponiamo per assurdo che sia vero il contrario: allora $u_1^2 = a + s/p_1$ con $a \in J^{-1}$ e $s/p_1 \in P_\alpha^{-1}$. Quindi, $r_1^2/p_1 = p_1 a + s \in J^{-1}$. Sia $b \in J \setminus P_\alpha$, otteniamo che $r_1^2 b \in p_1 R \subseteq P_\alpha$, che è impossibile. Pertanto: $P_\alpha \in S_2 \cup S_3$.

($\Leftarrow$)
Dai risultati già dimostrati per la rappresentazione di I^{-1} come sovranello di R, basta verificare che $I^{-1} \subseteq (\bigcap R_{P_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$. Come nel Teorema (**??**), basta mostrare che $I^{-1} \subseteq \bigcap R_{P_\alpha}$. Sia P_β un ideale primo minimale su I, distinguiamo i due casi: (a) $P_\beta \in S_2$ e (b) $P_\beta \in S_3$.
(a): Sia $J = \bigcap_{\alpha \neq \beta} P_\alpha$: $I^{-1} = J^{-1} + P_\beta^{-1}$. $P_\beta^{-1} = R$ perché P_β è massimale e quindi $I^{-1} = J^{-1}$. Siccome J non è contenuto nell'ideale massimale P_β, possiamo concludere che $I^{-1} = J^{-1} \subseteq R_{P_\beta}$.
(b): Sia N un ideale massimale di R che contiene P_β per cui $P_\beta R_N$ non è invertibile. Poiché I è un ideale radicale, si ha che $IR_N = PR_N$ e quindi segue che: $I^{-1} \subseteq (I^{-1})_{R \setminus N} \subseteq (R_N : IR_N) = (R_N : PR_N) = R_{P_\beta}$.

Possiamo osservare che dalla dimostrazione precedente emerge che, se i primi minimali di I sono tutti in S_3, I^{-1} è un anello anche senza l'ipotesi che $\bigcap P_\alpha$ sia irridondante.

Corollario 3.6 *Sia P un ideale primo non invertibile di un dominio di Prüfer R.*

1. *P^{-1} è un anello.*
2. *$P^{-1} = (P : P)$.*
3. *P è un ideale primo di $(P : P)$.*

Dimostrazione:

1. La tesi segue dal teorema precedente.
2. $(P : P) \subseteq P^{-1}$, pertanto bisogna verificare solo l'inclusione inversa. Sia $z \in P^{-1} = R_P \cap (\bigcap_{M \in \mathbf{M'}(R,I)} R_M)$ e $a \in P$, allora $za \in PR_P \cap R = P$ quindi $z \in (P : P)$.

3. P è un ideale proprio di $(P:P)$, quindi $PP^{-1} \subseteq P^{-1}$ e $PP^{-1} = P(P:P) = P$ è un ideale primo proprio d P^{-1}.

.

Da quanto già dimostrato emerge che per domini di Prüfer, in quanto domini seminormali, stabilire quando I^{-1} coincida con $(I:I)$, è equivalente a individuare quando $(I:I)$ sia uguale a $(\sqrt{I}:\sqrt{I})$. Ci proponiamo quindi di fornire una caratterizzazione per quest'ultima uguaglianza:

Proposizione 3.7 *Sia I un ideale non nullo di un dominio di Prüfer R. Se I^{-1} è un anello, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $(I:I) = (\sqrt{I}:\sqrt{I})$.

2. *I primi minimali di I in $(I:I)$ sono ideali massimali.*

Dimostrazione:
$(1) \Rightarrow (2)$
Basta provare l'asserto per $(\sqrt{I}:\sqrt{I})$ perché, coincidendo per ipotesi con $(I:I)$, ha i suoi stessi ideali massimali.
Sia $\{P'_j\}_{j\in J}$ l'insieme degli ideali primi minimali di I in $(\sqrt{I}:\sqrt{I})$. Supponiamo per assurdo che esista un ideale primo proprio Q' di $(\sqrt{I}:\sqrt{I})$ che contenga un ideale primo minimale P'_j. Allora $P_j = P'_j \cap R \subset Q = Q' \cap R$. Esiste quindi un elemento $x \in Q \setminus P_j$: verifichiamo che $1/x \in I^{-1}$. Infatti, per ogni ideale M massimale M in R, $IR_M \subseteq P_jR_M \subseteq (x)R_M$, da cui segue che $I \subseteq (x)$ e che $x^{-1}I \subseteq R$. Quindi $1/x \in I^{-1} = (\sqrt{I}:\sqrt{I})$, perchè I^{-1} è un anello, per cui, $1 \in (x)(1/x) \subseteq Q(\sqrt{I}:\sqrt{I}) = Q' = (\sqrt{I}:\sqrt{I})$, in contraddizione con l'ipotesi che Q' fosse un ideale proprio.
$(2) \Rightarrow (1)$
Supponiamo per assurdo che $(I:I) \neq (\sqrt{I}:\sqrt{I})$, applicando il Teorema di

rappresentazione (**??**) per $(I:I)$ e per $(\sqrt{I}:\sqrt{I})$, sappiamo che:

$$\begin{aligned}(I:I) &= (\bigcap R_P)\cap(\bigcap R_{M_\alpha}) \text{ con } P\in\mathcal{G}(R,I) \text{ e } \{M_\alpha\}\in\mathbf{M}'(R,I)\\ (\sqrt{I}:\sqrt{I}) &= (\bigcap R_P)\cap(\bigcap R_{M_\alpha}) \text{ con } P \text{ primo minimale su } I \text{ e } \{M_\alpha\}\in\mathbf{M}'(R,I)\end{aligned}$$

segue, allora dall'ipotesi, l'esistenza di un ideale primo $Q\supseteq I$, non minimale su I, per cui $G(Q)=Q$. Allora Q contiene propriamente un ideale primo P minimale su I. Considero quindi le estensioni di $P(I:I)$ e $Q(I:I)$ all'anello quoziente R_Q, cioè: $(P(I:I))_{Q(I:I)} = PR_Q \subset QR_Q = (Q(I:I))_{Q(I:I)}$, e per la corrispondenza fra ideali primi rispetto all'estensione ad un anello quoziente, segue che: $P(I:I)\subset Q(I:I)$, contrariamente all'ipotesi che $P(I:I)$ fosse un ideale massimale.

Proposizione 3.8 *Sia P un ideale primo contenente I. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $PR_P = \mathbf{Z}(R_P, IR_P)$
2. *Esiste un ideale primo Q contenente P, si ha $P\subseteq\mathbf{Z}(R_Q, IR_Q)$*
3. *Per ogni ideale primo Q contenente P, si ha $P\subseteq\mathbf{Z}(R_Q, IR_Q)$*

Dimostrazione:
$(1)\Rightarrow(3)$
La tesi segue dalle seguenti inclusioni $P\subseteq\mathbf{Z}(R_P, IR_P)\cap R_Q\subseteq\mathbf{Z}(R_Q, IR_Q)$.
Le implicazioni $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$ sono banali.

Corollario 3.9 *Se $(I:I)=(\sqrt{I}:\sqrt{I})=I^{-1}$, allora, per ogni $M\in\mathbf{M}(R,I)$, $G(M)=P$ è un primo minimale su I.*

Dimostrazione:
Se così non fosse, $G(M)=Q$ con Q non minimale su I, implicherebbe che

$QR_M = \mathbf{Z}(R_M, IR_M)$ e quindi $G(Q) = Q$, uguaglianza che, per quanto mostrato nella Proposizione (**??**), porta ad una contraddizione con l'ipotesi.

Lemma 3.10 *Sia R un dominio:*

1. $\mathcal{U}(R,I) = \mathcal{U}(R, \sqrt{I})$.
2. $\mathcal{A}(R,I) = \mathcal{U}(IR_{\mathcal{U}} : IR_{\mathcal{U}}) \cap R$.

Dimostrazione:

1. La conclusione segue osservando che: $\mathbf{M}(R,I) = \mathbf{M}(R, \sqrt{I})$ ed applicando (**??**).
2. Per la dimostrazione di questo risultato si rimanda a: [FHP, Th.7.1.5.]

Definizione:
Un ideale I si dice *privo di divisori primi distinti dai suoi primi minimali* se $\mathcal{Z}(R,I)$ coincide con l'insieme degli ideali primi minimali di I.

Proposizione 3.11 *Sia R un dominio di Prüfer ed I un suo ideale non nullo. Se I^{-1} è un anello, le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. $I^{-1} = (I : I)$
2. *I è privo di divisori primi distinti dai suoi primi minimali.*

Dimostrazione:
(1) $\Rightarrow$ (2)
Dall'applicazione del Teorema (**??**) e del Corollario (**??**)

$$(IR_{\mathcal{U}} : IR_{\mathcal{U}}) = \bigcap_{M \in \mathbf{M}(R,I)} (IR_M : IR_M) = \bigcap_{P \textit{ minimale su } I} R_P$$

Quindi $(IR_{\mathcal{U}} : IR_{\mathcal{U}}) = (\sqrt{I}R_{\mathcal{U}} : \sqrt{I}R_{\mathcal{U}})$, da cui segue che
$\mathcal{A}(R, I) = \mathcal{A}(R, \sqrt{I})$ e che allora, dal Lemma (**??**), $\mathcal{N}(R, I) = \mathcal{N}(R, \sqrt{I})$ e quindi che $\mathcal{Z}(R, I) = \mathcal{Z}(R, \sqrt{I})$ cioè la tesi.
(2) $\Rightarrow$ (1)
Se I è privo di divisori primi distinti dai suoi primi minimali, per la Proposizione (**??**), $\mathcal{G}(R, I) = \mathcal{G}(R, \sqrt{I})$ e dal Teorema di rappresentazione (**??**) per $(I : I)$ e $(\sqrt{I} : \sqrt{I})$, segue la conclusione.

Ricordiamo quindi due casi in cui un ideale è privo di divisori primi distinti dai suoi ideali primi minimali:

Proposizione 3.12 *Sia I un ideale primario di un dominio di Prüfer R. Se I^{-1} è un anello allora $I^{-1} = (I : I)$.*

Dimostrazione:
Se I è un ideale primario ha come unico divisore primo il suo ideale primo minimale P. Infatti, poiché $I = IR_P \cap R$, $\mathbf{Z}(R, I) = \mathbf{Z}(R_P, IR_P) \cap R = P$.
La conclusione segue quindi dalla Proposizione (**??**).

Proposizione 3.13 *Sia I un ideale di un dominio di Prüfer R tale che ogni elemento non invertibile di R è un divisore dello zero mod I. Allora:*

$$I^{-1} = (I : I) = R$$

Dimostrazione:
(1) $\Rightarrow$ (2)
Per ipotesi $\mathcal{N}(R, I) = \mathcal{U}(R)$ e poiché in generale $\mathcal{U}(R) \subseteq \mathcal{U}(R, I) = \mathcal{U}(R, \sqrt{I}) \subseteq \mathcal{N}(R, \sqrt{I}) \subseteq \mathcal{N}(R, I)$ segue che $\mathcal{N}(R, I) = \mathcal{N}(R, \sqrt{I})$ e che $\mathbf{Z}(R, I) = \mathbf{Z}(R, \sqrt{I})$, quindi I non ha divisori primi distinti dai suoi primi minimali.
Allora $I^{-1} = (I : I) = R$, essendo $\mathcal{Z}(R, I) = Spec(R)$.

Concludiamo considerando la validità dell'uguaglianza $(I : I) = I^{-1}$ nei domini di Prüfer con spettro noetheriano

Definizione:
Sia R un anello commutativo. $Spec(R)$ si dice *noetheriano* se ogni catena ascendente di ideali radicali è stazionaria.

Teorema 3.14 *Sia R un anello commutativo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$Spec(R)$ è noetheriano.*
2. *Per ogni ideale I di R, esiste $J \subseteq I$ finitamente generato, per cui $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.*
3. *Per ogni ideale $P \in Spec(R)$, esiste $J \subseteq P$ per cui $P = \sqrt{J}$.*

Per la dimostrazione di questo risultato cfr. [FHP,Th.3.1.11].

Lemma 3.15 *Sia I un ideale non nullo di un dominio di Prüfer R e sia P un ideale primo minimale su I. Se esiste un ideale J finitamente generato per cui $I \subseteq J \subseteq P$, allora I^{-1} non è un anello.*

Dimostrazione:
Se per assurdo I^{-1} fosse un anello sarebbe contenuto in R_P. Ma poichè $I \subseteq J$ e quindi $J^{-1} \subseteq I^{-1}$, risulterebbe $1 \in JJ^{-1} \subseteq PI^{-1} \subseteq PR_P$.

Teorema 3.16 *Sia R un dominio di Prüfer con spettro noetheriano e sia I un ideale non nullo di R. Se I^{-1} è un anello, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $I^{-1} = (I : I)$

2. $I = \sqrt{I}$

Dimostrazione:
$(1) \Rightarrow (2)$
Supponiamo per assurdo che $I \neq \sqrt{I}$, allora esiste un ideale massimale M di R per cui IR_M non è in ideale radicale. Quindi esiste un ideale primo P contenuto in M e minimale sull'ideale I per cui $IR_M \subset PR_M$ e $\sqrt{I}R_M = PR_M$. Verifichiamo innanzitutto che $IR_P = PR_P$.
Supponiamo per assurdo che non sia così e sia $b \in P$ per cui $IR_P \subset bR_P \subseteq PR_P$. Poiché $Spec(R)$ è noetheriano, esiste $J \subseteq P$ tale che $\sqrt{J} = P$. Sia $J' = (J, b)$: mostriamo che $IR_N \subseteq J'R_N$ per ogni ideale $N \in Specm(R)$. Sia N un ideale massimale di R. Se $P \nsubseteq N$, allora $J'R_N = R_N$, dato che $\sqrt{J'} = P$, mentre, se $P \subseteq N$, $PR_P = PR_N$, essendo R_P un sovranello di valutazione di R_N. Ma $IR_P \subset bR_P$, perciò $Ib^{-1} \subset PR_P = PRN$, da cui segue che $IR_N \subseteq bR_N \subseteq J'R_N$. Quindi $I \subseteq J' \subseteq P$ e per il Lemma (**??**) questo comporta che I^{-1} non è un anello, in contraddizione con le ipotesi.
Osserviamo che, essendo R_M un anello di valutazione, $\mathbf{Z}(R_M, IR_M) = QR_M$ dove $Q \in Spec(R)$ e $Q \subseteq M$. $PR_M \subseteq QR_M$, poichè $\sqrt{I}R_M = PR_M$, verifichiamo che tale contenimento è stretto: se $x \in PR_M \setminus IR_M$, sapendo che $PR_M = PR_P = IR_P$, esiste $y \in R_M \setminus PR_M$ tale che $yx \in IR_M$,
$y \in \mathbf{Z}(R_M, IR_M) = QR_M$, per cui: $P \subset Q$. Da questo discende che $QI^{-1} = I^{-1}$: infatti Q è il radicale di un ideale finitamente generato A ed essendo $P \subset Q$, $P \subset A$; perciò si ottiene che $A^{-1} \subset I^{-1}$ e che $1 \in AA^{-1} \subset QI^{-1}$. Allora $I^{-1} \nsubseteq R_Q$, mentre $(I : I) \subseteq (IR_M : IR_M) = R_Q$ in contrasto con l'ipotesi che $I^{-1} = (I : I)$.
$(2) \Rightarrow (1)$
La validità di questa implicazione è già stata dimostrata per un qualsiasi

dominio di Prüfer.

Proposizione 3.17 *Sia R un dominio di Prüfer con spettro noetheriano. Se I è un ideale primario ma non primo, I^{-1} non è un anello.*

Dimostrazione:
Se per assurdo I^{-1} fosse un anello, I sarebbe un ideale radicale e quindi non solo primario, ma primo.

4 Ideali divisoriali

Sia I un ideale non nullo di un dominio R. Indichiamo con $I_v = (I^{-1})^{-1}$.
Definizione:
Un ideale I si dice *divisoriale* se $I_v = I$.

In questo capitolo cercheremo di stabilire sotto quali condizioni un ideale di un dominio di Prüfer sia divisoriale. Cominceremo discutendo il problema per gli ideali primi e quindi per le loro potenze, perché per questi casi la trattazione è più completa.

Proposizione 4.1 *Sia R un dominio di Prüfer e sia P un suo ideale primo non nullo. Se P^{-1} non è un anello, allora P è divisoriale.*

Dimostrazione:
Poichè P^{-1} non è un anello $(P : P) \subset P^{-1}$. Sia $J = (R : P^{-1})$. $J = P_v$. Basta quindi verificare che $J = P$ e quindi che $J \subseteq P$. Sia $r \in J$, poichè $rP^{-1}P \subseteq P$ e $PP^{-1} \nsubseteq P$, $r \in P$.

Il risultato sopra esposto vale anche in un contesto generale di un dominio qualunque. La dimostrazione si basa comunque sull'applicazione dell'uguaglianza $P^{-1} = (P : P)$, valida anche per gli ideali primi di un qualsiasi dominio, ma che abbiamo dimostrato solo per gli ideali primi di un dominio di Prüfer. Abbiamo imposto, quindi tale restrizione anche alla Proposizione precedente.

Proposizione 4.2 *Sia M un ideale massimale di un dominio di Prüfer, M^n è divisoriale per ogni $n \geq 1$, $\Leftrightarrow$ M è finitamente generato.*

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$:
Innanzitutto osserviamo che se M è un ideale massimale si possono verificare

solo le due possibilità seguenti: o M è invertibile o $M^{-1} = R$. Infatti se M non è invertibile $M \subseteq MM^{-1} \subset R$. Pertanto $M^{-1} = (M : M)$ è un anello e per il Teorema (**??**), $M^{-1} = R$. Se allora M non è invertibile, M non è divisoriale perchè l'uguaglianza fra M^{-1} e R lo esclude, da cui discende la tesi.

($\Leftarrow$):

Se M è finitamente generato M è invertibile, quindi M^{-1} non è un anello e M è divisoriale per quanto già mostrato nella Proposizione precedente. Per quanto riguarda, invece, le potenze di M, basta ossevare che se M è finitamente generato, M^n è finitamente generato e anch'esso, quindi, invertibile, da cui discende la tesi.

Sia ora P un ideale primo non massimale, forniamo un criterio per stabilire se P sia divisoriale.

Indichiamo con $S = K \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$ dove $M_\alpha \in \mathbf{M'}(R, P)$.

Proposizione 4.3 *Sia R un dominio di Prüfer e sia P un suo ideale primo non nullo. Allora $\bigcap R_{M_\alpha} \nsubseteq R_P$, con $M_\alpha \in \mathbf{M'}(R, P)$, $\Leftrightarrow$ esiste un ideale finitamente generato $I \subseteq P$ e non contenuto in nessun M_α.*

Dimostrazione:

($\Leftarrow$):

Poiché $I \nsubseteq M_\alpha$ per ogni $M_\alpha \in \mathbf{M'}(R, P)$, $T(I) \subseteq \bigcap R_{M_\alpha}$. Inoltre, essendo I finitamente generato, si ha che $IT(I) = T(I)$ e che $PT(I) = T(I)$, per cui $T(I) \nsubseteq R_P$.

($\Rightarrow$):

Sia $u \in \bigcap R_{M_\alpha} \setminus R_P$, dunque: $u = a/b$, con $a \in R$ e $b \in P$ e sia

$I = (bR :_R aR)$: I è finitamente generato perché aR e bR sono finitamente generati (cfr.[G,Prop.25.4]). Per un α fissato $a/b = c/d$ con $c \in R$ e

$d \in R \setminus M_\alpha$, segue che $d \in I$ e che $I \nsubseteq M_\alpha$. Se $x \in I$, $xa \in bR$ ed essendo R_P un dominio di valutazione, poiché $u \notin R_P$, $1/u = b/a \in R_P$, segue che: $x = (b/a)R \subseteq PR_P \cap R = P$.

Lemma 4.4 *Sia R un dominio di Prüfer e sia P un suo ideale primo non massimale. Allora $P^{-1} \subseteq S$ se esiste un ideale finitamente generato I tale che $P \supseteq I$ e $I \nsubseteq M_\alpha$ per ogni $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R,P)$.*

Dimostrazione:

$P^{-1} = R_P \cap S$ e quindi $P^{-1} \subset S$ se e soltanto se $\bigcap R_{M_\alpha} \nsubseteq R_P$ e, per la Proposizione (**??**), se e soltanto se esiste un ideale finitamente generato I tale che $I \subseteq P$ e $P \nsubseteq M_\alpha$ per ogni $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R,P)$.

Teorema 4.5 *Sia R un dominio dei Prüfer e sia P un suo ideale primo non massimale, non nullo. Se $P^{-1} \nsubseteq S$, allora P è divisoriale.*

Dimostrazione:

Poiché R è un dominio di Prüfer, basta mostrare che P è rappresentabile come intersezione di ideali finitamente generati di R, infatti ogni ideale finitamente generato in un dominio di Prüfer è invertibile e quindi divisoriale, perché il suo inverso non è un anello, quindi P risulterebbe intersezione di ideali divisoriali e perciò divisoriale a sua volta. Per ipotesi e per il lemma precedente, esiste I, un ideale finitamente generato di R, per cui $I \subseteq P$ e $P \nsubseteq M_\alpha$ per ogni $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R,P)$. Verifichiamo che $P \subseteq (I,a)$, per ogni $a \in R \setminus P$, mostrando che $PR_M \subseteq (I,a)R_M$, per ogni $M \in Specm(R)$. Se $M \in \mathbf{M}'(R,P)$ si ha che $R_M = (I,a)R_M = PR_M$, mentre se $M \in \mathbf{M}(R,P)$ allora $PR_M \subseteq aR_M = (I,a)R_M$. Quindi $P \subseteq \bigcap_{r \in R \setminus P}(I,r)$; per dimostrare che P coincide con tale intersezione basta osservare che, per ogni ideale massimale M tale che $P \subseteq M$ e per ogni $r \in M \setminus P$, $r \notin (I,r^2)$, infatti $r \notin (r^2)R_M = (I,r^2)R_M$.

Corollario 4.6 *Sia R un dominio di Prüfer e sia P un suo ideale primo non nullo. Se $P \nsubseteq \bigcup R_{M_\alpha}$, con $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R,P)$, allora P è divisoriale.*

Dimostrazione:
Sia $a \in P \setminus \bigcup R_{M_\alpha}$, consideriamo $I = (a)$ ed applicando a I i risultati precedenti segue la conclusione.

Corollario 4.7 *Sia R un dominio di Prüfer e P un suo ideale primo non nullo e non massimale. Se P è contenuto in tutti gli ideali massimali di R, tranne un numero finito di essi, allora P è divisoriale.*

Dimostrazione:
$P \nsubseteq \bigcup M_\alpha$ e quindi la conclusione discende dall'applicazione del Corollario precedente.

Sia $P_0 = \bigcap_{n \geq 1} P^n$.
Possiamo osservare che, essendo $T(P) = R_{P_0} \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$ con e $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R,P)$, si hanno le seguenti inclusioni:

$$R \subseteq P^{-1} \subseteq T(P) \subseteq S.$$

Pertanto se $P^{-1} \neq T(P)$, da una diretta applicazione dei risultati sopra esposti, segue che P è divisoriale. Descriviamo quindi questo caso

Proposizione 4.8 *Sia R un dominio di Prüfer e sia P un suo ideale primo non massimale e non nullo. Se $P^{-1} \subsetneq T(P)$:*

1. *$P^{-1} \subsetneq T(P)$è un'estensione minimale di P^{-1}, cioè non esistono anelli propriamente contenuti fra P^{-1} e $T(P)$.*

2. *P è divisoriale.*

3. *P è un ideale proprio invertibile di P^{-1}.*

4. $T(P) = \bigcap R_{Q_\alpha}$*, dove* $\{Q_\alpha\}$ *è l'insieme degli ideali primi di* R *che non contengono* P*.*

5. $P^{-n} = (R : P^n)$ *non è un anello, per ogni* $n \geq 2$*.*

Dimostrazione:

1. Supponiamo che esista un anello A, tale che $P^{-1} \subseteq A \subsetneq T(P)$. Poiché sia A che $T(P)$ sono esprimibili come intersezione di localizzazioni di R, esiste un ideale primo Q di R tale che $A \subseteq R_Q$, ma $T(P) \nsubseteq R_Q$. Mostriamo che $P \subseteq Q$: infatti se per assurdo $P \nsubseteq Q$, esiste un un ideale primo $Q' \subseteq T(P)$, per cui $T(P) \subseteq (T(P))_{Q'} = R_Q$ in contrasto con quanto supposto. Quindi risulta che $A \subseteq R_Q \subseteq R_P$ ed essendo anche $T(P) \subseteq (\bigcap R_{M_\alpha})$ con $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R, P)$, $A \subseteq R_P \cap (\bigcap R_{M_\alpha}) = P^{-1}$, da cui discende l'uguaglianza $A = P^{-1}$.

2. La dimostrazione è una conseguenza dei risultati esposti precedentemente.

3. Dal Corollario (**??**) segue che P è un ideale primo di $(P : P) = P^{-1}$, basterà mostrare che P è invertibile per poter concludere che P è anche massimale. Supponiamo per assurdo che P non sia invertibile, allora l'inverso di P rispetto a P^{-1} è P^{-1} stesso, quindi $(P^{-1} : P) = (P : P^2) = P^{-2} = P^{-1}$. Allora si dimostra per induzione su n che $P^{-n} = P^{-1}$, da cui segue che $T(P) = P^{-1}$, cioè un assurdo; infatti, dimostrata la base induttiva per P^{-2}, applicando l'ipotesi induttiva per $n - 1$, si ottiene: $P^{-n} = (R : P^n) = ((R : P^{n-1}) : P) = (P^{-1} : P) = P^{-1}$.

4. Dal Teorema di corrispondenza per gli ideali primi di $T(P)$, segue che $T(P) \subseteq \bigcap R_{Q_\alpha}$, basta verificare quindi l'inclusione inversa. Supponiamo per assurdo che $\bigcap R_{Q_\alpha} \nsubseteq T(P)$, esiste quindi un ideale primo Q

in R per cui $T(P) \subseteq R_Q$, ma $\bigcap R_{Q_\alpha} \nsubseteq R_Q$. Allora $P \subseteq Q$, quindi $T(P) \subseteq R_Q \subseteq R_P$, da cui segue che $T(P) \subseteq R_P \cap \bigcap R_{M_\alpha} = P^{-1}$, che è assurdo.

5. Supponiamo che P^{-n} sia un anello per ogni $n \geq 2$; allora, poiché le potenze di P sono ideali P-primari con unico ideale primo minimale P, $P^{-n} = R_P \cap \bigcap(R_{M_\alpha}) = P^{-1}$, da cui discende che $T(P) = P^{-1}$, cioè un assurdo.

Osserviamo che l'inclusione stretta $P^{-1} \subsetneq T(P)$ è una condizione sufficiente a garantire che P sia un ideale divisoriale, ma non necessaria:

Esempio:
Sia R un dominio di valutazione e sia P un suo ideale primo non nullo e non massimale tale che $P = P^2$, allora $P^{-1} = T(P)$, ma P è comunque divisoriale perché è nelle ipotesi di applicabilità del Corollario (**??**).

Passiamo quindi ad una caratterizzazione del caso in cui sia P, ideale primo non massimale, che le sue potenze, sono divisoriali.

Lemma 4.9 *Sia R un dominio di Prüfer, se $P \in Spec(R)$, allora*

$$(R : (R : T(P)) = \bigcap_{n \geq 1} (P^n)_v.$$

Dimostrazione:
$(R : T(P)) = [R : \bigcup(R : P^n)] = \bigcap_{n\geq1}[R : (R : P^n)] = \bigcap_{n\geq1}(P^n)_v$

Proposizione 4.10 *Sia P un ideale primo non nullo di un dominio di Prüfer R. Allora P^n è divisoriale per ogni $n \geq 1 \Leftrightarrow (R : T(P)) = P_0$.*

Dimostrazione:

($\Rightarrow$)

La conclusione segue dall'applicazione del lemma precedente: $P_0 = \bigcap P^n = \bigcap (P^n)_v = (R : T(P))$

($\Leftarrow$)

Consideriamo tre casi:

1. $P = M$ è un ideale massimale.

   Mostriamo che $R \subsetneq M^{-1}$, se infatti $R = M^{-1}$, per induzione si ottiene:

   $$M^{-n} = (R : M^n) = [(R : M) : M^{n-1}] = (R : M^{n-1}) = M^{-(n-1)} = R$$

   perciò, $T(M) = \bigcup M^{-n} = R$, contraddicendo l'ipotesi che $(R : T(M)) = M_0$, perchè $M_0 \neq R$. Allora M è finitamente generato e quindi divisoriale.

2. P è un ideale primo non massimale per cui $P^{-1} = T(P)$.

   Allora $P_0 = (R : T(P)) = (R : P^{-1}) = P_v$, da cui segue che $P = P^n = P_v$ per ogni $n \geq 1$.

3. P è un ideale non massimale per cui $P^{-1} \subsetneq T(P)$

   Dalla Proposizione (**??**) segue che P è divisoriale ed è un ideale primo ed invertibile in P^{-1}, inoltre P^{-1} è un sovranello di R. Applicando queste conseguenze dell'ipotesi si ottiene:

   $$\begin{aligned} (P^n)_v &= [R : (R : P^n)] = [((R : P) : P^{n-1})] \\ &= [R : (P^{-1} : P^{n-1})] = [R : (P^{-1} : P^{n-1})P^{-1}] \\ &= [(R : P^{-1}) : (P^{-1} : P^{n-1})] = (P : P^{-n}) \end{aligned}$$

   Sia allora $z \in (P^n)_v$, $zP^{-n} \subseteq P$ e $zP^{-n}P^{n-1} \subseteq PP^{n-1} = P^n$. Quindi $zP^{-1} \subseteq P^n$ ed essendo P^{n-1} invertibile in P^{-1}, segue che $z \in P^n$ da cui si conclude che $(P^n)_v$.

Corollario 4.11 *Sia R un dominio di Prüfer e P un suo ideale primo non nullo e non massimale. Ogni potenza di P è divisoriale $\Leftrightarrow$ P^2 è un ideale divisoriale di R.*

Dimostrazione:
L'implicazione ($\Rightarrow$) è ovvia pertanto basta verificare solo la direzione ($\Leftarrow$). Supponiamo che P^2 sia un ideale divisoriale di R, P non è un ideale massimale non finitamente generato, altrimenti $P^{-1} = P^{-2} = R$, per cui P^2 non sarebbe divisoriale. Sia P invece è un ideale primo non massimale, confrontando P^{-1} con $T(P)$ si hanno due possibilità: $P^{-1} = T(P)$ o $P^{-1} \subsetneq T(P)$.
Se $P^{-1} = T(P)$, dalla Proposizione precedente segue che $P^2 = P$ e che $P^n = P$, per cui P^n risulta essere divisoriale per ogni $n \geq 1$. Se invece $P^{-1} \subsetneq T(P)$, la conclusione segue sempre dalla Proposizione precedente.

Teorema 4.12 *Sia R un dominio di Prüfer e P un suo ideale primo non nullo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *P^n è un ideale divisoriale per ogni $n \geq 1$;*
2. *$(R : T(P)) = P_0$;*
3. *$P^2 = (P^2)_v$;*
4. *Vi sono le due possibilità seguenti: o $P^{-1} \subsetneq T(P)$ o P è un ideale divisoriale idempotente.*

Dimostrazione:
L'equivalenza di (1), (2) e (3), segue dalla Proposizione (**??**) e dal suo Corollario si ricava che (1) $\Rightarrow$ (4)
Se $P^{-1} = T(P)$, allora $P^{-n} = P^{-1}$ per ogni n, quindi $P^n = (P^n)_v = P = (P)_v$.

(4) $\Rightarrow$ (3)
Supponiamo inizialmente che P sia un ideale massimale, allora se $P = P^2$, P non è finitamente generato e quindi non può essere divisoriale. Perciò si ha $P^{-1} \subsetneq T(P)$, segue che P è finitamente generato e che P^n è divisoriale per ogni $n \geq 1$. Sia quindi P un ideale primo non massimale, se $P^{-1} \subsetneq T(P)$ la conclusione segue dal Teorema (**??**), mentre se $P = P^2$ e P è divisoriale la tesi discende banalmente.

Consideriamo ora una classe di domini di Prüfer per la quale ogni ideale primo ed ogni sua potenza sia divisoriale.

Definizione:
Si dice che R è un dominio con la #-*proprietà* se, per ogni coppia di sottoinsiemi di $Specm(R)$, V_1 e V_2, $\bigcap_{M \in V_1} R_M \neq \bigcap_{M \in V_2} R_M$.

Definizione:
Si dice che R è un dominio con la ##-*proprietà* se ogni sovranello di R soddisfa la #-proprietà.

Lemma 4.13 *Sia R un dominio di Prüfer e sia P un suo ideale primo non nullo. Se $R' = R_P \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$ con $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R, P)$, allora $PR' = P$.*

Dimostrazione:
Se P è un ideale massimale, allora $R' = R$ e quindi l'asserto è verificato. Posso perciò supporre che P non sia massimale; osserviamo che $R' = P^{-1} = (P : P)$ per cui la conclusione segue dal Corollario (**??**).

Teorema 4.14 *Sia R un dominio di Prüfer. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *R soddisfa la #-proprietà.*

2. *Per ogni ideale massimale N, $\bigcap R_{M_\alpha} \nsubseteq R_N$, dove $M_\alpha \in Specm(R) \setminus \{N\}$.*

3. *Per ogni ideale massimale M, esiste un ideale finitamente generato I tale che M sia l'unico ideale massimale contenente I.*

4. *R è unicamente rappresentabile come intersezione di sovranelli di valutazione di R, privi di relazioni d'inclusione fra loro.*

Dimostrazione:
Per la dimostrazione di questo risultato si rimanda a: [FHP,Th.4.1.6].

Teorema 4.15 *Sia R un dominio di Prüfer, R è un dominio che soddisfa la ##-proprietà $\Leftrightarrow$ esiste un ideale finitamente generato $I \subseteq P$ tale che ogni ideale massimale contenente I contiene anche P*

Dimostrazione:
($\Rightarrow$):
Sia $P \in Spec(R)$, consideriamo il sovranello $R' = R_P \cap \bigcap(R_{M_\alpha})$, con $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R,P)$, R' è un #-dominio di ideali massimali $\{PR'\} \cup \{M_\alpha\}$ e quindi, dal Teorema precedente segue l'esistenza di un ideale finitamente generato I tale che $I \subseteq PR'$ e $I \nsubseteq M_\alpha R'$. Per il Lemma (**??**) I è contenuto in R perché $I \subseteq PR' = R$, pertanto I è un ideale finitamente generato tale che $I \nsubseteq M_\alpha$.
($\Leftarrow$):
Sia S un sovranello di R, i suoi ideali massimali sono della forma $P_\alpha S$ dove, i $P_\alpha \in Spec(R)$ e sono a due a due comassimali, perché non vi sono relazioni d'inclusione fra i corrispondenti ideali di S. Per ipotesi esiste, per ogni ideale primo P_α, un ideale I finitamente generato per cui ogni ideale massimale contenente I contiene anche P_α. $I \nsubseteq P_\beta$, con $\beta \neq \alpha$, perché $P_\beta \nsubseteq P_\alpha$. Perciò IS è un ideale finitamente generato contenuto solo nell'ideale $P_\alpha S$ ed in nessun altro ideale massimale e dal teorema precedente segue la conclusione.

Proposizione 4.16 *Sia R un dominio di Prüfer che gode della ##-proprietà, allora*

1. *Ogni ideale primo P è divisoriale.*
2. *Il prodotto di ideali primi è divisoriale. In particolare le potenze degli ideali primi sono divisoriali.*

Dimostrazione:

1. La conclusione segue dalla caratterizzazione appena fornita per i ##-domini e dal Teorema (**??**).
2. Mostriamo innanzitutto che P^2 è divisoriale: se $P^{-1} \subsetneq T(P)$ oppure se $P = P^2$, non c'è niente da provare in quanto la conclusione discende dal risultato (**??**). Resta quindi da considerare il caso in cui $P \neq P^2$ e $P^{-1} = T(P)$. Osserviamo che questa situazione non si può verificare in un ##-dominio. Supponiamo, per assurdo, che $P^{-1} = R_P \cap (\bigcap R_{M_\alpha}) = T(P) = R_{P_0} \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$. La ##-proprietà implica l'esistenza di un ideale finitamente generato tale che $I \subseteq P$, ma $I \nsubseteq M_\alpha$, per ogni $M_\alpha \in \mathbf{M}'(R, P)$. Quindi, poichè $T(I) \subseteq R_{P_0} \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$, ma $T(I) \nsubseteq R_P$, segue che $R_{P_0} \cap (\bigcap R_{M_\alpha}) \nsubseteq R_P$, da cui discende che $T(I) \neq P^{-1}$, cioè un assurdo.

   Consideriamo allora il prodotto $P_1^{t_1} P_2^{t_2} ... P_n^{t_n}$, dove i P_i sono ideali divisoriali. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che i P_i siano fra loro comassimali, perché in caso contrario se $P_i \subsetneq P_j$, il prodotto $P_i P_j$ potrebbe essere sostituito dal solo P_i; infatti, dal Teorema (**??**), se $P_i^2 \subset P_i P_j \subseteq P_i$, gli ideali primari propri di P_i sono tutte e sole le sue potenze. Per il Corollario (**??**) $P_i^{t_i}$ è divisoriale per ogni i e quindi anche $P_1^{t_1} P_2^{t_2} ... P_n^{t_n} = \bigcap_{i=1}^n P_i^{t_i}$ come intersezione di ideali divisoriali.

Sia ora I un ideale generico di un dominio di Prüfer, resta aperto il problema di stabilire quando I sia divisoriale. Tuttavia è nota una descrizione per una classe di domini di Prüfer i cui ideali sono tutti divisoriali. Consideriamo innanzitutto il caso in cui R è un dominio di valutazione:

Proposizione 4.17 *Sia R un dominio di valutazione con ideale massimale M.*

1. *Ogni ideale di R è divisoriale $\Leftrightarrow$ M è principale.*
2. *Se M non è un ideale finitamente generato, allora $\{aM \mid a \in R \setminus \{0\}\}$ è l'insieme degli ideali non divisoriali di R.*

Dimostrazione:

1. $(\Rightarrow)$
   Poiché ogni ideale di R è divisoriale, in particolare lo è M, per cui dalla Proposizione (**??**) M è finitamente generato e quindi principale, essendo R un dominio di valutazione.
   $(\Leftarrow)$
   Sia $M = (x)$ e ia I un ideale non nullo di R. Indichiamo con I' l'intersezione degli ideali frazionali principali contenenti I; se $y \notin I$ allora $I \subset (y)$ e $(1/y)I \subset R$. Quindi $(1/y)I \subseteq (x)$, da cui segue che $I \subseteq (xy) \subset (y)$ e che $I' \subseteq (y)$, pertanto $y \notin I'$.
2. Se $I = aR$, con $0 \neq a \in R$, allora $I^{-1} = a^{-1}R$ e quindi $I_v = aR \supset I$. Viceversa, sia I un ideale non divisoriale, esiste quindi $a \in I_v \setminus I$ per cui $a^{-1}I \subseteq M$ e $I \subseteq aM \subseteq I_v$. Supponiamo per assurdo che la prima inclusione sia propria e che, quindi, sia possibile scegliere un elemento $x \in aM \setminus I$, segue allora che $(x) \supset I$ e che quindi $(x) \supset I_v$, pertanto,

$aM \supset I_v$ e quindi $aM = I_v$ sebbene, per quanto già verificato, aM non sia un ideale divisoriale di R. Da questo assurdo discende quindi che $aM = I$.

Lemma 4.18 *Sia R un dominio per cui tutti gli ideali non nulli sono divisoriali. Sia I un suo ideale proprio non nullo e M un ideale massimale contenente I. Se $\{B_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali contenenti I, ma non contenuti in M, allora $B = \bigcap B_\alpha$ non è contenuto in M e quindi I è propriamente contenuto in B.*

Dimostrazione:
Innanzitutto osserviamo che $\{B_\alpha\}$ è non vuoto in quanto R vi appartiene; sia allora $B_1 \in \{B_\alpha\}$, $B_1 \nsubseteq M$ e poiché $B_1 = (B_1^{-1})^{-1}$, $P^{-1} \nsubseteq B_1^{-1}$, quindi $B_1^{-1} \cap M^{-1} = R$, sia allora $x \in M^{-1} \setminus R$: se $\{B_i\}_{i=1}^n$ è un sottoinsieme finito di $\{B_\alpha\}$, $\bigcap_{i=1}^n B_i \nsubseteq M$ e quindi $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \{B_\alpha$. Allora $x \notin (\bigcap_{i=1}^n B_i)^{-1} = \sum_{i=1}^n B_i^{-1}$, pertanto $x \notin \sum_\alpha B_\alpha^{-1} = (\bigcap_\alpha)^{-1}$. Segue quindi che $M^{-1} \nsubseteq (\bigcap_\alpha)^{-1}$ e che $\bigcap_\alpha B_\alpha \nsubseteq M$ come volevamo dimostrare.

Lemma 4.19 *Sia R un dominio in cui ogni ideale non zero è divisoriale. Se P è un suo ideale primo non nullo, P è contenuto in un unico ideale massimale.*

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo che esistano due ideali massimali M_1 e M_2 contenenti P. Consideriamo $\{B_\alpha\}$, l'insieme degli ideali che contengono P e non sono contenuti in M_1: segue dal lemma (**??**) che $B = \bigcap B_\alpha \nsubseteq M_1$. Sia quindi $y \in B \setminus M_1$, allora $y^2 \notin M_2$ da cui segue che $P + (y^2) \in \{B_\alpha\}$. $y \in P + (y^2)$, pertanto $y = p + ry^2$ con $p \in P$ e $r \in R$ e $p = y(1 - ry) \in P$. Inoltre $y \notin P$, ma anche $(1 - ry) \notin P$ perchè $y \in B \subseteq M_2$ implica che $(1 - ry) \notin M_2$ ed

quindi neanche a P. Ma allora risulterebbe che P non è un ideale primo, cioè un assurdo.

Lemma 4.20 *Sia R un dominio in cui ogni ideale è divisoriale. Se I è un suo ideale non nullo, I è contenuto solo in numero finito di ideali massimali.*

Dimostrazione:
Sia $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che contengono I. Sia T_α l'intersezione degli ideali di R contenenti I ma non contenuti in M_α: dal lemma (**??**) $T_\alpha \nsubseteq M_\alpha$, quindi $I \subseteq \sum T_\alpha = T$ dove $T \nsubseteq M_\alpha$ per ogni α. Perciò $T = R$ e $1 = \sum_{i=1}^{n} t_i$ con $t_i \in T_i \in \{T_\alpha\}$. Pertanto $R = \sum_{i=1}^{n} T_i$, da cui segue che $\{M_\alpha\} = \{M_i\}_{i=1}^{n}$.

Teorema 4.21 *Sia R un dominio integralmente chiuso le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Ogni ideale di R è divisoriale*
2. *R soddisfa le seguenti condizioni:*
   - (i) *R è un dominio di Prüfer*
   - (ii) *Gli ideali massimali di R sono finitamente generati*
   - (iii) *Ciascun ideale primo di R è contenuto in un unico ideale massimale*
   - (iv) *Ogni ideale di R ha solo un numero finito di primi minimali*

Dimostrazione:
$(1) \Rightarrow (2)$
Se R è integralmente chiuso ed i suoi ideali finitamente generati sono divisoriali R è un dominio di Prüfer (cfr.[G,Prop 34.12]). Dalla Proposizione (**??**) segue quindi che ogni ideale massimale di R è finitamente generato, mentre

dal Lemma (**??**) discende che ogni ideale primo di R è contenuto in un unico ideale massimale. Infine dal Lemma (**??**) si ha che ogni ideale di R appartiene solo ad un numero finito di ideali massimali; essendo R un dominio di Prüfer, gli ideali primi contenuti in uno stesso ideale massimale sono ordinati per inclusione, pertanto anche il numero di ideali primi minimali di ogni ideale di R è finito.

$(2) \Rightarrow (1)$

Sia R un dominio di Prüfer che soddisfa le proprietà sopra elencate e sia I un suo ideale non nullo. Se $\{M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali massimali contenenti I, allora $I = \bigcap IR_{M_\alpha} \cap R$, quindi per dimostrare la tesi basterà verificare che IR_M è divisoriale per ogni ideale massimale $M \in \{M_\alpha\}$. Poiché M è finitamente generato R_M è un dominio di valutazione il cui ideale massimale è principale, allora ogni ideale di R_M è divisoriale per quanto già mostrato nella Proposizione (**??**). $IR_M = \bigcap x_\beta R_M$, con $x_\beta \in M$; ogni x_β appartiene per ipotesi solo ad un numero finito di ideali massimali; siano quindi $\{N_i\}_{i=1}^n$ gli ideali massimali distinti da M contenenti x_β. Il radicale di $x_\beta R_M$ è un ideale primo, pertanto $\sqrt{x}_\beta R_M \cap R$ è un ideale primo contenuto in M. Ma allora $\sqrt{x}_\beta R_M \cap R$ non è contenuto in nessun ideale massimale N_i e quindi è possibile considerare un elemento $y \in x_\beta R_M \cap R$ tale che $y \notin N_i$ per ogni i. Segue perciò che M è l'unico ideale massimale contenente (x_β, y) e che quindi $(x_\beta, y) = (x_\beta, y)R_M \cap R = (x_\beta)R_M$ è un ideale finitamente generato. Quindi, essendo R un dominio di Prüfer, risulta che $x_\beta R_M \cap R$ è divisoriale.

Consideriamo quindi un esempio di dominio di Prüfer i cui ideali non nulli sono tutti divisoriali:

Esempio:

Sia $\{V_i\}_{i=1}^n$ una collezione di domini di valutazione rispettivamente con ideale massimale M_i principale. Consideriamo quindi $R = \bigcap V_i$; R è un dominio di Prüfer di ideali massimali $\{M_1, .., M_n\}$ principali (cfr.[G, Th.22.8]). R soddisfa quindi le ipotesi del Teorema (**??**) ed i suoi ideali sono pertanto tutti divisoriali.

Infine osserviamo che i domini di Prüfer i cui ideali sono tutti divisoriali appartengono alla classe dei ##-domini.

Proposizione 4.22 *Sia R un dominio di Prüfer i cui ideali sono tutti divisoriali, allora R è un ##-dominio*

Dimostrazione:
Sia P un ideale primo non nullo di R, dal Teorema (**??**), P è contenuto in un unico ideale massimale. Sia $x \in P$, allora, sempre per il Teorema (**??**), (x) è contenuto in numero finito di primi minimali: $\{P_1, .., P_n\}$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $P_1 \subseteq P$. Consideriamo quindi per ogni $i = 2, .., n$, M_i, cioè l'unico ideale primo contenente P_i. Se $y \in P_1 \setminus \bigcap_{i=2}^n M_i$, $I = (x, y)$ è un ideale finitamente generato contenuto in P e tale che ogni ideale contenente I, contiene anche P, pertanto, dal Teorema (**??**), R è un ##-dominio

Bibliografia

[G] Gilmer, R. *Multiplicative ideal theory*, Dekker, New York, 1972.

[FHP] Fontana, Huckaba, Papick *Prüfer domains*, Dekker,

[SZ] Samuel, Zariski *Commutative Algebra, vol 1, 2*, Springer

[W] van der Waerder, *Algebra, vol 1, 2*,

[K] Krull W.,*Idealtheorie* , Springer-Verlag, Berlino,1932.

[N] Nagata M. *Local rings*, Wiley (Interscience), New York, 1962.

[1] Anderson, When the dual of an ideal is a ring,

[2] Brewer J., The ideal transform and overrings of an integral domain, *Math.Z*, 107 (1968).

[3] Butts H. S., Smith W. W., Prüfer rings, *Math. Z.*, 95 (1967).

[4] Clifford, Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups. *Ann. Math.*, 39 (1938).

[5] Davis E. D., Overrings of commutative rings II. Integrally closed overrings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110 (1964).

[6] Edwards, Dedekind's invention of ideals. *Bull.London Math. Soc.*, 15 (1985)

[7] Fontana M., Huckaba J., Papick I., Divisorial prime ideals in Prüfer domains *Canadian Bull. Math.*,27 (1984).

[8] Fontana M., Huckaba J., Papick I., Some properties of divisorial prime ideals in Prüfer domains, *J. Pure Appl. Algebra*,39,(1984).

[9] Fontana M., Huckaba J., Papick I., Roitman, Prüfer domains and their endomorphism rings,

J. Algebra, 1984.

[10] Gilmer R.,Overrings of Prüfer domains,
J. Algebra, 4 (1966).

[11] Gilmer R., Heinzer W., Overrings of Prüfer domains II
J.Algebra,7 (1967).

[12] Heinzer W., Integral domains in which each non zero ideal is divisorial
Mathematika, 15 (1968).

[13] Huckaba J., Papick I., When the dual of an ideal is a ring
Manuscripta Math.,37 (1982).

[14] Jensen C. U., On characterizations of Prüfer rings,
Math.Scand.,13 (1963).

[15] Neumann, Zur Prüferschen Theorie der Idealen Zahlen,
, 1929.

[16] Prüfer, H.,Untersuchungen über Teilbarketiseigenschaften in Körpern,
,*J.Reine Angew. Math.*,168 (1932).

[17] ,
.

[]
.

[] ,
.

[]