Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

Polinomi gaussiani ed invertibilità

Candidato
Elena Miccichelli

Relatore
Prof.ssa Florida Girolami

Anno Accademico 2009-2010
Maggio 2011

Classificazione AMS: 13B25.

Parole chiave: contenuto, Lemma di Gauss, Lemma di Dedekind-Mertens, polinomi gaussiani, ideali invertibili e ideali localmente principali.

Polinomi gaussiani ed invertibilità

L'analisi del mio lavoro di tesi ha come oggetto lo studio del contenuto di un polinomio, evidenziandone nel tempo l'evoluzione algebrica e gli ambiti di applicazione.

Definizione 0.0.1. [13] Siano S un anello e $R \subseteq S$ un suo sottoanello. Sia $f(X) \in S[X]$; definiamo *contenuto* di $f(X)$ l'R-sottomodulo di S generato dai coefficienti di $f(X)$ e lo denotiamo con $\mathfrak{c}_R(f)$.
Se $f(X) \in R[X]$, denoteremo $\mathfrak{c}_R(f)$ con $\mathfrak{c}(f)$.

Fondamentali risultano le seguenti proprietà del contenuto: siano $f(X)$, $g(X) \in S[X]$ con $\deg g = n$, allora

$$\mathfrak{c}_R(fg) \subseteq \mathfrak{c}_R(f)\mathfrak{c}_R(g)^1 \tag{1}$$

$$\mathfrak{c}_R(f)^n \mathfrak{c}_R(fg) = \mathfrak{c}_R(f)^{n+1}\mathfrak{c}_R(g) \tag{2}$$

Gauss, per primo afferma, nel suo scritto *Disquisitiones Arithmeticae* (Art.

[1] Un esempio in cui vale l'inclusione stretta è il seguente: sia
$R = \mathbb{Z}[2i] = \{a + 2ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$, $f(X) = 2 + 2iX$ e $g(X) = 2 - 2iX$ polinomi in $R[X]$. Il contenuto del polinomio $f(X)$ è $\mathfrak{c}_R(f) = (2, 2i)$ che notiamo essere uguale a $\mathfrak{c}_R(g)$.
$f(X)g(X) = 4X^2 + 4$, quindi $\mathfrak{c}_R(fg) = (4)$.
A questo punto è facile vedere che $\mathfrak{c}_R(fg) = (4) \subsetneq (2, 2i)^2 = (4, 4i) = \mathfrak{c}_R(f)\mathfrak{c}_R(g)$, infatti $4i \notin \mathfrak{c}_R(fg)$ poiché $i \notin \mathbb{Z}[2i]$.

42), che presi comunque due polinomi a coefficienti interi $f(X), g(X)$ la proprietà (1) risulta essere un'uguaglianza. Quindi possiamo enunciare la seguente:

Definizione 0.0.2. [13] Siano S un anello e $R \subseteq S$ un suo sottoanello. Un polinomio $f(X) \in S[X]$ *è gaussiano* su R se $\mathfrak{c}_R(fg) = \mathfrak{c}_R(f)\mathfrak{c}_R(g)$ per ogni polinomio $g(X) \in S[X]$.

La proprietà gaussiana, innovativa e di rilievo per quei tempi, riguardava una ristretta classe di anelli, motivo per il quale a partire dalla seconda metà del ventesimo secolo, alcuni studiosi tra i quali Tsang, Arnold e Sheldon cercarono di ampliarne l'ambito di applicazione.
Nel 1965, Tsang nel suo elaborato di tesi intitolato $Gauss's\ Lemma$, ha introdotto una nuova classe di polinomi, denominati polinomi super-primitivi.

Definizione 0.0.3. Sia D un dominio.
Un polinomio non nullo $f(X) \in D[X]$ si dice *primitivo* se soltanto gli elementi invertibili di D dividono ciascun coefficiente di $f(X)$, o equivalentemente si ha

$$\mathfrak{c}(f)^{-1} \cap \{d^{-1} \quad | \quad d \in D - \{0\}\} = \mathscr{U}(D).$$

In altre parole, $f(X)$ si dice *primitivo* se $\mathfrak{c}(f)$ non è contenuto in alcun ideale principale proprio di D.

Definizione 0.0.4. [20] Sia D un dominio.
Un polinomio non nullo $f(X) \in D[X]$ si dice $super-primitivo$ se $\mathfrak{c}(f)^{-1} = D$.

Tsang oltre ad aver dimostrato che super-primitivo implica primitivo, ha provato che in un MCD-dominio queste nozioni sono equivalenti, ottenendo come risultato la generalizzazione del Lemma di Gauss agli MCD-domini.
Inoltre, Tsang è riuscita a proporre una caratterizzazione perchè D sia un MCD-dominio in termini di condizioni su $D[X]$ nel seguente:

Teorema 0.0.5. *[20] Sia D un dominio, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *D è un* MCD*-dominio.*
2. *Ogni $f(X) \in D[X]$ lineare è il prodotto di un polinomio super-primitivo con un elemento di D.*
3. *(a) Ogni $f(X) \in D[X]$ lineare è prodotto di un polinomio primitivo con un elemento di D.*

   (b) In $D[X]$ il prodotto di due polinomi primitivi lineari è primitivo.
4. *Per ogni ideale primo non nullo P in $D[X]$ tale che $P \cap D = (0)$, P è principale.*
5. *Per elementi non nulli $a, b \in D$, l'ideale $(a+bX)K[X] \cap D[X]$ in $D[X]$ è principale.*

Nove anni dopo gli studiosi Arnold e Sheldon in [4] si sono interrogati su quali domini valesse la proprietà gaussiana, arrivando a dimostrare che essa è indipendente dal numero di indeterminate. Nel loro lavoro, hanno dato delle condizioni necessarie e sufficienti per D, le quali ci assicurano la validità della proprietà gaussiana in $D[X]$. Notiamo che la PSP-proprietà [2] è una condizione necessaria, ma non sufficiente per la GL-proprietà [3]. Si ha la seguente caratterizzazione dei domini D, per i quali $D[X]$ ha la GL-proprietà.

Teorema 0.0.6. *[4] Sia D un domino, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

[2] Un dominio D soddisfa la PSP-proprietà se ogni polinomio primitivo in $D[X]$ è super-primitivo, o equivalentemente, se per $a_1, \cdots, a_n \in D - \{0\}$ esiste il loro MCD, allora esiste anche il loro mcm.

[3] Un dominio D soddisfa la GL-proprietà se il prodotto di due polinomi primitivi in $D[X]$ è primitivo.

1. *$D[X]$ ha la GL-proprietà.*

2. *$D[\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}]$ ha la GL-proprietà per ogni insieme non vuoto di indeterminate $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

3. *D soddisfa le tre condizioni:*

   (a) *D ha la PSP-proprietà;*

   (b) *D è integralmente chiuso;*

   (c) *Se B e C sono ideali frazionari finitamente generati di D tali che $(BC)_v = D$, allora B_v è un ideale frazionario principale.*

La proprietà (2) del contenuto dei polinomi, chiamata Lemma di Dedekind-Mertens, è stata utilizzata, per dimostrare che un dominio è gaussiano se e soltanto se è di Prüfer [4] e per mostrare che se il contenuto di un polinomio a coefficienti in un dominio è invertibile, allora il polinomio è gaussiano:

Proposizione 0.0.7. *Siano D un dominio ed $f(X) \in D[X]$. Se $\mathfrak{c}(f)$ è un ideale invertibile, allora $f(X)$ è gaussiano.*

Dimostrazione Siano $f(X), g(X) \in D[X]$ ed $n = \deg(g)$. Allora per il lemma di Dedekind-Mertens:

$$\mathfrak{c}(fg)\mathfrak{c}(f)^n = \mathfrak{c}(f)^{n+1}\mathfrak{c}(g).$$

Dato che il contenuto del polinomio $f(X)$ è invertibile per ipotesi, possiamo moltiplicare il primo e il secondo membro per $(\mathfrak{c}(f)^{-1})^n$:

$$\mathfrak{c}(fg)\mathfrak{c}(f)^n(\mathfrak{c}(f)^{-1})^n = \mathfrak{c}(f)^{n+1}\mathfrak{c}(g)(\mathfrak{c}(f)^{-1})^n.$$

Semplificando otteniamo $\mathfrak{c}(fg) = \mathfrak{c}(f)\mathfrak{c}(g)$, cioè il nostro polinomio è gaussiano. ■

[4] Un dominio D è di Prüfer se ogni ideale non nullo finitamente generato è invertibile.

Anderson e Kang hanno ottenuto lo stesso risultato nel caso degli anelli, dimostrandolo senza far uso del Lemma di Dedekind-Mertens, nello specifico:

Proposizione 0.0.8. $[Anderson - Kang]$ *Siano R un anello e $T(R)$ il suo anello totale dei quozienti. Sia $f(X) \in T(R)[X]$ tale che $\mathfrak{c}_R(f)$ è localmente principale, allora*

$$\mathfrak{c}_R(fg) = \mathfrak{c}_R(f)\mathfrak{c}_R(g)$$

per ogni polinomio $g(X) \in T(R)[X]$.

Dimostrazione Per prima cosa riduciamoci al caso in cui (R, M) è locale e $f(X) \in R[X]$. Così $\mathfrak{c}_R(f)$ è principale e possiamo scrivere $\mathfrak{c}_R(f) = (a_i)$ per qualche i. Possiamo ulteriormente ridurci al caso in cui a_i è invertibile e quindi $\mathfrak{c}_R(f) = R$. In altre parole abbiamo supposto $a_0, \cdots, a_{i-1} \in M$ e $a_i = 1$ invertibile, allora per ogni $g(X) \in T(R)[X]$ si ha che

$$\mathfrak{c}_R(fg) + (a_0, \cdots, a_{i-1})\mathfrak{c}_R(g) = \mathfrak{c}_R(g).$$

Infine dal lemma di Nakayama segue $\mathfrak{c}_R(fg) = \mathfrak{c}_R(g)$. ■

Lo scopo di recenti lavori è stato quello di provare l'inverso della proposizione 0.0.7, in altre parole rispondere alla seguente domanda, posta come **congettura** per i domini da Kaplansky e dalla sua studentessa Tsang:

il contenuto di un polinomio gaussiano è un ideale invertibile?

Nel 1995, Glaz e Vasconcelos in [15], utilizzarono un approccio basato sulle funzioni di Hilbert e provarono la validità della congettura per i seguenti domini:

- Domini locali integralmente chiusi con campi residui di caratteristica $p > 0$.
- Domini Noetheriani integralmente chiusi.

- Domini con la proprietà dei due generatori.

Successivamente, Heinzer e Huneke, estesero i risultati trovati da Glaz e Vasconcelos utilizzando un approccio diverso.
Essi, infatti, per provare la congettura per tutti gli anelli localmente Noetheriani, si sono ricondotti al caso degli anelli approssimatamente di Gorenstein.

Definizione 0.0.9. [16] Un anello locale Noetheriano (R, M) è un anello **approssimatamente di Gorenstein** se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. Per ogni $N > 0$ esiste $I \subseteq M^N$ tale che $\frac{R}{I}$ è di Gorenstein.

2. Per ogni $N > 0$ esiste un ideale M-primario irriducibile $I \subseteq M^N$.

In particolare essi hanno mostrato i seguenti risultati:

- Se R è un anello localmente Noetheriano e localmente approssimatamente di Gorenstein, allora ogni polinomio gaussiano su R ha contenuto localmente principale.

- Siano (R, M) un anello locale Noetheriano e $(\widehat{R}, \widehat{M})$ il completamento M-adico di R. Un polinomio $f(X)$ a coefficienti in R è gaussiano su R (rispettivamente gaussiano per polinomi di grado al più n su R)[5] se e solo se $f(X)$ è gaussiano su $\widehat{R}$ (rispettivamente gaussiano per polinomi di grado al più n su $\widehat{R}$.).

- Sia (R, M) un anello locale Noetheriano completo e sia

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

[5]Un polinomio $f(X) \in R[X]$ si dice gaussiano per polinomi di grado al più n su R se

$$\mathfrak{c}(fg) = \mathfrak{c}(f)\mathfrak{c}(g)$$

per tutti i polinomi $g(X) \in R[X]$ con $\deg g \leq n$.

un polinomio di grado n. Sia $f(X)$ gaussiano per polinomi di $R[X]$ di grado al più n. Allora $c(f) = (a_0, \cdots, a_n)R$ è principale.

- Sia R un anello localmente Noetheriano e sia $f(X)$ un polinomio regolare in $R[X]$ di grado n. Se $f(X)$ è gaussiano per polinomi di grado al più n, allora $f(X)$ è gaussiano e ha contenuto invertibile.

- Sia R un dominio localmente Noetheriano. Un polinomio $f(X)$ di grado $n > 0$ in $R[X]$ ha contenuto invertibile se $\mathfrak{c}(fg) = \mathfrak{c}(f)\mathfrak{c}(g)$ per tutti i polinomi $g(X)$ di grado al più n.

Il lavoro più significativo, riguardante la congettura di Tsang e Kaplansky, è quello di *Loper e Roitman* del 2004, [19].
Per dimostrare la validità della congettura di Tsang-Glaz-Vasconcelos per ogni dominio, Loper e Roitman si sono ispirati al lavoro di Glaz e Vasconcelos. Visto che la proprietà gaussiana di un polinomio $f(X)$ a coefficienti in R è locale [6], essi hanno potuto suppore che il dominio R fosse locale.
Provata la congettura di Tsang per i domini locali, Loper e Roitman hanno esteso la validità della congettura agli anelli R che sono localmente domini di integrità.
Hanno anche dimostrato che se l'anello R è localmente un dominio, allora un polinomio non nullo di $R[X]$ è gaussiano se e soltanto se il suo contenuto è localmente principale.
Prima di presentare il loro lavoro dobbiamo introdurre dei concetti e delle proposizioni che saranno utili nelle dimostrazioni successive.

Definizione 0.0.10. [10] Sia I un ideale di un anello locale R, diremo che:

1. I *è* **stabile** se esiste un $x \in I$ tale che $xI = I^2$.

[6] Sia R un anello, allora $f(X)$ è gaussiano in $R[X]$ se e solo se l'immagine di $f(X)$ è gaussiana in $R_M[X]$, per ogni ideale massimale M di R

2. I è **prestabile** se qualche potenza di I è stabile, cioè per qualche intero $r \geq 1$ esiste un $x \in I^r$ tale che $xI^r = I^{2r}$.

In generale un ideale I di un anello R è stabile (o prestabile) se IR_P è stabile (o prestabile) per ogni ideale primo $P \subset R$.

Definizione 0.0.11. [10] Sia I un ideale di un anello R, diremo che $x \in I$ è $\mathbf{I}-$**trasversale** se per qualche intero $n > 0$, $xI^n = I^{n+1}$.

Proposizione 0.0.12. *[10] Sia I un ideale finitamente generato di un anello locale (R, M). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *I è prestabile.*
2. *Esiste un intero $b(I)$ tale che per ogni n, I^n ha $b(I)$ generatori.*
3. *Qualche potenza di I ha un elemento trasversale.*
4. *Esiste un intero positivo n tale che I^n ha n generatori.*

Inoltre, se I è regolare e I^n ha n generatori, allora I^{n-1} è stabile.

Dimostrazione Rimandiamo al corollario 1 di [10]. ■

Proposizione 0.0.13. *[10] Sia R un anello locale e I un ideale in R tale che per qualche intero positivo n, I^n ha al più n generatori, allora I^{n+e} ha al più n generatori per ogni intero $e \geq 0$.*
Se I contiene un elemento regolare e I^n ha t generatori con $t \leq n$, allora I^{t-1} e tutte le potenze successive hanno t generatori.

Dimostrazione Rimandiamo al corollario 2 di [10]. ■

Proposizione 0.0.14. *[10] Sia I un ideale finitamente generato di un dominio integralmente chiuso D. Allora I è invertibile se e soltanto se è prestabile.*

Dimostrazione Rimandiamo al lemma F di [10]. ■

Definizione 0.0.15. [19] Sia I un ideale finitamente generato in un dominio D, definiamo con $\nu(I)$ il **numero minimo di generatori** di I.

Per dimostrare che il contenuto di $f(X)$ è invertibile, prima di tutto Loper e Roitman hanno osservato che $\nu(c(f)^n)$ è limitato, poi hanno concluso che $c_{D'}(f) = c_D(f)D'$ è invertibile in D', chiusura integrale di D.
Per limitare il numero dei generatori di $c(f)^n$ hanno usato la seguente proposizione, che lega $f(X)$ e $f(X^n)$:

Proposizione 0.0.16. *[19] Sia D un dominio. Sia $f(X) \in D[X]$ e $n \geq 1$, allora $f(X)$ è gaussiano se e soltanto se $f(X^n)$ è gaussiano.*

Dimostrazione Sia $g(X)$ un qualunque polinomio in $D[X]$.
$\Rightarrow$) Scriviamo il polinomio

$$g(X) = h_0(X^n) + Xh_1(X^n) + \cdots + X^{n-1}h_{n-1}(X^n)$$

con $h_i(X) \in D[X]$, per $i = 0, \cdots, n-1$.
Visto che il polinomio $f(X)$ è gaussiano per ipotesi, questo significa che:
$\mathfrak{c}(f(X^n))\mathfrak{c}(g(X)) = \mathfrak{c}(f(X^n)) \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(h_i(X^n)) =$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(f(X^n))\mathfrak{c}(h_i(X^n)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(f(X))\mathfrak{c}(h_i(X)) = \text{(per la gaussianeità)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(f(X)h_i(X)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(f(X^n)X^i h_i(X^n)) =$$

$$= \mathfrak{c}(f(X^n) \sum_{i=0}^{n-1} X^i h_i(X^n)) =$$

$$= \mathfrak{c}(f(X^n)g(X)),$$

quindi $f(X^n)$ risulta essere gaussiano.

$\Leftarrow$) Sappiamo che $f(X^n)$ è gaussiano, quindi otteniamo:

$\mathfrak{c}(f(X)g(X)) = \mathfrak{c}(f(X^n)g(X^n)) =$

$$= \mathfrak{c}(f(X^n))\mathfrak{c}(g(X^n)) =$$

$$= \mathfrak{c}(f(X))\mathfrak{c}(g(X)),$$

quindi $f(X)$ risulta essere gaussiano. ∎

Lemma 0.0.17. *[19] Siano D un dominio locale, $f(X) \in D[X]$ un polinomio gaussiano e $I = \mathfrak{c}(f)$. Allora*

$$\nu(I^n) \leq \deg(f) + 1$$

per $n \geq 1$ sufficientemente grande.

Dimostrazione Per la proposizione 0.0.13, è sufficiente mostare che

$$\nu(I^{2^m}) \leq \deg(f) + 1$$

per tutti gli $m \geq 0$.

Scriviamo $f(X)$ nella seguente forma:

$$f(X) = g_0(X^2) + Xg_1(X^2)$$

con $g_0(X), g_1(X) \in D[X]$.

Essendo $f(X)$ gaussiano per ipotesi e $\mathfrak{c}(f(-X)) = \mathfrak{c}(f(X))$ otteniamo:

$I^2 = (\mathfrak{c}(f))^2 =$

$$= \mathfrak{c}(f(X))\mathfrak{c}(f(-X)) =$$

$$= \mathfrak{c}(f(X)f(-X)) = \text{(per la gaussianeità)}$$

$$= \mathfrak{c}(g_0(X^2)^2 - X^2 g_1(X^2)^2) =$$

$$= \mathfrak{c}(g_0(X)^2 - Xg_1(X)^2).$$

Dato che il $\deg(g_0(X)^2 - Xg_1(X)^2) = \deg(f(X))$ otteniamo che

$$\nu(I^2) \leq \deg(f) + 1.$$

Inoltre, per la proposizione 0.0.16, il polinomio $g_0(X)^2 - Xg_1(X)^2$ *è* gaussiano poich*é* $g_0(X^2)^2 - X^2 g_1(X^2)^2 = f(X)f(-X)$ *è* prodotto di due polinomi gaussiani.
Procedendo per induzione su m si ottiene la tesi. ∎

A questo punto Loper e Roitman hanno dimostrato che il contenuto di $f(X)$ è invertibile nella chiusura integrale di D:

Lemma 0.0.18. *[19] Sia D un dominio locale con chiusura integrale D'. Se $f(X) \in D[X]$ è un polinomio gaussiano, allora $\mathfrak{c}_{D'}(f) = \mathfrak{c}_D(f)D'$ è invertibile in D'.*

Dimostrazione Dal lemma 0.0.17 abbiamo visto che $\nu(\mathfrak{c}_{D'}(f^n))$ *è* limitato quindi per la proposizione 0.0.12, l'ideale $\mathfrak{c}_{D'}(f)$ *è* prestabile e per la proposizione 0.0.14 *è* un ideale invertibile in D'. ∎

Da qui otteniamo il teorema pi*ù* importante:

Teorema 0.0.19. *[19] Sia R un anello che è localmente un dominio. Un polinomio non nullo a coefficienti in R è gaussiano se e soltanto se il suo contenuto in R è localmente principale.*

Dimostrazione Possiamo supporre che R sia un dominio locale,
$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \neq 0$ gaussiano in $R[X]$ e $I = \mathfrak{c}_R(f)$. Sappiamo dal lemma 0.0.18 che IR' *è* invertibile in R'.
Sia $1 = \sum_{i=0}^n z_ia_i$ con $z_i \in (R' : I)$ per ogni i. Sia

$$g(X) = f(X)\sum_{i=0}^{n} z_{n-i}X^i = (\sum_{i=0}^{n} a_iX^i)(\sum_{i=0}^{n} z_iX^{n-i}).$$

Osserviamo che $g(X)$ è un polinomio di $R'[x]$. Notiamo che il coefficiente di X^n del polinomio $g(X)$ è 1 perchè abbiamo posto che $1 = \sum_{i=0}^n z_ia_i$ e $f(X)$ divide $g(X)$ in $K[X]$, con K campo quoziente di R. Quindi possiamo riscrivere $g(X)$ in questo modo:

$$g(X) = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i X^i \; con \; \alpha_n = 1.$$

Per ogni $i \neq n$ esiste un polinomio monico $h_i \in R[X]$ tale che
$h_i(\alpha_i) = 0$; decomponiamo tutti gli h_i in fattori lineari su D estensione intera di R contenente R' cioè:

$$h_i(X) = \prod_{j=1}^{m_i} (X - \beta_{ij}).$$

Sia $\varphi(X)$ il prodotto di tutti i polinomi $\sum_{i=0}^{2n} \beta_{ij} X^i$ con $0 \leq j_i \leq m_i$,
$i \neq n$, $j_n = 0$ e $\beta_{n,0} = 1$. I coefficienti di $\varphi(X)$ possono essere espressi come polinomi negli elementi β_{ij} simmetrici per ogni sequenza di indeterminate $X_{i1}, \cdots, X_{im_i}$ con $i \neq n$. Così tutti i coefficienti di $\varphi(X)$ sono in R. Inoltre $\varphi(X)$ è un prodotto di polinomi in $D[X]$ con contenuto invertibile in D e poichè D è intera su R allora $\mathfrak{c}(\varphi)$ è invertibile in R. Inoltre
$\varphi(X) = f(X)\psi(X)$ per qualche $\psi(X) \in K[X]$ con $f(X)$ gaussiano quindi $\mathfrak{c}(\varphi) = \mathfrak{c}(f)\mathfrak{c}(\psi)$ allora $\mathfrak{c}(f)$ è invertibile. ■

Il teorema 0.0.19 implica che la proprietà gaussiana di un polinomio su un dominio D dipende soltanto dal suo contenuto.

In conclusione, attraverso il lavoro di Loper e Roitman, possiamo affermare che la risposta alla congettura evidenziata dall'intuizione di Tsang e Kaplansky trova la sua completa applicazione per l'intera classe dei domini.

Bibliografia

[1] D. D. Anderson, *GDC domains, Gauss' Lemma, and contents of polynomials*, Non-Noetherian commutative ring theory, 1-31, Math. Appl., 520, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[2] D. D. Anderson e B. G. Kang, *Content Formulas for Polynomials and Power Series and Complete Integral Closure*, Journal of Algebra 181, pagine 82-94, 1996.

[3] J. T. Arnold e R. Gilmer, *On the Contents of Polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 24, pagine 556-562, 1970.

[4] J. T. Arnold e P. Sheldon, *Integral Domains that satisfy Gauss's Lemma*, Michigan, Math. J. 22, pagine 39-51, 1995.

[5] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra.*

[6] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1972.

[7] A. Corso e S. Glaz, *Gaussian Ideals and the Dedekind-Mertens Lemma.*

[8] A. Corso, W. V. Vasconcelos, R. H. Villarreal, *Generic Gaussian Ideals*, Journal of Pure and Applied Algebra 125, pagine 117-127, 1998.

[9] R. Dedekind, *Ueber einen arithmetishen Satz von Gauss*, Mitt. Deut. Math. Gesell. Prague, 1892 pag. 1-11.

[10] P. Eakin e A. Sathaye, *Prestable Ideals*, Journal of Algebra 41, pagine 439-454, 1976.

[11] H. M. Edwards, *Divisor Theory*, Birkäuser, Boston, Basel and Berlin, 1990.

[12] L. Kronecker, *Zur Theorie der formen hoherer stufen*, Monatsber Akad Wiss., Berlin, 1883, pag. 957-960.

[13] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, 1972.

[14] S. Glaz e W. V. Vasconcelos ,*Gaussian Polynomials*, pagine 325-337.

[15] S. Glaz e W. V. Vasconcelos ,*The Content of Gaussian Polynomials*,Journal of Algebra 202, pagine 1-9,1998.

[16] W. Heinzer e C. Huneke, *Gaussian Polynomials and Content Ideals*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 125, pagine 739-745,1997.

[17] Kaplansky, *Commutative rings*, The university of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1974.

[18] Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Boston, Basel, Berlin, Birkhäuser, 1985.

[19] K. A. Loper e M. Roitman, *The Content of a Gaussian Polynomial is Invertible*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 133, pagine 1267-1271, 2004.

[20] H. T. Tang, *Gauss' Lemma*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 35, pagine 372-376, 1972.

[21] O. Zariski e P. Samuel, *Commutative Algebra*, Springer, 1958.