UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Francesca Mazzini

# La Geometria della Superficie di Veronese

Relatore
Prof. Edoardo Sernesi

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001
FEBBRAIO 2002

Classificazione AMS : 14N05, 14N15, 14N25
Parole Chiave : Spazio proiettivo, conica, dualità

Oggetto di questa tesi è lo studio delle coniche di un piano e la loro rappresentazione in $\mathbf{P}^5$.
Si tratta di un argomento classico di geometria algebrica al quale si sono dedicati alcuni importanti matematici, tra cui Corrado Segre, Bertini, Veronese, Aschieri, Cayley, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo.
La fonte principale cui abbiamo fatto riferimento per il nostro lavoro è l'articolo di Corrado Segre "Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette", scritto tra il 1884 e il 1885 in seguito ad alcune questioni poste da Cayley e al tentativo di Aschieri di rappresentare i complessi lineari di rette sulle coniche di un piano. Durante il suo studio, Corrado Segre, si rende conto però che quest'ultima rappresentazione, benché interessante, non è un mezzo utile né per lo studio della geometria proiettiva della retta e dei suoi complessi lineari né per quello della geometria proiettiva del piano e delle sue coniche. Per tale motivo decide di non approfondirla. Molto più interessante, invece, è la rappresentazione delle coniche di un piano in $\mathbf{P}^5$ la quale permette di vedere un argomento apparentemente molto elementare, quale lo studio delle coniche, oggi trattato anche in corsi di geometria di base, da un punto di vista diverso, più elevato, più complesso, attraverso oggetti molto belli e interessanti, quali ad esempio la Superficie di Veronese. Per tale motivo abbiamo deciso di occuparci solamente di questa seconda rappresentazione.
Nel suo articolo C. Segre, dopo aver introdotto la corrispondenza tra coniche (inviluppo) di un piano e varietà di punti di $\mathbf{P}^5$, la sfrutta, unitamente ad alcune relazioni esistenti tra le coniche del piano, per studiare alcune varietà di punti di $\mathbf{P}^5$ e ricavare così anche altre informazioni sulle coniche. Con lo

stesso spirito analizza i fasci e le reti di coniche tutte degeneri. Le proprietà delle suddette varietà di $\mathbf{P}^5$ permettono di ritrovare la geometria delle coniche da una nuova prospettiva.
Obbiettivo principale di questa tesi è quello di fornire una trattazione essenzialmente elementare, ma completa in tutti i dettagli di un argomento molto suggestivo e interessante del quale, purtroppo, non si ha traccia se non nella letteratura matematica di fine '800.

Per le nozioni di geometria algebrica assunte come note si fa riferimento al corso di "Istituzioni di Geometria Superiore" tenuto dal Prof. Edoardo Sernesi nell'a.a.1983/1984 e al testo [3].

Abbiamo suddiviso la tesi in due parti: nella prima parte si trovano delle nozioni di geometria algebrica, generalmente non trattate negli usuali corsi, necessarie per studiare la corrispondenza tra coniche di un piano e varietà di punti di $\mathbf{P}^5$ trattata nella seconda parte del lavoro.
Vediamo in dettaglio com'è strutturata la tesi.

**Primo capitolo**

Nel primo paragrafo si introduce il concetto di polarità partendo dalla seguente definizione:

**Definizione 1** *Sia $z$ un punto di $\boldsymbol{P}^r$ e sia $f(x) = 0$ un'ipersuperficie di $\boldsymbol{P}^r$ di ordine $n$. Per ogni intero $s$ con $1 \leq s \leq n-1$ l'equazione*

$$0 = \Delta_z^s f(x) = \left( z_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \ldots + z_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right)^s f(x)$$

*è, nelle $x$, un'ipersuperficie d'ordine $n-s$ detta* polare s-esima (o di indice $s$) o polare d'ordine $n-s$ di $z$ rispetto a $f(x) = 0$.

Tra i principali teoremi ad essa relativi, abbiamo:

**Teorema 1 (Teorema dell'appartenenza)** *Un punto $z$ appartiene alla sua polare d'indice $s$, $1 \leq s \leq n-1$, rispetto ad un'ipersuperficie $f$ (d'ordine $n$) se e soltanto se $z$ giace su $f$.*

**Teorema 2 (Teorema di reciprocità)** *Un punto $y$ appartiene alla polare $s$-esima di un punto $z$ se e soltanto se $z$ appartiene alla polare $(n-s)$-esima di $y$. In formule*

$$\Delta_z^s f(y) = 0 \Longleftrightarrow \Delta_y^{n-s} f(z) = 0.$$

**Teorema 3 (Teorema della sezione)** *In $\boldsymbol{P}^r$ prendiamo un sottospazio $\boldsymbol{P}^k$, $1 \leq k \leq r-1$, ed un punto $z \in \boldsymbol{P}^k$, allora la sezione con $\boldsymbol{P}^k$ della polare s-esima di $z$ rispetto ad una ipersuperficie $V_{r-1}^n$ (di grado $n$ e dimensione $r-1$) di $\boldsymbol{P}^r$, che non passi per $\boldsymbol{P}^k$, coincide con la polare $s$-esima di $z$ rispetto alla $V_{k-1}^n$, intersezione di $V_{r-1}^n$ e $\boldsymbol{P}^k$. Se lo spazio $\boldsymbol{P}^k$ sta su $V_{r-1}^n$ allora lo spazio medesimo giace di conseguenza sulla polare d'indice $s$ arbitrario di ogni punto di $\boldsymbol{P}^k$ rispetto a $V_{r-1}^n$.*

Per chiarire il concetto di polarità, esaminiamo la polarità rispetto ad una conica.

Nel secondo paragrafo introduciamo il morfismo di Veronese

$$\begin{array}{rccc} v_{r,n}: & \mathbf{P}^r & \longrightarrow & \mathbf{P}^{\binom{r+n}{n}-1} \\ & [x_0, x_1, \ldots, x_r] & \longmapsto & [x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \ldots, x_r^n], \end{array}$$

deduciamo che $v_{r,n}$ è un isomorfismo sull'immagine, denotata con $V_{2,n}$ e detta varietà di Veronese, e studiamo il caso $r = n = 2$ per il quale si ha $V_{2,2}$ =Superficie di Veronese.

Introducendo il concetto di sistemi lineari vediamo che il morfismo di Veronese corrisponde al sistema lineare completo delle ipersuperfici di grado $n$ di $\mathbf{P}^r$, in particolare $v_{2,2}$ corrisponde al sistema lineare di tutte le coniche di $\mathbf{P}^2$. Grazie a questa osservazione possiamo dimostrare che la Superficie di Veronese è una superficie di ordine 4 di $\mathbf{P}^5$, contenente $\infty^2$ coniche corrispondenti alle $\infty^2$ rette del piano e contenente $\infty^5$ quartiche corrispondenti alle $\infty^5$ coniche del piano (questa corrispondenza tra curve del piano e Superficie di Veronese ci sarà molto utile in seguito).

Nel terzo paragrafo si introduce il concetto di involuzioni. Sia

$$F(x) = F(x_0, x_1) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 = 0$$

una forma quadratica avente per soluzione la coppia di punti $Q, Q'$. La forma bilineare ad essa associata coincide con la polare rispetto ad essa e prende il nome di equazione dell'involuzione definita da $Q$ e $Q'$. Le $\infty^1$ coppie di punti che la soddisfano costituiscono un'involuzione di coppie di punti. $Q$ e $Q'$ sono (gli unici) punti doppi dell'involuzione da essi definita. Un'involuzione si dice parabolica se $det(a_{ij}) = 0$. In tal caso $Q = Q'$ cioè si ha un solo punto doppio.

Infine, nel quarto paragrafo, parliamo di dualità in relazione alle curve algebriche, concetto basilare per introdurre e capire la corrispondenza tra coniche di un piano e varietà di $\mathbf{P}^5$.

**Definizione 2** *Una curva di* $(\boldsymbol{P}^2)^*$ *prende il nome di* curva inviluppo *e il suo ordine prende il nome di* classe (classe=duale dell'ordine).

Ovviamente dalla precedente definizione discende che una conica-inviluppo è una conica di $(\mathbf{P}^2)^*$. Per distinguere usiamo il termine di conica-luogo per indicare un'ordinaria conica di $\mathbf{P}^2$.

Dimostriamo i seguenti teoremi:

**Teorema 4** *Le tangenti a una curva di grado $n \geq 2$, irriducibile, non singolare, di $\boldsymbol{P}^2$ costituiscono una curva inviluppo, detta* duale *della curva di $\boldsymbol{P}^2$.*

**Teorema 5** *La duale di una conica-luogo non degenere di equazione*

$$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik} x_i x_k = 0$$

*è la conica-inviluppo di equazione*

$$\sum_{i,k=0}^{2} A_{ik} \xi_i \xi_k = 0$$

*con $A_{ik}$=complemento algebrico di $a_{ik}$.*

Dimostriamo anche che l'inviluppo corrispondente ad una conica-luogo non degenere è non degenere. Vedendo, sia algebricamente che geometricamente, che il Teorema 5 non può essere esteso al caso di coniche degeneri, utilizzando la dualità, definiamo l'inviluppo corrispondente ad una conica-luogo semplicemente degenere come una coppia di punti distinti e l'inviluppo corrispondente ad una conica-luogo doppiamente degenere come una coppia di punti coincidenti. Infine approfondiamo la relazione tra coniche-luogo e coniche-inviluppo analizzando tutte le tipologie di fasci di coniche esistenti e dimostrando che a fasci generali di coniche-luogo corrispondono fasci generali di coniche-inviluppo, a fasci di coniche-luogo tangenti corrispondono fasci di coniche-inviluppo tangenti, ecc.

L'analisi della relazione tra coniche-luogo e coniche-inviluppo si conclude osservando che, essendo $\pi$ il duale di $\pi^*$, una conica-inviluppo di $\pi$ è la duale di una conica-luogo di $\pi^*$. In tal senso, nel capitolo successivo, parliamo di coniche-inviluppo e coniche-luogo di $\pi$.

**Secondo capitolo**

La totalità delle coniche-inviluppo di un piano $\pi$ forma uno spazio lineare a cinque dimensioni, $\mathbf{P}^5$, di cui esse sono i punti. Ovviamente 2, 3, 4, 5 coniche-inviluppo linearmente indipendenti formano, rispettivamente, sottospazi di $\mathbf{P}^5$ di dimesione 1, 2, 3, 4 cioè le rette $\mathbf{P}^1$, i piani $\mathbf{P}^2$, gli spazi $\mathbf{P}^3$ e gli iperpiani $\mathbf{P}^4$ di $\mathbf{P}^5$.

**Definizione 3** *I sistemi lineari semplici (generati da due coniche distinte) di coniche-inviluppo prendono il nome di* schiere. *I sistemi lineari doppi (genarati da 3 coniche linearmente indipendenti) di coniche-inviluppo prendono il nome di* tessuti.

A questo punto introduciamo la prima importante relazione tra coniche-luogo e coniche-inviluppo che ci permette di rappresentarle in $\mathbf{P}^5$: la relazione di coniugio. Una conica-inviluppo di equazione

$$\sum_{i,k=0}^{2} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k = 0 \tag{1}$$

è il punto di $\mathbf{P}^5$ di coordinate $\alpha = [\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}]$. Consideriamo una conica-luogo di equazione

$$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x_ix_k = 0 \tag{2}$$

e definiamo la relazione di coniugio tra coniche.

**Definizione 4** *La conica-luogo (2) e la conica-inviluppo (1) si dicono* coniugate *se si verifica la relazione*

$$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}\alpha_{ik} = 0. \tag{3}$$

Grazie alla precedente relazione vediamo che ad una conica-luogo di $\pi$ di equazione (2) corrisponde un iperpiano di $\mathbf{P}^5$, di equazione

$$\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x_k = 0,$$

cioè un punto di $(\mathbf{P}^5)^*$ di coordinate $a = [a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}]$. In realtà dalla precedente relazione si ricava anche che un iperpiano di $\mathbf{P}^5$ può essere visto, come luogo di punti, come la totalità delle coniche-inviluppo coniugate alla conica-luogo da esso rappresentata. Abbiamo quindi due modi di pensare un iperpiano di $\mathbf{P}^5$: in termini di coniche-luogo e in termini di coniche-inviluppo.

Si passa poi a considerare la varietà di $\mathbf{P}^5$ formata dalle coniche-inviluppo degeneri di $\pi$. In particolare, essendo la (1), al variare di $\alpha_{ik}$ una conica-inviluppo variabile su $\pi$, l'equazione

$$det(\alpha_{ik}) = 0$$

rappresenta il luogo delle coniche-inviluppo degeneri: un'ipersuperficie di terzo grado di $\mathbf{P}^5$ che denotiamo con $M_4^3$. Per quanto riguarda le coniche-inviluppo doppiamente degeneri invece osserviamo facilmente, tramite $v_{2,2}$, che la varietà di $\mathbf{P}^5$ da esse formata è la superficie di Veronese, che d'ora in avanti denotiamo $F_2^4$. Per cui a partire dalle cose dette nel precedente capitolo abbiamo utili corrispondenze tra le coniche di $\pi$ (sia luogo che inviluppo) e la varietà di punti di $\mathbf{P}^5$ formata dalle coniche-inviluppo doppiamente degeneri.

La $F_2^4$ appartiene ad $M_4^3$ e in realtà è doppia per $M_4^3$: ogni retta ($\mathbf{P}^1$) passante per un punto $P$ di $F_2^4$ interseca due volte $M_4^3$ nel punto $P$ (si dimostra sfruttando il fatto che $\mathbf{P}^1$ corrisponde ad una schiera e la caratterizzazione delle schiere data nel precedente capitolo).

Nel secondo paragrafo si introduce un'altra corrispondenza tra coniche-luogo e coniche-inviluppo:

**Definizione 5** *Una conica-inviluppo (1) e una conica-luogo (2) si dicono* armoniche *quando nella schiera di coniche che le congiunge la prima costituisce l'elemento polare lineare, gruppo polare di* $1^0$ *ordine, della seconda rispetto alla terna di coniche degeneri.*

Si dimostra che *una conica-luogo $f$ e una conica-inviluppo $\varphi$ sono armoniche se e soltanto se $f$ e $\varphi$ sono coniugate.* Grazie a questa osservazione, ai teoremi riguardanti la polarità dimostrati nel primo capitolo e al duplice modo di vedere un iperpiano di $\mathbf{P}^5$ possiamo dimostrare che:

- *al sistema quadruplo delle coniche-inviluppo armoniche ad una conica-luogo fissa di $\pi$ corrispondono gli $\infty^4$ punti dell'iperpiano polare del punto corrispondente alla conica-luogo fissa (vista come inviluppo) rispetto a $M_4^3$, e viceversa*

- *i punti della $M_4^2$, quadrica polare di un punto $P \in \boldsymbol{P}^5$, corrispondente ad una conica-inviluppo fissa di $\pi$, rispetto a $M_4^3$, corrispondono al sistema quadruplo di coniche-luogo coniugate (armoniche) alla conica-*

*inviluppo fissa, e viceversa.*

Si osserva anche che un punto e un iperpiano di $\mathbf{P}^5$ che sono polo e polare rispetto ad $M_4^3$ sono rappresentati su $\pi$ dalla stessa conica, come luogo e come inviluppo, e viceversa.

Nel terzo paragrafo si analizzano i fasci e le reti costituiti da coniche-luogo tutte degeneri e sfruttando la dualità si passa alle schiere e ai tessuti di coniche-inviluppo tutte degeneri. Dopodiché, sfruttando la corrispondenza tra schiere di $\pi$ e rette di $\mathbf{P}^5$ e tra tessuti di $\pi$ e piani di $\mathbf{P}^5$, si passa a studiare le rette e i piani contenuti in $M_4^3$. In particolare a partire dal seguente Teorema di Bertini (per una cui dimostrazione si può vedere [2]):

**Teorema 6** *Un sistema lineare di dimensione uno privo di parte fissa e riducibile è necessariamente un'involuzione in un fascio*

si dimostra che le schiere di coniche-inviluppo tutte degeneri sono di due tipi:

1. $\mathbf{1}^{\boldsymbol{a}}$ **specie**= costituite da coppie di punti di un'involuzione su una retta di $\pi$.

2. $\mathbf{2}^{\boldsymbol{a}}$ **specie**=costituite da un punto fisso e un punto variabile su una retta.

Se, nella $1^a$ specie, l'involuzione è parabolica o, nella $2^a$ specie, la retta passa per il punto fisso allora la schiera appartiene ad entrambe le specie. Una schiera di $1^a$ specie possiede due punti doppi (i due punti doppi definenti l'involuzione) per cui la corrispondente retta di $\mathbf{P}^5$, contenuta in $M_4^3$, incontra $F_2^4$ in due punti. Una schiera di $2^a$ specie non possiede punti doppi per cui la corrispondente retta di $\mathbf{P}^5$ contenuta in $M_4^3$ non interseca $F_2^4$. Una schiera

appartenente ad entrambe le specie possiede un punto doppio per cui la corrispondente retta contenuta in $M_4^3$ incontra $F_2^4$ in un punto.
Per quanto riguarda i piani contenuti in $M_4^3$, invece, avendo dimostrato che i tessuti sono solamente di due specie:

1. **1$^a$ specie**=costituiti dalle coppie di punti di una retta di $\pi$;

2. **2$^a$ specie**=costituiti dalle coppie di punti di $\pi$ con un punto fisso;

nel quarto paragrafo, si ricava che i tipi di piani contenuti in $M_4^3$ sono di due specie. Ovviamente quelli corrispondenti ai tessuti di $1^a$ specie si dicono **piani di 1$^a$ specie** e quelli corrispondenti ai tessuti di $2^a$ specie si dicono **piani di 2$^a$ specie**. *Se le coppie di punti del tessuto di* $1^a$ *specie appartengono ad una retta* $r$ *allora il piano di* $1^a$ *specie corrispondente è quello contenente la conica corrispondente a* $r$ (per dimostrarlo si usa la corrispondenza tra curve di $\pi$ e $F_2^4$). Inoltre, sfruttando le involuzioni, stabiliamo una corrispondenza tra le coppie di punti di $r$ e i punti del del piano di $1^a$ specie. *Un piano di* $2^a$ *specie invece è il piano tangente a* $F_2^4$ *nel punto corrispondente al punto doppio (l'unico) del relativo tessuto di* $2^a$ *specie.* I piani di $2^a$ specie corrispondono proiettivamente a $\pi$ cioè ai punti di una retta del piano di $2^a$ specie corrispondono i punti di una retta di $\pi$. Sfruttando la corrispondenza tra piani e tessuti dimostriamo poi che:

1. $\forall\ P \in M_4^3 - F_2^4$ passano un piano di $1^a$ specie e due di $2^a$ specie.

2. In generale due piani di specie diversa non s'incontrano ma possono

incontrarsi in una retta tangente di $F_2^4$.

3. Due piani di $1^a$ specie s'incontrano sempre in un punto di $F_2^4$.

4. Due piani di $2^a$ specie s'incontrano in un punto di $M_4^3$.

Infine vediamo qual è lo spazio congiungente due piani di $M_4^3$ e lo rappresentiamo su $\pi$. In particolare (utilizzando la formula di Grassman proiettiva) dimostriamo che due piani della stessa specie di $M_4^3$ sono contenuti in un $\mathbf{P}^4$ e (sfruttando le proprietà di $F_2^4$) che in realtà questo $\mathbf{P}^4$ contiene anche un piano di specie diversa. Il $\mathbf{P}^4$ congiungente due piani di $1^a$ specie è tangente a $F_2^4$ e quello congiungente due piani di $2^a$ specie è un iperpiano tangente doppio a $F_2^4$ perché è tangente a $F_2^4$ lungo tutta la conica del piano di $1^a$ specie in esso contenuta. Sfruttando la relazione tra $F_2^4$ e curve del piano dimostriamo che i $\mathbf{P}^4$ tangenti di $F_2^4$ corrispondono alle coppie di rette di $\pi$ (cioè alle coniche-luogo semplicemente degeneri di $\pi$) mentre i $\mathbf{P}^4$ tangenti doppi di $F_2^4$ corrispondono alle rette doppie di $\pi$ (cioè alle coniche-luogo doppiamente degeneri). Sfruttando la relazione di coniugio esprimiamo tutto in termini di varietà di punti di $\mathbf{P}^5$ e coniche-inviluppo di $\pi$: *i punti dei* $\boldsymbol{P}^4$ *tangenti di* $F_2^4$ *corrispondono a coniche-inviluppo coniugate a coniche-luogo semplicemente degeneri e i punti dei* $\boldsymbol{P}^4$ *tangenti doppi di* $F_2^4$ *corrispondono a coniche-inviluppo coniugate a coniche-luogo doppiamente degeneri.*

# Bibliografia

[1] C. Segre, Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XX, pp. 487-504, Torino 1884-1885

[2] E. Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina 1923

[3] B. Segre, *Prodromi di Geometria Algebrica*, Cremonese, Roma 1972

[4] U. Morin, *Lezioni di Geometria parte seconda Curve Piane*, Cedam, Padova 1966

[5] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino 1989

[6] E. Sernesi, *Appunti del corso di Isituzioni di Geometria Superiore* (a.a. 1983/1984)

[7] M. Rosati, *Lezioni di Geometria*, Cortina, Padova 1997

[8] E. Martinelli, *Il Metodo delle Coordinate*, Eredi V. Veschi, Roma 1979

[9] W. Foulton, *Algebraic Curves*, Benjamin Cummings, Massachussetts 1969