



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
ROMA TRE

FACOLTÀ DI SS.MM.FF.NN.

SINTESI DELLA TESI DI LAUREA
IN
MATEMATICA

***“SOLUZIONE NUMERICA DEL
PROBLEMA DI RAGGIUNGIBILITÀ DI
SISTEMI CONTROLLATI”***

RELATORE

Ch.mo Prof.

Roberto Ferretti

CANDIDATO

Massimiliano Marotta

Matr. 024441/75

ANNO ACCADEMICO 2004/2005

Classificazioni AMS: 34A50, 65L06, 93B03, 93B40.

Parole chiave: insiemi di raggiungibilità, approssimazioni a tempo discreto, schemi di Runge-Kutta.

La *teoria matematica del controllo* è una disciplina scientifica che proviene dalle scienze ingegneristiche. Essa diventò disciplina matematica negli anni cinquanta con il contributo di studiosi come R. E. Kalman ed R. Bellman. Oggi si sta sviluppando su una vasta area che riguarda una grande varietà di discipline matematiche.

Essa studia un sistema di equazioni differenziali del tipo:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

con:

$$y : [0, T] \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^N, \quad u : [0, T] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^M$$

ed $f : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Il sistema (1) rappresenta un *sistema controllato*. Inoltre l'insieme U è chiamato *insieme dei parametri di controllo*, l'insieme Y è chiamato *insieme dei valori della grandezza di uscita* ed infine $y(0) = x$ rappresenta la *condizione iniziale*. In questo modo un elemento $u \in U$ verrà chiamato *controllo* o *input*, mentre un elemento $y \in Y$ verrà chiamato *grandezza di uscita* o *output*. Un modo per rappresentare simbolicamente un sistema controllato ed in particolare il sistema (1) è il seguente:



Figura 1: Rappresentazione simbolica di un *sistema controllato*.

Lo scopo della tesi è quello di studiare il sistema controllato (lineare) della forma:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2)$$

dove $A \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$ ed il controllo u è soggetto ad opportuni vincoli. La situazione in presenza di vincoli sul controllo è considerevolmente più complessa del caso in assenza di vincoli e non esistono soluzioni altrettanto generali. Per questa ragione, se il controllo è soggetto a vincoli, lo studio dell'*insieme di raggiungibilità* definito come:

$$\mathcal{R}(x, T) = \{z \in \mathbb{R}^N : z = y(T) \text{ al variare di } u : [0, T) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^M\}, \quad (3)$$

va effettuato in generale per via numerica anche se il sistema è lineare. Utilizzeremo il *metodo delle differenze finite* con lo scopo di determinare l'insieme di raggiungibilità con un alto ordine di accuratezza. Tale metodo consiste nella suddivisione dell'intervallo $[0, T]$ in n parti uguali, mediante gli $n + 1$ punti t_0, t_1, \dots, t_n , chiamati *nodi*. Ci si accontenterà così di approssimare i valori della funzione $y(\cdot)$ nei nodi t_k e tali approssimazioni verranno chiamate y_k . Il sistema controllato (2) verrà così sostituito da una *versione esplicita a tempo discreto* del tipo:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h\Phi(h, y_k, u_{0,k}, \dots, u_{q,k}), & \forall k = 0, \dots, n-1 \\ y_0 = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4)$$

dove Φ è un'opportuna funzione che varia a seconda del metodo di approssimazione considerato, $h = \frac{T}{n}$ rappresenta il *passo temporale* ed i *controlli discreti* $u_{i,k}$ sono soggetti ad opportuni vincoli. Molti metodi possono essere usati per costruire la funzione Φ ; in particolare ci concentreremo sulla classe degli schemi di *Runge-Kutta* di ordine p ($p < 5$), ovvero:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=0}^{p-1} w_i K_i, & \forall k = 0, \dots, n-1 \\ y_0 = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5)$$

con:

$$\begin{cases} K_0 = Ay_k + Bu_{0,k} \\ K_i = A \left(y_k + h \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{i,j} K_j \right) + Bu_{i,k}. \end{cases} \quad (6)$$

Poichè nella definizione di insieme di raggiungibilità non si richiede che i controlli siano regolari, si rinuncia ad imporre che i controlli discreti siano valori dei controlli continui presi ad istanti opportuni, ma si sceglie invece di farne variare ogni componente in un insieme U_h . Un punto cruciale per applicare questa strategia di approssimazione dell'insieme di raggiungibilità è quindi di individuare una corretta definizione di questi vincoli a cui è soggetto il controllo discreto.

Per quanto riguarda il metodo di *Heun*:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [Ay_k + Bu_{0,k} + A(y_k + h(Ay_k + Bu_{0,k})) + Bu_{1,k}] \\ y_0 = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

visto come metodo di *Runge-Kutta* di ordine 2 e come versione discreta del sistema (2), l'insieme U_h è definito come:

$$U_h = \left\{ (u_{0,k}^{(i)}, u_{1,k}^{(i)}) : 0 \leq u_{0,k}^{(i)} \leq 1, 2 - 2\sqrt{1 - u_{0,k}^{(i)}} - u_{0,k}^{(i)} \leq u_{1,k}^{(i)} \leq 2\sqrt{u_{0,k}^{(i)}} - u_{0,k}^{(i)} \right. \\ \left. \text{per } k \text{ fissato, } 0 \leq k \leq n-1; \text{ per } i \text{ fissato, } 1 \leq i \leq M \right\}.$$

Invece per quanto riguarda il metodo di *Eulero modificato*:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h \left[A \left(y_k + \frac{h}{2} (Ay_k + Bu_{0,k}) \right) + Bu_{1,k} \right] \\ y_0 = x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

visto anche esso come schema di *Runge-Kutta* del secondo ordine e come versione discreta del sistema (2), l'insieme U_h è definito come segue:

$$U_h = \left\{ (u_{0,k}^{(i)}, u_{1,k}^{(i)}) : 0 \leq u_{0,k}^{(i)} \leq 1, 1 - \sqrt{1 - u_{0,k}^{(i)}} \leq u_{1,k}^{(i)} \leq \sqrt{u_{0,k}^{(i)}} \right. \\ \left. \text{per } k \text{ fissato, } 0 \leq k \leq n-1, \text{ per } i \text{ fissato, } 1 \leq i \leq M \right\}.$$

Vengono riportati qui di seguito i grafici degli insiemi U_h relativi ai metodi di *Heun* ed *Eulero modificato*. Tali grafici sono stati ottenuti usando il linguaggio MATLAB.

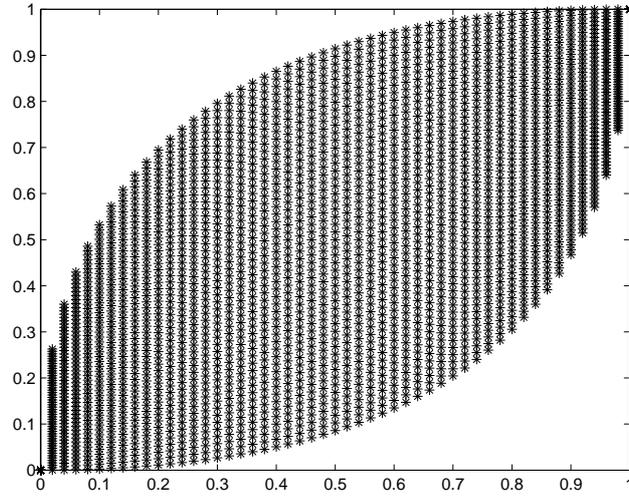


Figura 2: Grafico dell'insieme U_h relativo al metodo di *Heun*.

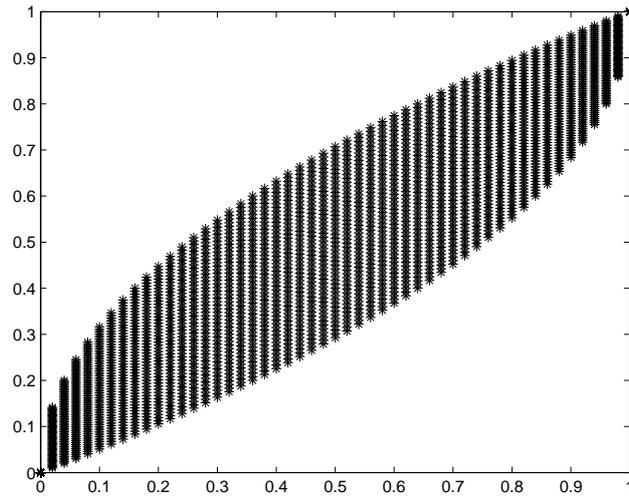


Figura 3: Grafico dell'insieme U_h relativo al metodo di *Eulero modificato*.

In quest'ottica, sempre approssimando la (2) con lo schema (5)-(6), si vuole calcolare la controparte discreta dell'insieme di raggiungibilità definita come:

$$\mathcal{R}_h(x, T) = \{z : z = y_n \text{ per } (u_{0,0}, \dots, u_{p-1,0}), \dots, (u_{0,n-1}, \dots, u_{p-1,n-1}) \in U_h^M\}.$$

Tale insieme verrà chiamato *insieme di raggiungibilità discretizzata*.

In un primo momento, ci occuperemo di rilevare la struttura di \mathcal{R}_h per tempi

“piccoli”, in modo da effettuare un solo passo temporale. In questo caso \mathcal{R}_h sarà disegnato semplicemente stabilendo una griglia su U_h ed osservando quali stati vengono raggiunti utilizzando i controlli di tale griglia.

Vediamo alcuni particolari esempi ottenuti con il metodo di *Heun*.

Esempio 1.

$$\text{Per } N = 2, M = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$T = 1, n = 1, h = 1$, si ottiene il seguente grafico:

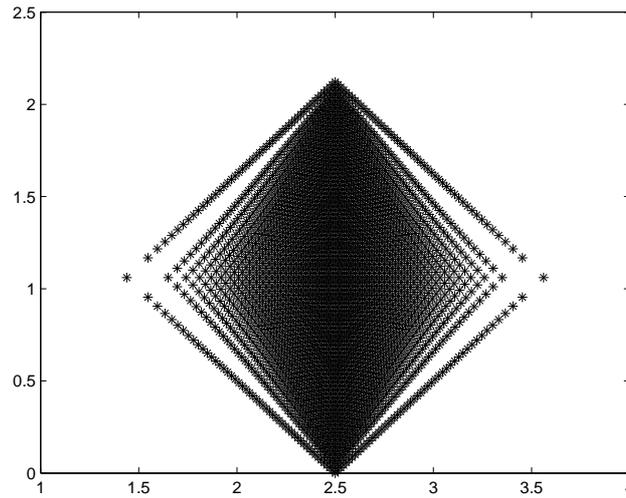


Figura 4: Grafico dell'insieme $\mathcal{R}_h(x, h)$ relativo all'esempio 1.

Esempio 2.

$$\text{Per } N = 2, M = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$T = 1, n = 1, h = 1$, si ottiene il seguente grafico:

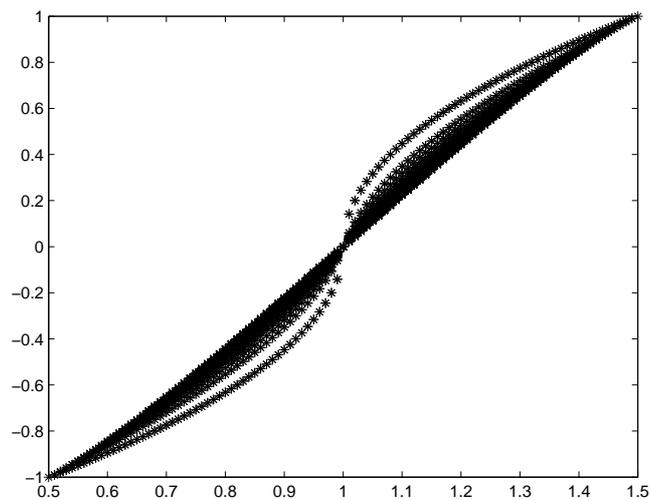


Figura 5: Grafico dell'insieme $\mathcal{R}_h(x, h)$ relativo all'esempio 2.

Esempio 3.

3) Per $N = 2$, $M = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$T = 1$, $n = 1$, $h = 1$, si ottiene il seguente grafico:

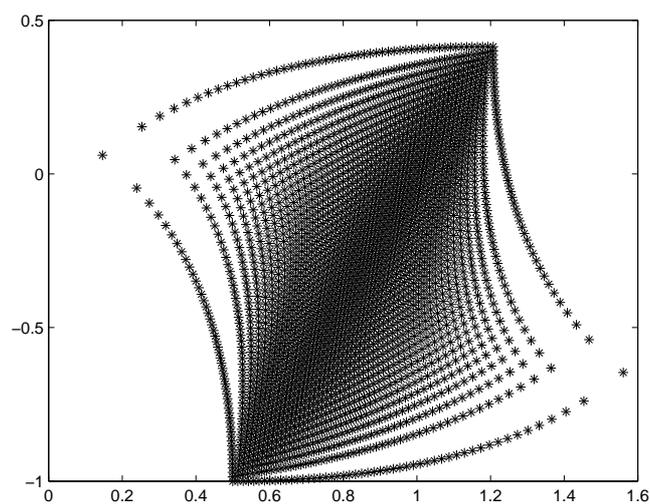


Figura 6: Grafico dell'insieme $\mathcal{R}_h(x, h)$ relativo all'esempio 3.

Nella versione più completa dello schema vengono utilizzati più passi temporali e si discretizza un rettangolo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N] = \bigotimes_{i=1}^N [a_i, b_i]$$

in $n_1 \cdot n_2 \cdots n_N$ sottorettangoli mediante gli $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_N + 1)$ punti di \mathbb{R}^N :

$$\bar{y}_k \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad \forall k = 1, \dots, (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_N + 1),$$

cercando per ogni punto \bar{y}_k della relativa griglia una sequenza di controlli discreti che lo raggiunga (se ne esiste una). Questa operazione viene implementata minimizzando il residuo del sistema $(\|\bar{y}_k - y_n\|_2)^2$ e trattando i vincoli sul controllo per penalizzazione. In questo modo, considerando un metodo del secondo ordine, si dovranno minimizzare $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_N + 1)$ funzioni del tipo:

$$f_k(u_{0,0}, \dots, u_{1,n-1}) = (\|\bar{y}_k - y_n\|_2)^2 + C\mathcal{H}(u_{0,0}, \dots, u_{1,n-1}),$$

dove C è una costante positiva ed \mathcal{H} è la funzione di penalizzazione. Il risultato finale sarà quello di graficare il seguente sottoinsieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ di $\mathcal{R}_h(x, T)$:

$$\mathcal{R}_h^\Omega(x, T) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_k \in \Omega : \bar{y}_k = y_n \text{ per } (u_{0,0}, u_{1,0}), \dots, (u_{0,n-1}, u_{1,n-1}) \in U_h^M \\ \forall k = 1, \dots, (n_1 + 1) \cdots (n_N + N) \end{array} \right\}$$

con U_h^M insieme dei controlli discreti ammissibili relativo ad un metodo del secondo ordine.

Poi prendendo $\bar{y}_k = (\overline{y_k^{(1)}}, \overline{y_k^{(2)}}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ si considera la seguente funzione:

$$\varphi(\overline{y_k^{(1)}}, \overline{y_k^{(2)}}) = \min_{u \in I(\bar{u})} ((\|\bar{y}_k - y_n\|_2)^2 + C\mathcal{H}(u_{0,0}, \dots, u_{1,n-1})),$$

che nello spazio è rappresentata da una superficie di coordinate $\overline{y_k^{(1)}}, \overline{y_k^{(2)}}$, φ (figura 8). Una rappresentazione diversa della funzione φ può essere data

nel solo piano x, y per mezzo delle *curve di livello*. Invece di considerare la rappresentazione in tre dimensioni, si tracciano le curve di livello della funzione, indicando le proiezioni sul piano x, y di tutti i punti che hanno uguale elevazione φ . Queste curve di livello sono semplicemente le curve $\varphi(\overline{y_k^{(1)}}, \overline{y_k^{(2)}}) = c$, dove c rimane costante per ogni curva (figura 9). C'è da notare che l'interno della curva di livello zero della superficie φ coincide proprio con l'insieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ (figure 10 e 11). Vediamo un particolare esempio ottenuto utilizzando il metodo di *Heun*.

Esempio 4.

Per: $N = 2, M = 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
 $T = 1, n = 5, h = \frac{1}{5}, a_1 = -2, b_1 = 2, a_2 = -2, b_2 = 2, n_1 = n_2 = 50$
ed $\bar{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si ottengono i seguenti grafici:

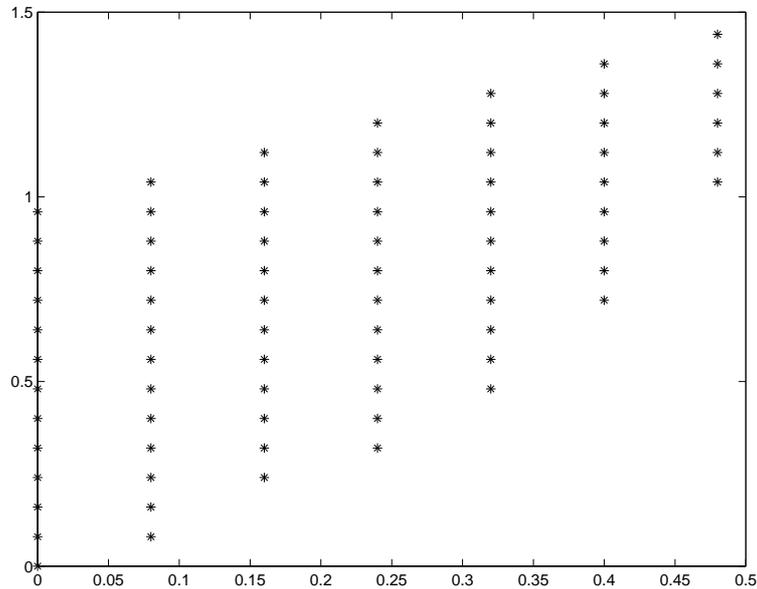


Figura 7: Grafico dell'insieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ ottenuto utilizzando il metodo di *Heun* relativo all'esempio 4.

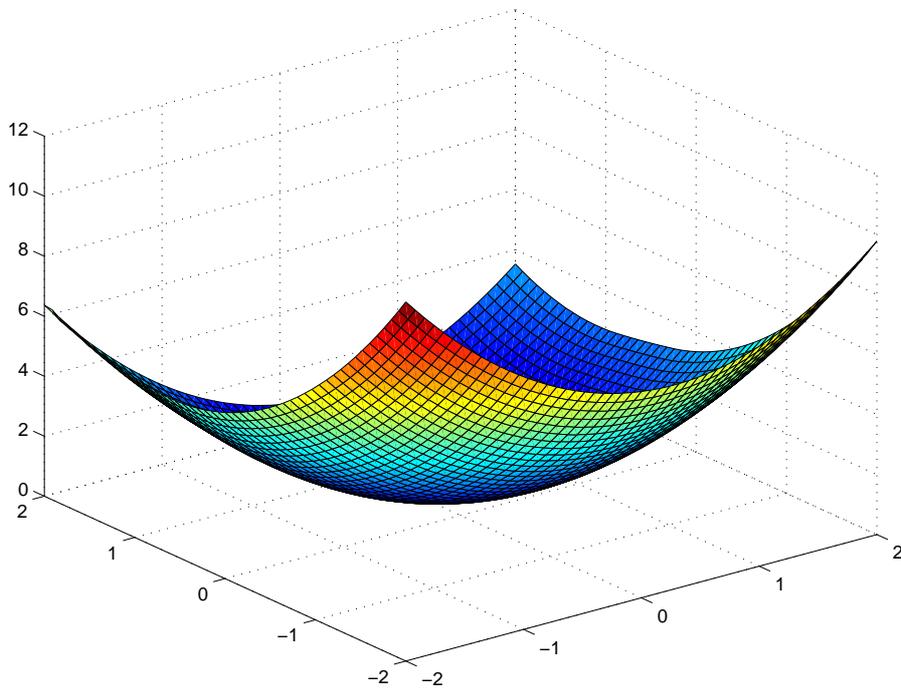


Figura 8: Superficie φ ottenuta con il metodo di *Heun* relativa all'esempio 4.

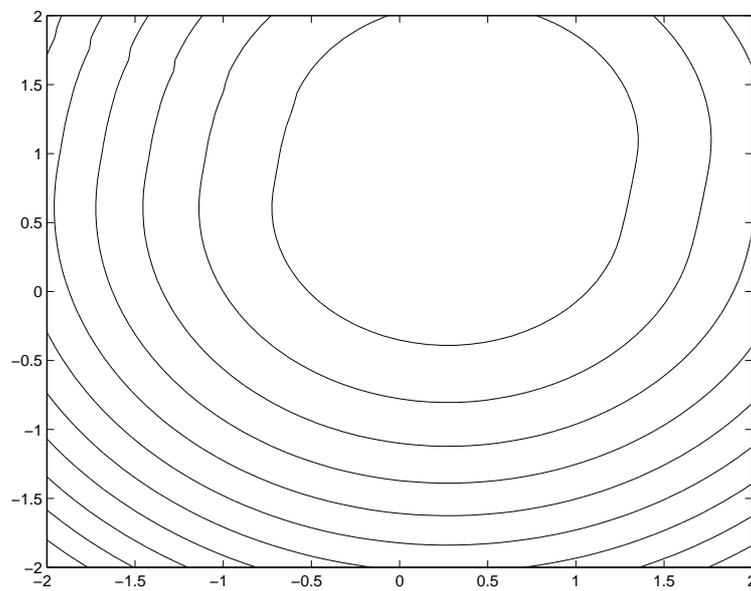


Figura 9: Curve di livello della superficie φ ottenute con il metodo di *Heun* relative all'esempio 4.

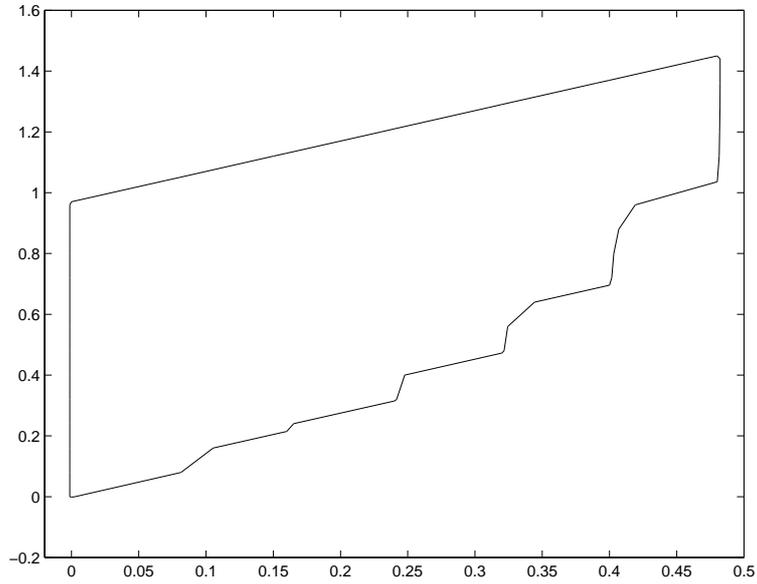


Figura 10: Curva di livello zero della superficie φ utilizzando il metodo di *Heun* relativa all'esempio 4.

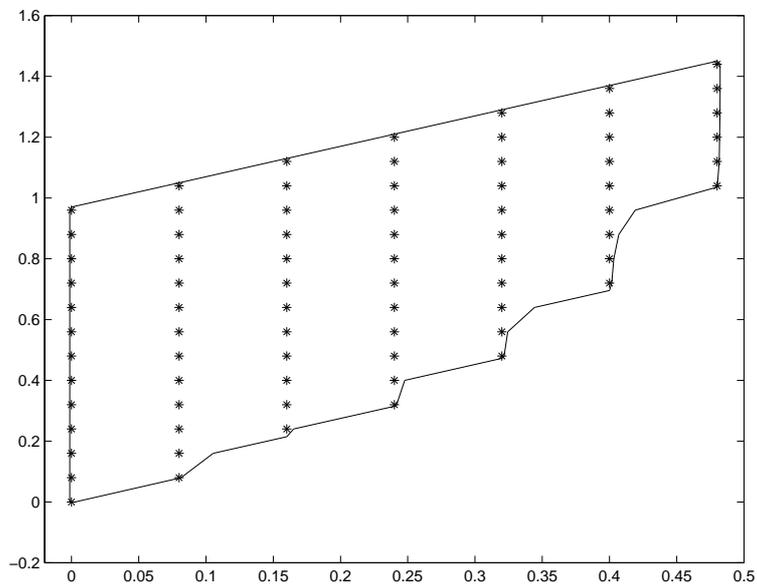


Figura 11: Insieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ confrontato con la curva di livello zero della superficie φ per l'esempio 4.

Si può fare poi un confronto tra ciò che è stato ottenuto con il metodo di *Heun* e quello che si otterrebbe con un metodo del primo ordine, ad esempio con il metodo di *Eulero esplicito*.

Partendo sempre dal sistema controllato lineare (2), utilizzando il metodo di *Eulero esplicito*, si ottiene il seguente schema discretizzato:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h (Ay_k + Bu_{0,k}), & \forall k = 0, \dots, n-1 \\ y_0 = x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Si vuole graficare il seguente sottoinsieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ di $\mathcal{R}_h(x, T)$:

$$\mathcal{R}_h^\Omega(x, T) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_k \in \Omega : \bar{y}_k = y_n \text{ per } u_{0,0}, \dots, u_{0,n-1} \in U_h^M \\ \forall k = 1, \dots, (n_1 + 1) \cdots (n_N + N) \end{array} \right\},$$

con $U_h^M = [0, 1]^M$. Si consideri l'esempio.

Esempio 5.

$$\text{Per } N = 2, M = 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T = 1, n = 5, h = \frac{1}{5}, a_1 = -2, b_1 = 2, a_2 = -2, b_2 = 2, n_1 = n_2 = 50$$

ed $\bar{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, si ottengono i seguenti grafici:

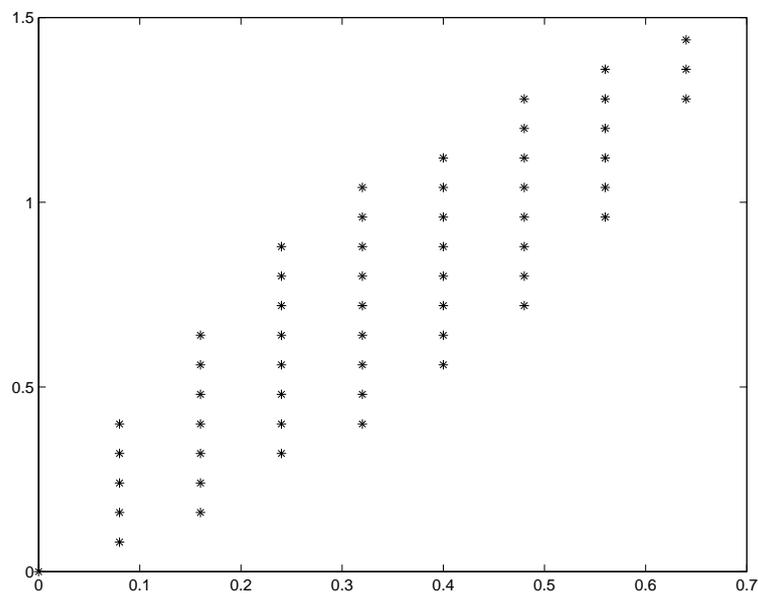


Figura 12: Grafico dell'insieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ utilizzando il metodo di *Eulero esplicito* relativo all'esempio 5.

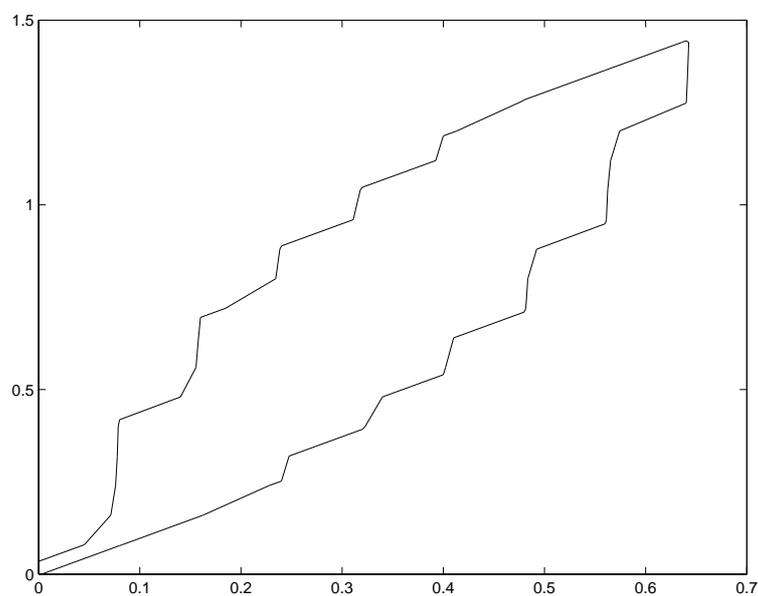


Figura 13: Curva di livello zero della superficie φ per l'esempio 5.

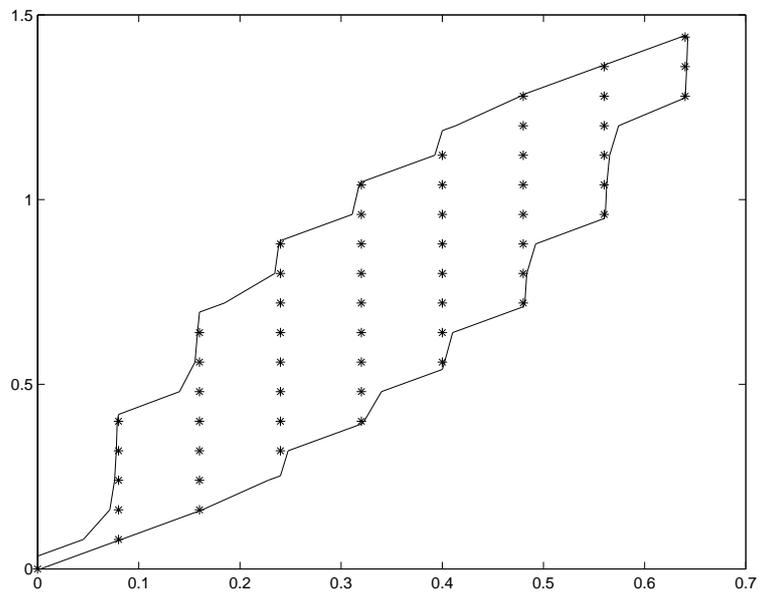


Figura 14: Insieme $\mathcal{R}_h^\Omega(x, T)$ confrontato con la curva di livello zero della superficie φ per l'esempio 5.

Bibliografia

- [1] C. Brandi Leccisi, A. Bastarelli. *LA MATEMATICA CON L'ELABORATORE. Proposte ed esperienze per il Laboratorio di Matematica. Volume secondo.* Edizioni Cupido, 1988.
- [2] Giuseppe Ciaburro. *Manuale matlab.* 2000.
- [3] V. Comincioli. *Analisi Numerica: Metodi, Modelli, Applicazioni.* McGraw Hill, Milano, 1990.
- [4] Roberto Ferretti. *High-order approximations of linear control systems via Runge-Kutta schemes.* Computing, 58(4):351-364, 1997.
- [5] Roberto Ferretti. *ALCUNI ARGOMENTI COMPLEMENTARI DEL CORSO DI ANALISI NUMERICA.* Dispensa per il corso di “Analisi Numerica”. Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tre. 1998.
- [6] Gerhard Häckl. *Reachable Sets, Control Sets and Their Computation.* Volume 7 di *Augsburger Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften.* Augsburg Univ., Augsburg, 1996.
- [7] A. Isidori. *Nonlinear control systems: an introduction.* Springer Verlag, Berlin - New York, 1989.
- [8] F. Lempio, V. Veliov. *Discrete Approximations of Differential Inclusions.* Bayreuther Mathematische Schriften, 54:149-232, 1998.

- [9] J. A. Nelder, R. Mead. *A Simplex Method for Function Minimization*.
Computer Journal, 7:308-13, 1965.
- [10] Alfio Quarteroni. *Elementi di CALCOLO NUMERICO*.
Società Editrice Esculapio, 1997.
- [11] Tom Rowan. *Functional stability analysis of numerical algorithms*.
Tesi di dottorato. Università del Texas, Austin, 1990.
- [12] A. Ruberti, A. Isidori. *TEORIA DEI SISTEMI*.
Bollati Boringhieri, 1979.
- [13] Jerzy Zabczyk. *Mathematical Control Theory: An Introduction*.
Birkhäuser, 1992.