UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di

Marco Marinopiccoli

Gli spazi di Hurwitz

Relatore
Prof. Edoardo Sernesi

Il Candidato Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001
LUGLIO 2001

Classificazione AMS : 14H30, 30F99, 14E22, 14H55.

Parole Chiave : Rivestimenti ramificati, Spazi di Hurwitz, Superfici di Riemann.

Sintesi

Nella tesi si offre dapprima un panorama sulla costruzione degli spazi di Hurwitz, spazi che parametrizzano i rivestimenti ramificati tra due superfici di Riemann compatte (e connesse) e dopo, degli spazi di Hurwitz dei rivestimenti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Questi spazi vennero scoperti nel 1891 dal matematico tedesco A.Hurwitz che dà loro il nome, successivamente vennero nuovamente definiti e utilizzati da William Fulton nel suo importante articolo, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, 1969.* Hurwitz definì questi spazi utilizzando il linguaggio matematico di fine secolo, ancor'oggi suggestivo, ma non più adatto al formalismo moderno, più funzionale ed operativo. Lo scopo di questo lavoro è quello di illustrare gli spazi di Hurwitz così importanti nella teoria dei rivestimenti ramificati, rivisitando alcuni risultati con il linguaggio matematico attuale. Si inizia il lavoro con un primo capitolo di preliminari che hanno il fine di richiamare alcune importanti nozioni di base della topologia algebrica, così come della teoria dei rivestimenti topologici e dei rivestimenti ramificati. Tra i risultati enunciati ci sono il teorema di monodromia, il teorema di sollevamento degli archi e quello della mappa aperta. Nel secondo capitolo s'inizia uno studio più approfondito della teoria dei rivestimenti ramificati, arrivando all'enunciato e alla dimostrazione del teorema di Esistenza di Riemann, che risulterà utile nella trattazione dell'argomento.

Teorema 0.1. ***(Esistenza di Riemann)*** *Sia $A \subset X$ sottoinsieme finito, sia $x \in X \setminus A$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora i tre insiemi seguenti sono in naturale* *corrispondenza biunivoca:*

a) *L'insieme delle classi d'equivalenza di rivestimenti ramificati di X con luogo di diramazione $S \subset A$, di grado n;*

b) *L'insieme delle classi d'equivalenza di rivestimenti topologici di $X \setminus A$ di grado n;*

c) *Il sottoinsieme di $Hom(\pi_1(X \setminus A, x), \mathfrak{S}_n)$, rappresentato dagli omomorfismi le cui immagini sono sottogruppi transitivi di $\mathfrak{S}_n$.*

Il teorema di Riemann ci dà una nozione analitica (a), una topologica (b), ed una algebrica (c), mettendole in corrispondenza biunivoca una con l'altra, dandoci così la possibilità di studiare i rivestimenti ramificati attraverso quelli topologici, oppure tramite gli omomorfismi di gruppi.

Nel paragrafo successivo si definisce il prodotto simmetrico come:

Definizione 0.2. $X^{(w)}$ *è il* prodotto simmetrico *di X con se stesso w-volte, cioè se $X^w = X \times ... \times X$ è il prodotto cartesiano di w-copie di X (w-ple ordinate), allora:*

$$X^{(w)} = \frac{X^w}{\mathfrak{S}_w} = \{x_1, ..., x_w\}$$

è l'isieme delle w-ple non ordinate di elementi di X.

Il prodotto simmetrico ha la proprietà che i suoi punti sono il luogo di diramazione di rivestimenti ramificati. Dopo aver definito la relazione d'equivalenza d'isomorfismo analitico, si procede dapprima alla definizione dell'insieme $\mathbf{H}(n, A, X)$, (dove $\Delta \subset X^{(w)}$ rappresenta il sottoinsieme formato dalle w-ple contenenti meno di w punti distinti):

Definizione 0.3. *Per ogni $A = \{a_1, \ldots, a_w\} \in X^{(w)} \setminus \Delta$, sia $\mathbf{H}(n, A, X)$ l'insieme formato dalle classi d'equivalenza di rivestimenti ramificati $f\colon Y \longrightarrow X$ di grado n di X, il cui luogo di diramazione S è uguale ad A, ovvero:*

$$\mathbf{H}(n, A, X) = \left\{ [f]\colon Y \longrightarrow X \text{ di grado } n \text{ di } X \text{ con } S = A \right\}$$

successivamente si arriva alla definizione dello spazio di Hurwitz:

Definizione 0.4. $\mathbf{H}(n, w, X)$ *è l'insieme formato dalle classi d'equivalenza (d'isomorfismo analitico) di rivestimenti ramificati* $f \colon Y \longrightarrow X$ *di grado* n *di* X*, aventi esattamente* w *punti di diramazione, ovvero:*

$$\mathbf{H}(n, w, X) = \left\{ \; [f] : Y \longrightarrow X \;\; \textit{di grado } n \textit{ di } X, \;\; \textit{con } S = \{a_1\,, ..., \, a_w\} \in X^{(w)} \setminus \Delta \; \right\}$$

Si procede alla definizione di un'applicazione dallo spazio di Hurwitz al prodotto simmetrico $X^{(w)}$ così:

$$\delta \colon \mathbf{H}(n, w, X) \longrightarrow X^{(w)} \setminus \Delta$$

L'applicazione assegna ad ogni classe d'equivalenza di rivestimenti ramificati $[f]$ di grado n, il suo luogo di diramazione A. In questo modo si ha che se:

$$A \in X^{(w)} \setminus \Delta \quad \Longrightarrow \quad \delta^{-1}(A) = \mathbf{H}(n, A, X)$$

È importante notare che l'applicazione δ è suriettiva e questa proprietà segue subito dal teorema d'Esistenza di Riemann del quale si vede un primo utilizzo.

L'obiettivo sarà quello di definire una topologia su $\mathbf{H}(n, w, X)$ in modo tale che δ diventi un rivestimento topologico.
Per fare questo si definisce un sottoinsieme del prodotto simmetrico $X^{(w)}$, così:

Definizione 0.5. *Se* $U_1, \ldots, U_w$ *sono aperti di* X*, mandati in aperti omeomorfi a dischi disgiunti di* $\mathbb{C}$ *dalle carte locali, sia* $N(U_1, \ldots, U_w)$ *l'insieme delle* w*-ple in* $X^{(w)}$ *in cui ogni* a_i *è contenuto in un solo* U_i*. Perciò*
$U_i \cong D(u_i, r)$ *con* $\bigcap_{i=1}^{w} U_i = \emptyset$*, così possiamo scrivere:*

$$N(U_1, \ldots, U_w) = \left\{ \{a_1, \ldots, a_w\} \in X^{(w)} \quad \textit{tale che } \; a_i \in U_i \;\; \textit{per } \; 1 \leqslant i \leqslant w \right\}$$

dimostrando successivamente che quest'insieme forma una base della topologia di $X^{(w)} \setminus \Delta$.

Il quarto paragrafo è interamente dedicato alla definizione di una topologia dello spazio di Hurwitz.
Per definire una topologia su $\mathbf{H}(n, w, X)$ è sufficiente stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbf{H}(n, A, X)$ e $\mathbf{H}(n, A', X)$ per ogni $A,\ A' \in N(U_1,\ \dots, U_w)$ che sia indipendente dalla scelta dei $U_1,\ \dots, U_w$ (per dati $A,\ A'$): in tal modo elementi corrispondenti apparterranno alla stessa componente di $\delta^{-1}(N(U_1,\ \dots, U_w))$.
In questo modo avremo:

$$\{\mathbf{H}(n, A, X)\} \longleftrightarrow \{\mathbf{H}(n, A', X)\}$$

$\forall A,\ A' \in N(U_1,\ \dots, U_w)$, tale che la relazione sia indipendente dagli elementi della base di $X^{(w)} \setminus \Delta$.
Una volta considerato $X \setminus U$ e $X \setminus A$ con $U = \bigcup_{i=1}^{w} U_i\ =\ U_1 \cup U_2 \cup\ \dots \cup U_w$ si fa vedere come $X \setminus U$ sia un retratto per deformazione di $X \setminus A$.
Questa considerazione, permette di dare la biiezione necessaria alla definizione di una topologia sullo spazio di Hurwitz.
Gli aperti di $\mathbf{H}(n, w, X)$, denotati con $\mathbf{H}_i(n, w, X)$, saranno uguali alla controimmagine attraverso δ dell'insieme $N(U_1, \dots, U_w)$.
Introdurremo poi, i rivestimenti ramificati semplici come gli $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tali che, per ogni $x \in \mathbb{P}^1$, f sia ramificata in un solo punto della fibra $y \in f^{-1}(x)$ con $e(y) = 2$.
Si definisce quindi il sottospazio di Hurwitz $\mathbf{H}^{n,w}$ dato dall'unione disgiunta degli $\mathbf{H}^{n,w}_A = \mathbf{H}(n, A, \mathbb{P}^1)$ per ogni $A \in \mathbb{P}^w \setminus \Delta$.
È bene precisare che per ogni $A \in \mathbb{P}^w \setminus \Delta$, $\mathbf{H}^{n,w}_A$ è l'insieme delle classi d'equivalenza di rivestimenti semplici di $\mathbb{P}^1$ di grado n, con luogo di diramazione uguale ad A. Si definisce, inoltre, il rivestimento δ' come:

$$\delta'\ :\ \mathbf{H}^{n,w} \longrightarrow \mathbb{P}^w \setminus \Delta.$$

Il capitolo finale avrà lo scopo di dimostrare il teorema di Hurwitz-Clebsch sulla connessione dello spazio di Hurwitz, e quindi di come il rivestimento δ' sia in realtà un rivestimento connesso.
Per poter dimostrare il teorema di Hurwitz-Clebsch avremo bisogno del teorema di Lüroth-Clebsch del quale daremo due formulazioni equivalenti, la

prima algebrico-topologica mentre la seconda più geometrica. Dimostreremo solo la prima delle due:

Teorema 0.6. ***(Lüroth-Clebsch)*** *La superficie di Riemann a n-fogli con i punti di diramazione semplici $A_1, A_2, \ldots, A_w$ (con $w = 2n + 2g - 2$), si può sempre costruire scegliendo un conveniente sistema di tagli successivi $OA_1, OA_2, \ldots, OA_w$, rispetto a cui i rami, opportunamente numerati, subiscono le trasposizioni:*

$$(12)(12)\ldots(12)(12)\ldots\ldots(23)(23)(34)(34)\ldots\ldots(n-1,n)(n-1,n)$$

dove la traspozione (12) *compare (2g+2)-volte.*

La dimostrazione del teorema di Lüroth-Clebsch consisterà nel sostituire, secondo un procedimento preciso spiegato in dettaglio nella tesi, un insieme di dati con un altro equivalente in modo tale da ridursi a quello dell'enunciato. Tutto il procedimento è basato su una operazione di sostituzione, che non cambia la classe d'equivalenza.
Il teorema ha come scopo quello di ridurre un sistema di tagli (cappi) uscenti da un punto O fino ai punti di diramazione, pervenendo ad un sistema ordinato (in senso antiorario) $OA_2, \ldots, OA_w$ ($w = 2n + 2g - 2$), con la proprietà che lungo i primi (2g+2) tagli si attaccano i fogli 1 e 2, lungo i due tagli successivi si saldano i fogli 2 e 3, e così per le altre coppie di tagli che si susseguono.
Si arriverà così all'enunciato del:

Teorema 0.7 (Clebsch-Hurwitz). $\mathbf{H}^{n,w}$ *è connesso.*

La dimostrazione del teorema, grazie al teorema di monodromia, ha come obiettivo quello di mostrare la transitività dell'azione del gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{P}^w \smallsetminus \Delta, A)$ su $\delta^{-1}(A) = \mathbf{H}_A^{n,w}$. Perciò la connessione di $\mathbf{H}^{n,w}$ è equivalente alla transitività dell'azione suddetta. Grazie all'identificazione di $\mathfrak{S}_{n,w}$ con $\mathbf{H}_A^{n,w}$ si definiscono dei cappi $\Gamma_i \in \pi_1(\mathbb{P}^w \smallsetminus \Delta,\ A)$ che agiscono su $\mathfrak{S}_{n,w}$. In questo modo il problema della dimostrazione della transitività dell'azione si è ridotto ad un problema di combinatoria, volto a mostrare che tali cappi agiscono transitivamente su $\mathfrak{S}_{n,w}$.

Questo problema di calcolo combinatorio venne risolto da Clebsch nel 1872, nel teorema di Lüroth-Clebsch.

Bibliografia

[1] Federigo Enriques e Oscar Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli

[2] Edoardo Sernesi, *Geometria 2*, Bollati-Boringhieri

[3] Edoardo Sernesi, *Dispense del corso di Istituzioni di Geometria Superiore*

[4] William Fulton, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*

[5] A. Hurwitz, *Ueber Riemann'sche Fla(*)chen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann,**39** (1891), 1-61

[6] A. Clebsch, *Zu(*)r Theorie der Riemann'schen Fla(*)che*,Math. Ann. **6** (1872), 216-230

[7] Gareth A.Jones e David Singerman, *Complex functions*, Cambridge University Press

[8] William Fulton, *Algebraic topology*, Springer-Verlag

[9] Czes Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli