UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

presentata da Carlo Madonna

A.A. 1996/97

STUDIO DELLA DECOMPONIBILITÀ DI FIBRATI SU IPERSUPERFICI DEL $\mathbb{P}^4$ E SULLE CONDIZIONI DI ANNULLAMENTO DELLA COOMOLOGIA

(Sintesi)

Relatore esterno: Prof. Luca Chiantini

Relatore: Prof. Alessandro Verra

Classificazione AMS: 14F05

Parole chiave: Fibrato vettoriale, criteri di decomponibilità, curve sottocanoniche, coomologia di un fibrato

SINTESI

In questa tesi ci interessiamo dello studio di fibrati vettoriali di rango 2, definiti su varietà algebriche proiettive tridimensionali, particolarmente dal punto di vista delle proprietà di spezzamento.

Se X è una varietà algebrica e Y è una sua sottovarietà di codimensione n allora, localmente nell'intorno di ciascun punto, Y è definita in X da almeno n equazioni; quando è possibile definire localmente Y con esattamente n equazioni, intorno ad ogni punto, si dice che Y è "intersezione completa locale" in X (o anche "localmente intersezione completa"). Naturalmente, non sempre Y è intersezione completa locale in X; vi sono però dei casi in cui ciò avviene automaticamente: ad esempio, quando X è liscio e $n = 1$, oppure quando X, Y sono entrambi lisci (n qualunque).

Se $Y \subset X$ è intersezione completa locale di codimensione n, le equazioni che definiscono questa sottovarietà, al variare del punto, determinano (in modo non univoco) un fascio $\mathcal{F}$ di rango n che surietta sul fascio di ideali di Y e Y stesso può essere visto come sezione nulla di tale fascio. Quando $n = 1$, ovviamente $\mathcal{F} = \mathcal{I}_Y$, ma per valori maggiori di n, $\mathcal{F}$ ha, in generale, una struttura meno complicata di $\mathcal{I}_Y$ ed è di valido aiuto nello studio di proprietà geometriche di Y e dell'immersione.

La situazione migliore, da questo punto di vista, si ottiene quando si può prendere $\mathcal{F}$ localmente libero, cioè $\mathcal{F}$ è un fibrato vettoriale. Ciò avviene sempre quando X è liscio e $n = 1$; d'altra parte, per $n \geq 3$, è ancora ampiamente aperto il problema di classificare le intersezione completa locali associabili ad un fibrato, perfino nel caso in cui X è uno spazio proiettivo.

Per $n = 2$, la situazione è sostanzialmente ben compresa: sotto alcune ipotesi di regolarità su X, un procedimento di Serre prova che Y (intersezione completa locale) è associabile ad un fibrato di rango 2 se e solo se la serie canonica ω_Y sta nell'immagine della restrizione $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$; in questo caso Y è detto "sottocanonico" in X e il fibrato che si ottiene è quasi sempre unico (ad esempio, se Y è ridotto e connesso); le curve ellittiche su qualsiasi threefold liscio o la curva canonica del $\mathbb{P}^3$ sono esempi di questa situazione; ogni varietà sottocanonica di codimensione 2 è dunque ottenibile come luogo degli zeri di una sezione di un fibrato. La condizione è invertibile: se $\mathcal{E}$ è un fibrato di rango 2 su X e Y è luogo degli zeri di una sua sezione, allora Y è sottocanonico in X.

È noto che avere Y localmente intersezione completa in X *non* implica in generale l'esistenza di n divisori di X che si intersecano esattamente in Y, con molteplicità 1, cioè localmente intersezione completa non implica intersezione completa "globale"; esempi di questa situazione sono facili da costruire anche in $\mathbb{P}^3$. Nel caso sottocanonico di codimensione 2, Y è intersezione completa globale esattamente quando il fibrato associato $\mathcal{E}$ si spezza in una somma diretta $\mathcal{M} \oplus \mathcal{L}$ di fibrati lineari. Questa è la proprietà "di spezzamento" di cui ci interessiamo nella tesi ed è quindi collegata al problema di caratterizzare le intersezioni complete in X.

L'interesse per queste condizioni di spezzamento è rinforzato dal fatto che, come classicamente noto, è difficile costruire esempi di fibrati di rango 2 non spezzati su X, quando $\dim(X) \geq 4$. Esiste a tal proposito una precisa congettura (di Hartshorne) che prevede lo spezzamento di ogni fibrato di rango 2 su $\mathbb{P}^r$, $r \geq 6$.

In $\mathbb{P}^3$, d'altro lato, vi sono molti esempi di curve sottocanoniche, non intersezione completa. In questo caso, esistono semplici condizioni coomologiche sul fibrato $\mathcal{E}$ che ne determinano lo spezzamento. Il criterio principale è dovuto ad Horrocks ed afferma che $\mathcal{E}$ si spezza se e solo se la sua coomologia intermedia $\oplus_n H^1\mathcal{E}(n)$ si annulla. Tale criterio è stato raffinato da Chiantini e Valabrega, che hanno provato l'equivalenza fra spezzamento di $\mathcal{E}$ e annullamento del gruppo $H^1\mathcal{E}(m)$ per un unico, ben preciso, valore di m.

Nel caso in cui X è un threefold più generale, il criterio di Horrocks fallisce; ad esempio, ogni iperquadrica del $\mathbb{P}^4$ contiene rette, che sono curve sottocanoniche, non intersezione completa globale e determinano fibrati su X che non si spezzano, ma hanno nondimeno coomologia intermedia nulla. È stato provato da vari autori (Knorrer-Greuel, Ottaviani) che tali fibrati associati a rette sono in effetti gli unici a violare il criterio di Horrocks sulle iperquadriche del $\mathbb{P}^4$.

La tesi è proprio centrata su questo tipo di analisi: si studia sotto quali condizioni aggiuntive, il criterio di Horrocks vale su threefold più generali di $\mathbb{P}^3$. In particolare, ci interessiamo qui di ipersuperficie del $\mathbb{P}^4$ e il risultato principale ottenuto è il seguente:

Teorema. *Sia X una ipersuperficie liscia del $\mathbb{P}^4$, di grado r ed $\mathcal{E}$ un fibrato di rango 2 su X, con prima classe di Chern c_1; sia b il massimo intero per cui $H^0\mathcal{E}(-b) \neq 0$. Allora:*
se $\oplus_n H^1\mathcal{E}(n) = 0$, $\mathcal{E}$ si spezza nella somma di due fibrati lineari, a meno che non sia $-r < 2b - c_1 < r - 2$.

Esempi provano che una delle due disuguaglianze, che delimitano l'intervallo precedente, è sharp, mentre l'altra è "quasi sharp", nel senso che esistono esempi di fibrati con coomologia intermedia nulla e non spezzati, per $2b - c_1 \in [-r+1, r-3]$.

Nella tesi, mostriamo poi che, sempre fuori dall'intervallo $(-r, r-2)$, il criterio precedente può essere in effetti rafforzato, provando un risultato che estende di fatto a queste threefold il criterio di Chiantini e Valabrega.

Nell'ultima parte della tesi, estendiamo i risultati precedenti ad alcuni tipi più generali di threefolds, in spazi proiettivi di dimensione maggiore.

Una delle motivazioni che ha spinto a studiare questo problema è dovuta al crescente interesse che si sta manifestando, anche in settori diversi dalla Geometria Algebrica, per la classificazione di curve su certi tipi di threefold, quali ad esempio le quintiche lisce del $\mathbb{P}^4$ (threefold di Calabi-Yau). Le curve ellittiche su questi oggetti, ad esempio, determinano fibrati non spezzati di rango 2, il cui studio potrà eventualmente dare qualche spunto nella comprensione della geometria enumerativa di tali varietà.

La tesi è così strutturata.

Nella Parte 0 abbiamo introdotto le notazioni ed abbiamo richiamato alcuni Teoremi e Proposizioni utilizzati in seguito.

Nella Parte 1 abbiamo introdotto la Corrispondenza di Serre (Teorema (1.0.1)) che ci permette sotto opportune ipotesi di associare ad una curva Y, localmente intersezione completa e sottocanonica su una varietà X non singolare di dimensione 3, un fibrato $\mathcal{E}$ su X, in modo che Y sia data dal luogo degli zeri di una sezione di $\mathcal{E}$. Grazie a tale corrispondenza è possibile ricavare informazioni sul fibrato avendone sulla curva e viceversa (cfr. Corollario (1.0.2)). Negli esempi (cfr. §1.1) abbiamo considerato i fibrati associati ad alcune curve e abbiamo calcolato le relative classi di Chern dei fibrati a tali curve associati.

Nella Parte 2 abbiamo caratterizzato numericamente ($c_1 \leq 2 - r$ e $c_1 \geq r$), la prima classe di Chern di un fibrato indecomponibile (con $b = 0$) su una ipersuperficie non singolare di grado r del $\mathbb{P}^4$, per cui $h^1\mathcal{E}(t_0) \neq 0$ per almeno un valore $t_0 \in \mathbb{Z}$ (cfr. Corollario (2.0.2) e Proposizione (2.0.7)). Si tratta di un teorema analogo a quello di Horrocks, ed il metodo usato per dimostrarlo è una generalizzazione di quello usato da quest'ultimo. Abbiamo inoltre mostrato con degli esempi (cfr. Esempi (2.0.4) e (2.0.6)) che per quasi tutti i valori del c_1 che non rientrano nella caratterizzazione data (ovvero $2 - r < c_1 < r$), esistono fibrati indecomponibili con $h^1\mathcal{E}(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{Z}$. Il metodo utilizzato non ci ha permesso di fornire esempi nei casi $c_1 = r - 1$ e $c_1 = r - 2$, per i quali nulla possiamo dire.

Infine abbiamo individuato un valore t_0 per il quale, supponendo che $c_1 \leq 2 - r$ oppure $c_1 \geq r$, la condizione $h^1\mathcal{E}(t_0) = 0$ implichi la decomponibilità del fibrato $\mathcal{E}$ (cfr. Teorema (2.1.8)). Il metodo usato per individuare tale valore è sostanzialmente quello usato da Chiantini e Valabrega.

Nella Parte 3 abbiamo provato un criterio analogo a quello della Parte 2, prima per varietà non singolari intersezione completa in $\mathbb{P}^n$, di dimensione 3, infine per varietà non singolari di dimensione 3 in $\mathbb{P}^n$, sottocanoniche e con $h^1\mathcal{O}_X(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Essendo le dimostrazioni degli enunciati contenuti in questa parte una estensione di quelle date per gli analoghi nella Parte 2 abbiamo indicato solo le differenze più significative.

Infine una nota sulla Appendice a cui faremo spesso riferimento. Qui abbiamo riportato, per completezza, i calcoli svolti, per comodità, con il computer.