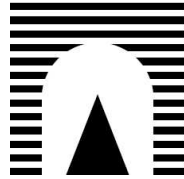


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali



Sintesi di tesi di Laurea in Matematica

# Gruppi di Schottky e frattali

Il Relatore  
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato  
Laura Lombi

Anno Accademico 2005-2006

Luglio 2006

Classificazione: 28A80-00A05

Parole chiave: Frattali, trasformazioni di Möbius

# Sintesi

Spesso le invenzioni più belle e interessanti nascono per caso e sono quelle che maggiormente lasciano senza parole.

«Ho scoperto cose meravigliose e ne fui sbalordito (...) dal nulla ho creato un nuovo straordinario mondo» queste furono le parole che János Bolyai scrisse ai familiari per renderli partecipi delle proprie invenzioni sulla geometria non-Euclidea nel 1823.

Tali scoperte, fatte indipendentemente anche da Lobachevsky nello stesso periodo, diedero vita ad un nuovo modo di concepire lo spazio che sfociò nella nascita della geometria moderna. La geometria iperbolica riusciva a descrivere, per mezzo di particolari funzioni, relazioni che andavano oltre l'immaginazione e la sua applicazione poteva essere sfruttata in diversi settori; si potevano descrivere fenomeni fisici come le onde, il calore e l'elettricità.

Un altro tema centrale nella geometria è la simmetria. Ognuno di noi conosce la simmetria nella geometria Euclidea, ma a partire dal diciannovesimo secolo si andò ad estendere l'idea di simmetria e congruenza, tracciando le analogie tra il mondo familiare Euclideo e il nuovo universo non-Euclideo. Un contributo essenziale fu dato dal matematico tedesco August Möbius che ebbe l'idea di identificare immagini della sfera con figure del piano solo se esse differivano per una qualche distorsione. Tali speciali relazioni, ora dette funzioni di Möbius, potevano essere manipolate mediante semplici conti lavorando nell'aritmetica dei numeri complessi.

Alla fine del secolo, uno dei più grandi matematici della sua epoca, Felix Klein, presentò un famoso articolo all'Università di Erlangen che unificava la

geometria di Bolyai-Lobachevsky e le trasformazioni di Möbius in un concetto più vasto di simmetria, come mai nessuno aveva fatto prima. Inoltre, tale nuova visione permetteva di capire molte delle speciali funzioni che erano servite per descrivere fenomeni fisici reali.

Nel 1970 la visione proposta da Klein trovò nuove applicazioni con l'avvento di due scoperte; la creazione di computer più veloci e potenti e la crescente consapevolezza che i fenomeni caotici, osservati precedentemente solo in casi eccezionali, in realtà erano onnipresenti e inoltre fornivano modelli più precisi per descrivere molti aspetti del mondo fisico. Una delle caratteristiche principali dei fenomeni caotici è che la loro struttura è costituita da parti che in scala ridotta sono simili al tutto; tale caratteristica è detta auto-somiglianza.

Si sviluppò così un nuovo ambito della matematica che si impegnava ad essere più concreta e visibile. Un matematico che indirizzò il suo lavoro in questo senso fu Benoit Mandelbrot.

Egli era convinto che la matematica potesse, attraverso formule, rappresentare oggetti e fenomeni reali, in modo da prevedere in una qualche maniera l'ignoto, la casualità degli eventi, così da reagire e comportarsi in modo adeguato.

Se pensiamo ad esempio, alle figure geometriche che fin dalle scuole elementari siamo abituati a studiare, ci renderemo conto che poi nella realtà esistono oggetti che non hanno alcun stereotipo a cui essere associati, indubbiamente le figure che conosciamo dalla geometria fanno da base ad altre che si possono incontrare, ma per il resto... Ecco allora l'esigenza di studiare, creare immagini che abbiano delle caratteristiche che si discostano da quelle incontrate nelle scuole.

Da qui i frattali. La parola 'frattale' viene dal latino 'fractus' da 'frangere': rompere creare frammenti irregolari, e quindi rende bene l'idea intuitiva che abbiamo di queste figure estremamente frastagliate.

L'espressione 'frattale' è stata scelta dallo stesso Mandelbrot, agli inizi degli anni '70, per indicare un qualsiasi insieme di punti avente una dimensione frazionaria (non intera) e che, almeno in buona approssimazione,

avesse la proprietà dell'auto-somiglianza. Non c'è una definizione rigorosa di ciò che si intende per figura frattale, è più che altro un'espressione usata per illustrare alcuni aspetti qualitativi dell'oggetto in questione. Possiamo distinguere, però, tra 'polvere frattale' e 'curva frattale'.

Per '**polvere frattale**' intendiamo insiemi di punti che occupano una parte di piano più di un insieme semplice di punti, ma meno di una curva. Equivalentemente la dimensione di Hausdorff di tali insiemi è strettamente maggiore di 0 e minore di 1.

Con l'espressione '**curve frattali**' indichiamo, invece, curve che possiedono le caratteristiche tipiche dei frattali per i quali la dimensione di Hausdorff è compresa tra 1 e 2.

Per avere in mente un esempio di frattale possiamo immaginare una foglia di felce o una pianta di cavolfiore, immagini presenti nel nostro quotidiano.



Figura 1: Frattali in natura.

È sbagliato credere che gli oggetti frattali siano stati scoperti solo recentemente, essi furono in realtà già introdotti da matematici dell'antichità. Infatti uno dei contributi principali che Mandelbrot diede, fu quello di unificare sotto una nuova definizione oggetti, spesso già esistenti, che hanno caratteristiche in comune tra di loro e che prima di quel momento erano stati visti solo come controesempi o esempi di concetti più vasti e teorici; si pensi all'insieme ternario di Cantor: modello di insieme compatto, totalmente disconnesso e di misura di Lebesgue nulla, ma che soddisfa alle due proprietà sovraesposte e quindi fornisce uno dei più semplici e intuitivi esempi di frattale.

Un altro tipo di frattale è l'insieme di Apollonio, matematico vissuto tra il 250 e il 200 a.C., che con un procedimento molto semplice riuscì a costruire un'immagine interessante e particolare che ai giorni nostri possiamo vedere come frattale nella geometria iperbolica. È sbalorditivo osservare come già dall'antichità il concetto che si aveva di simmetria cercava istintivamente di andare oltre i canoni previsti dalla geometria di Euclide e inoltre gli strumenti che si possedevano a quell'epoca erano praticamente pari al niente paragonati a quelli che si possiedono oggi e con i quali possiamo produrre immagini a livelli di infinita precisione ma del tutto analoghe a quelle del III secolo a.C.

I frattali più conosciuti tra quelli studiati in tempi recenti, a partire dalla fine del 1800, sono dovuti a matematici quali Gaston Maurice Julia, il suo allievo Benoit Mandelbrot e il matematico tedesco, Friedrich Hermann Schottky (1851-1935). Quest'ultimo che lavorò con matematici illustri quali Weierstrass e Helmholtz, presentò nella sua tesi gli oggetti, di cui ci interesseremo nel corso del trattato, ai quali venne attribuito il suo nome. I suoi studi affascinarono Klein, che li sottopose anche all'attenzione di Poincaré.

Grazie alle immagini spettacolari e intriganti, ottenute tramite l'uso di calcolatori sempre più potenti, la collettività si è riavvicinata a questa parte della matematica che presenta applicazioni concrete, in particolare David Mumford, nel cui libro 'Indra's pearls' è stato trovato lo spunto per sviluppare questa tesi.

Cominciamo ora ad illustrare il percorso che si è sviluppato in questo lavoro che ha come punto di partenza lo studio di un particolare gruppo di trasformazioni, i gruppi di Schottky, e come traguardo la creazione di frattali di cui forniremo alcune immagini.

In dettaglio lo scritto è organizzato in sei capitoli, che andremo a descrivere.

Nel primo capitolo, si è data la definizione di dimensione per sottospazi topologici di  $\mathbb{R}^n$  così come venne pensata da Menger.

**Definizione 1.** (Cf. Definizione 1.1.1)

La dimensione di un arbitrario sottospazio  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  è una funzione a valori interi, denotato con  $\dim X$ , che soddisfa i seguenti assiomi:

1. per un singleton  $\{p\}$ ,  $\dim(\{p\}) = 0$ , per intervalli unitari  $I^1$ ,  $\dim(I^1) = 1$  ed in generale per ipercubi  $m$ -dimensionali  $I^m$ ,  $\dim(I^m) = m$ ;
2. (Monotonicità)  $X' \subset X$  implica

$$\dim X' \leq \dim X;$$

3. (Stabilità numerabile) sia  $X$  unione numerabile di sottoinsiemi chiusi  $X_i$  di  $\mathbb{R}^n$ , allora

$$\dim \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) \leq \max_{i \geq 1} \dim X_i;$$

4. (Invarianza topologica) per un'arbitraria applicazione  $\varphi$  scelta nella famiglia degli omeomorfismi da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  si ha

$$\dim(\varphi(X)) = \dim X.$$

Abbiamo così costruito per induzione una funzione e verificato che per essa valessero i quattro assiomi, concludendo in tal modo che la funzione data fosse la dimensione topologica.

**Definizione 2.** (Cf. Definizione 1.1.12)

Si definisce per induzione la **dimensione** di  $X$ :

- $X = \emptyset \iff \dim X = -1$ .
- Uno spazio  $X$  ha  $\dim X \leq n$  ( $n \geq 0$ ) in un punto  $p$  se  $p$  possiede un intorno arbitrariamente piccolo  $U$  tale che  $\dim \partial U \leq n - 1$ .
- $\dim X \leq n$  se  $\dim X \leq n$  in ogni suo punto.
- $X$  ha dimensione  $n$  in un punto  $p$  se è vero che  $\dim X \leq n$  nel punto  $p$  e risulta falso che  $\dim X \leq n - 1$  in  $p$ .

- $X$  ha dimensione  $n$  se è vero che  $\dim X \leq n$  ed è falso che  $\dim X \leq n-1$ .
- $\dim X = \infty$  se  $\dim X \leq n$  è falsa  $\forall n$ .

Abbiamo continuato il capitolo fornendo alcune tra le principali proprietà di tale dimensione.

Nel secondo capitolo, dopo aver fornito le necessarie definizioni iniziali estrapolate dalla teoria della misura, abbiamo trattato la dimensione di Hausdorff. Siamo partiti dal definire la  $s$ -misura di Hausdorff.

**Definizione 3.** (Cf. Definizione 2.1.4)

Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$  e  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -ricoprimento di  $X$ . Poniamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \in [0, \infty].$$

Si dice **misura  $s$ -dimensionale di Hausdorff** il limite seguente

$$\mathcal{H}^s(X) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(X).$$

Per poi illustrare le sue principali proprietà e poter definire senza nessuna difficoltà la dimensione di Hausdorff, di vitale importanza per poter successivamente spiegare che cosa intendiamo per oggetto frattale.

Riportiamo qui un lemma che ci permette di chiarire meglio il legame esistente tra la misura e la dimensione di Hausdorff.

**Lemma 1.** (Cf. Lemma 2.1.7)

Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq s < t < \infty$ .

(i) Se  $\mathcal{H}^s(X) < \infty$ , allora  $\mathcal{H}^t(X) = 0$ .

(ii) Se  $\mathcal{H}^t(X) > 0$ , allora  $\mathcal{H}^s(X) = +\infty$ .

Tramite questo possiamo notare come la  $s$ -misura di Hausdorff, in funzione del parametro  $s$ , presenta un punto di discontinuità tra i valori  $0$  e  $\infty$ , proprio tale valore costituisce la dimensione cercata.

**Definizione 4.** (Cf. Definizione 2.2.1)

Chiamiamo **dimensione di Hausdorff** di un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  il numero reale

$$\dim_H(X) = \sup_{0 \leq s < \infty} \{\mathcal{H}^s(X) = \infty\} = \inf_{0 \leq s < \infty} \{\mathcal{H}^s(X) = 0\}$$

Per poter caratterizzare i frattali occorre dare un nuovo tipo di dimensione illustrata di seguito.

**Definizione 5.** (Cf. Definizione 2.2.3)

Sia  $X$  un insieme limitato in  $\mathbb{R}^n$ . Per un numero arbitrario positivo  $\epsilon$ , sia  $N(\epsilon)$  il numero minimo di  $\epsilon$ -sfere necessarie per ricoprire  $X$ . Poiché  $X$  è limitato avrà un ricoprimento finito. Diciamo che il seguente limite, se esiste

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

è la **dimensione frattale** di  $X$  e la denoteremo con  $\dim_F(X)$ .

Il capitolo si conclude con una relazione che evidenzia il legame tra le varie dimensioni analizzate, la seguente:

$$\dim_T(X) \leq \dim_H(X) \leq \dim_F(X).$$

A questo punto, allora possiamo definire un oggetto frattale come un oggetto che possiede dimensione di Hausdorff non intera e ha la caratteristica che ogni sua parte è in miniatura simile al tutto, ossia è un oggetto auto-simile. La relazione data sopra, però ci fornisce una definizione variante di tali oggetti che possono possedere dimensione di Hausdorff intera ma non coincidente con quella topologica o frattale. Tali situazioni però sono talmente rare che sono considerate casi limite.

Nel terzo capitolo abbiamo analizzato un modello di geometria iperbolica, quello introdotto da Lobachevsky.

Con geometria iperbolica si intende una geometria non-Euclidea, in cui tutti gli assiomi della geometria classica valgono tranne il V° postulato, anche detto delle parallele. Tale assioma stabilisce che per un fissato punto esterno



ad una retta data esiste *una e una sola* retta parallela a quella data. Sperimentalmente tale affermazione non potrà mai essere dimostrata, poiché per quanto grandi prendiamo le rette non sapremo mai all' 'infinito' come si comportano. Il fatto che tutti gli altri assiomi di Euclide siano di carattere 'finito', ci fa dubitare sulla sua indipendenza da quest'ultimi. Se così non fosse, allora esso risulterebbe una conseguenza logica degli altri e quindi si potrebbe eliminarlo dalla lista dei postulati e fornirne una dimostrazione rigorosa. Per secoli i matematici si adoperarono per trovare questa dimostrazione, ma ad ogni tentativo si incappava in un errore logico. Bolyai e Lobachevsky, risolsero la questione costruendo in tutti i particolari una geometria in cui non valesse il postulato delle parallele.

La prima definizione che abbiamo così riportato è quella di geometria.

**Definizione 6.** (Cf. Definizione 3.2.1)

Una **geometria** è un insieme arbitrario, i cui elementi sono detti punti, su cui si definisce un metodo che ci indica come trovare la distanza  $|ab|$  tra due punti  $a$  e  $b$  tale che soddisfa quattro proprietà:

- (a)  $|ab| \geq 0$  e  $|ab| = 0 \Leftrightarrow a = b$
- (b)  $|ab| = |ba|$
- (c)  $|ac| \leq |ab| + |bc|$
- (d)  $\forall a, b$  e  $\forall \alpha, \beta$  numeri positivi  $\exists$  una catena di punti  $p_1, p_2, \dots, p_n$  che congiunge  $a$  e  $b$  tale che

$$p_1 = a \quad e \quad p_n = b$$

$$0 \leq |p_1p_2| + |p_2p_3| + \dots + |p_{n-1}p_n| - |ab| \leq \alpha$$

$$|p_i p_{i+1}| < \beta \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

A questo punto abbiamo cominciato a costruire passo per passo tutti gli elementi principali che vanno a costituire tale modello. In questa costruzione abbiamo denotato tra virgolette i vari elementi per sottolineare che solo alla

fine della costruzione, con il verificare delle proprietà  $a \div d$ , saremo sicuri che essa rappresenta appunto una geometria.

Abbiamo considerato il gruppo  $\mathcal{G}$  di trasformazioni del semipiano superiore che portano  $z_1$  in

1.

$$z_2 = \frac{a + bz_1}{c + dz_1} \quad \text{se } bc - ad > 0$$

o in

2.

$$z_2 = \frac{a + b\bar{z}_1}{c + d\bar{z}_1} \quad \text{se } bc - ad < 0$$

per  $a, b, c$  e  $d$  numeri reali.

Le trasformazioni 1. e 2. saranno chiamate ‘movimenti’ poiché una volta definita la distanza troveremo che esse la preservano.

Il secondo elemento che si è andati a costruire sono le ‘linee’.

**Definizione 7.** (Cf. Definizione 3.5.4)

Chiamiamo ‘linee’ della nuova geometria esattamente i raggi e le semicirconferenze del semipiano superiore ortogonali alla retta reale.

Da qui la definizione fondamentale che permette di concludere che tale costruzione è una geometria.

**Definizione 8.** (Cf. Definizione 3.5.6)

Si definisce la **distanza** tra due punti  $z_1$  e  $z_2$  della geometria tramite una delle due formule:

$$\|z_1, z_2\| = \left| \log_A \frac{z_2 - a}{z_1 - a} \right| \quad \text{se } Re(z_1) = Re(z_2) = a, \quad (1)$$

oppure

$$\|z_1, z_2\| = \left| \log_A \left( \frac{z_2 - b}{z_2 - a} : \frac{z_1 - b}{z_1 - a} \right) \right| \quad \text{se } Re(z_1) \neq Re(z_2), \quad (2)$$

dove  $a, b$  sono gli estremi della semi-circonferenza passante per  $z_1$  e  $z_2$  ortogonale alla linea reale.

In tale modello risulta vero l'asserto opposto al V° postulato, detto **assioma di Lobachevsky** che afferma: 'data una linea  $l$  e un punto  $A$  non appartenente a  $l$ , esiste più di una linea passante per  $A$  e parallela a  $l$  (ossia che non incontra  $l$ )'. Inoltre, in questa geometria con la nuova definizione di linea, i triangoli sono tutt'altro rispetto agli oggetti che siamo abituati a vedere. Essi vengono detti **triangoli ideali** o iperbolici perché è facile osservare che la somma degli angoli interni è strettamente minore di  $180^\circ$ .

Nel quarto capitolo abbiamo definito le trasformazioni di Möbius.

**Definizione 9.** (Cf. Definizione 4.3.1)

Sia  $z$  un numero complesso. Chiamiamo **trasformazione di Möbius** una funzione del tipo

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

in cui i coefficienti  $a, b, c$  e  $d$  sono numeri complessi e inoltre vale che  $ad - bc \neq 0$ . La quantità  $ad - bc$  è detta *determinante* di  $T$ .

Consideriamo tali trasformazioni come funzioni che agiscono sulla sfera di Riemann, ossia sui complessi estesi,  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La collezione di tali elementi forma un gruppo (Cf. Proposizione 4.3.2), che indichiamo con  $\mathcal{M}$ , che spesso conviene associare a  $SL(2, \mathbb{C})$ , ossia alle matrici speciali  $2 \times 2$  a coefficienti complessi. Abbiamo notato anche che nel sottocaso  $SL(2, \mathbb{R})$  esse preservano la retta dei reali e il semipiano superiore, che sulla sfera di Riemann corrisponde alla calotta superiore (Cf. Proposizione 4.3.3).

Esse preservano angoli e circonferenze (Cf. Teorema 4.3.6), ma a differenza delle simmetrie nella geometria Euclidea, distorcono le distanze.

**Proposizione 1.** (Cf. Proposizione 4.3.7)

Le trasformazioni di Möbius,  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ , possono alterare le distanze tra due punti  $z, w$  di un fattore

$$\frac{1}{|cz + d| \cdot |cw + d|}$$

Un'altra caratteristica degna di nota è enunciata nel seguente.

**Teorema 1.** (Cf. Teorema 4.3.5)

Date due triple qualsiasi di punti distinti in  $\hat{\mathbb{C}}$  esiste una e un'unica trasformazione di Möbius che porta la prima tripla nella seconda. In altre parole, se  $P, Q, R \in \hat{\mathbb{C}}$  sono punti distinti e se  $P', Q', R' \in \hat{\mathbb{C}}$  è un'altra tripla distinta di punti  $\Rightarrow \exists!$   $T$  trasformazione di Möbius tale che  $T(P) = P'$ ,  $T(Q) = Q'$  e  $T(R) = R'$ .

Questo enunciato ci permetterà poi di concludere che prese due circonferenze esiste un'unica trasformazione in  $\mathcal{M}$  che porta l'una nell'altra.

Il discorso prosegue con il dare due definizioni: quella intuitiva di punto fisso  $z$  di una funzione  $g$ , che è il punto per cui vale  $g(z) = z$  (Cf. Definizione 4.3.4) e l'altra di traccia di una trasformazione data nella seguente.

**Definizione 10.** (Cf. Definizione 4.3.9)

Sia  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  una trasformazione di Möbius a cui è associata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

chiamiamo la **traccia di una matrice** il valore  $a + d$  che denoteremo con  $Tr(A)$  e **traccia di una trasformazione**<sup>1</sup>  $T$ , il valore  $Tr(T) = \frac{Tr(A)}{\det(A)^{1/2}}$ .

Abbiamo proseguito fornendo tutte le definizioni, proposizioni e teoremi per poter classificare le trasformazioni di Möbius che qui riassumiamo nella seguente tabella.

### Classificazione delle trasformazioni di Möbius

	Punti fissi	$Tr^2(T)$
<b>Lassodromiche</b>	una sorgente e un pozzo	$Tr^2(T) \notin [0; 4]$
<b>Iperboliche</b>	una sorgente e un pozzo	$Tr^2(T) \in (4; \infty) \subset \mathbb{R}$
<b>Ellittiche</b>	due neutri	$Tr^2(T) \in [0; 4]$
<b>Paraboliche</b>	uno sia sorgente che pozzo	$Tr^2(T) = 4$

<sup>1</sup>Se si pensa  $T \in SL(2, \mathbb{C})$  le due definizioni coincidono,  $Tr(A) = Tr(T)$ .

	Coniugate a...
<b>Lassodromiche</b>	$T(z) = kz$ con $ k  \neq 1$
<b>Iperboliche</b>	$T(z) = kz$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 1$
<b>Ellittiche</b>	$T(z) = kz$ con $ k  = 1$ $k \neq 1$
<b>Paraboliche</b>	$T(z) = z + a$ con $k = 1$

Abbiamo così concluso la parte introduttiva sulle trasformazioni di Möbius.

Il lavoro nel capitolo quinto entra nel vivo dell'argomento trattato, i gruppi di Schottky.

Nella prima parte abbiamo approfondito le caratteristiche dei sottogruppi di  $\mathcal{M}$ , introducendo nuove definizioni che hanno permesso di spiegare la natura dei gruppi di Schottky, attraverso le loro proprietà.

La seconda parte racchiude in se il cuore della tesi. Si comincia con la definizione generica di gruppi di Schottky di genere  $n$ .

**Definizione 11.** (Cf. Definizione 5.2.2)

Sia  $n \geq 1$  e siano  $C_k, C'_k$ , con  $k = 1, \dots, n$ ,  $2n$  curve di Jordan su  $\hat{\mathbb{C}}$  che siano mutualmente disgiunte e che limitano un dominio connesso. Chiamiamo  $D$  la parte esterna comune a tutte le  $2n$  curve e supponiamo che per ogni  $k$  esiste una trasformazione di Möbius,  $A_k$ , con le seguenti proprietà:

- (i) i bordi delle curve vanno nei bordi, ossia  $A_k(C_k) = C'_k$ ;
- (ii)  $A_k$  manda l'esterno di  $C_k$  nell'interno di  $C'_k$ , in particolare si ha che  $A_k(D) \cap D = \emptyset$ .

Sia  $G$  il gruppo generato da  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Allora  $G$  è detto un **gruppo di Schottky** e  $D' = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$  è un dominio fondamentale per  $G$ .

Noi però ci siamo occupati dei **gruppi di Schottky classici**, che sono i gruppi di Schottky con la variante che tutte le  $2n$  curve di Jordan sono circonferenze. Abbiamo analizzato in dettaglio come agiscono tali gruppi su quattro circonferenze, ossia i gruppi di genere  $n = 2$ .

Abbiamo dimostrato due risultati importanti, riportati qui di seguito.

**Proposizione 2.** (Cf. Proposizione 5.2.5)

*Sia data una trasformazione lassodromica che accoppia due dischi. La condizione necessaria affinché l'azione di tale funzione riduca i raggi dei trasformati dei dischi iniziali in maniera arbitrariamente piccola è che tali dischi siano disgiunti.*

**Teorema 2.** (Cf. Teorema 5.2.6)

*Sia  $G$  un gruppo di Schottky classico con due generatori che agisce su quattro cerchi disgiunti. Allora  $\exists k, C \in \mathbb{R}$  con  $k > 1$  tali che i raggi di tutti i cerchi del livello  $l$  sono al più  $Ck^{-l}$ .*

Tali enunciati hanno permesso di concludere che se i quattro cerchi iniziali di Schottky sono disgiunti allora l'insieme limite<sup>2</sup> che il gruppo genera è un esempio di polvere frattale. Abbiamo creato così un metodo alternativo per generare questi oggetti ancora per certi versi ignoti.

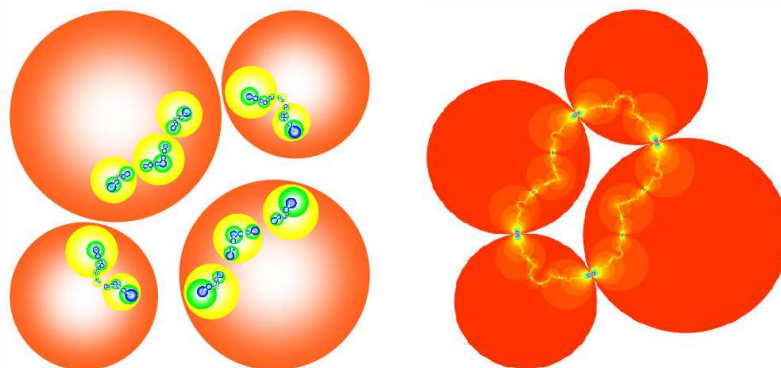


Figura 2: Polvere di Schottky e curva frattale di Schottky.

Nel sesto ed ultimo capitolo, abbiamo fatto una piccola modifica sui quattro dischi iniziali di Schottky prendendoli tangenti a due a due.

In questo caso le trasformazioni che generano il gruppo devono rispettare tre determinate condizioni. Da tali restrizioni otteniamo che alcuni punti

---

<sup>2</sup>L'insieme limite corrisponde alla chiusura dell'insieme formato dai punti fissi delle trasformazioni del gruppo.

limite coincidono; tali punti sono di congiunzione tra i vari dischi di Schottky che si vanno costituendo, in questa maniera siamo sicuri che l'insieme limite che ne risulterà sia effettivamente una curva frattale e non più polvere.

Il capitolo si conclude riprendendo l'immagine creata da Apollonio nel III secolo a.C. Abbiamo voluto mettere a confronto il metodo, ovviamente più meccanico e ripetitivo, utilizzato dal matematico per generare tale immagine, con il procedimento, indubbiamente più preciso, fornito dall'azione di un gruppo particolare di Schottky su elementi del tutto differenti. È sbalorditivo come tali metodi differenti portino allo stesso risultato.

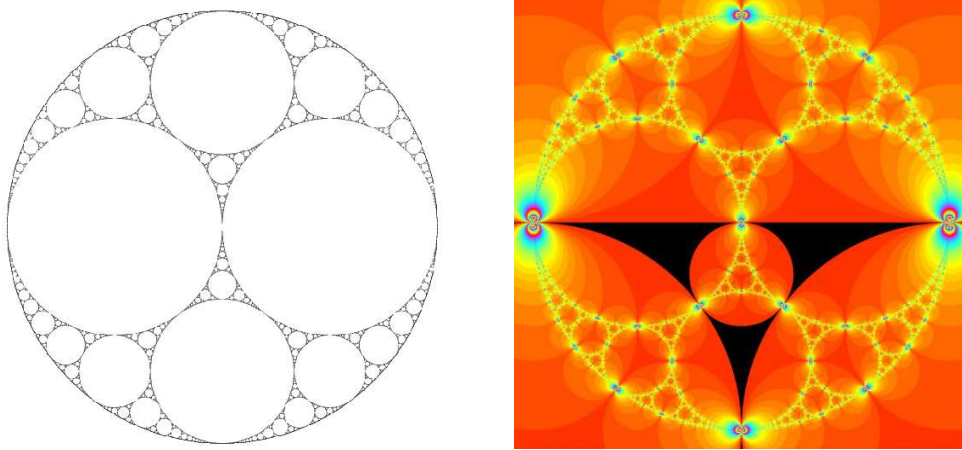


Figura 3: Confronto tra la curva di Apollonio e l'insieme limite del gruppo di Schottky.

# Bibliografia

- [1] Lars V. Ahlfors. The structure of a finitely generated Kleinian group. *Acta Math.*, 122:1–17, 1969.
- [2] Michael Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [3] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.
- [4] Richard Courant and Herbert Robbins. *Che cos'è la matematica?* Paolo Boringhieri, Turin, 1974. Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi, Con una prefazione di Emma Castelnuovo, Tradotto dall'inglese da Liliana Ragusa Gilli, Ristampe, Universale Scientifica, No. 65/66/67.
- [5] Gerald A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [6] Michele Emmer. *La perfezione visibile*. Theria, Roma, 1991. Matematica e arte.
- [7] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [8] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.



- [9] Rubén A. Hidalgo. On Schottky groups with automorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 19(2):259–289, 1994.
- [10] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [11] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982. Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee].
- [12] Benoit B. Mandelbrot and Richard L. Hudson. *The (mis)behavior of markets*. Basic Books, New York, 2004. A fractal view of risk, ruin, and reward.
- [13] Bernard Maskit. A characterization of Schottky groups. *J. Analyse Math.*, 19:227–230, 1967.
- [14] David Mumford, Caroline Series, and David Wright. *Indra’s pearls*. Cambridge University Press, New York, 2002. The vision of Felix Klein.
- [15] V. V. Nikulin and I. R. Shafarevich. *Geometries and groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by M. Reid, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [16] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and fractals*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004. New frontiers of science, With a foreword by Mitchell J. Feigenbaum.
- [17] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994. Programma di matematica fisica elettronica.
- [18] Mitsuhiro Shishikura. Topological, geometric and complex analytic properties of Julia sets. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 886–895, Basel, 1995. Birkhäuser.

- [19] John Stillwell. *Sources of hyperbolic geometry*, volume 10 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [20] Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, and Jun Kigami. *Mathematics of fractals*, volume 167 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Translated from the 1993 Japanese original by Kiki Hudson.