Indice

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica

di

Elisabetta Leone

Le singolarità delle curve algebriche piane

Relatore Prof. Edoardo Sernesi

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 1996 - 1997
FEBBRAIO 1998

Classificazione AMS : 14H20 , 14E05
Parole Chiave : singolarità , anelli locali , trasformazioni quadratiche .

Elisabetta Leone è nata a Roma il 20 Novembre 1973, ha conseguito il Diploma di maturità scientifica presso il Liceo Scientifico statale ″Tullio Levi Civita″ di Roma nel Luglio 1992.
Si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso la Terza Università degli Studi di Roma nell'anno accademico 1992 - 1993.
Ha vinto la borsa di studio dell'ADISU per gli anni accademici 1994-1995, 1996-1997.
È stata borsista collaboratrice per un anno presso la biblioteca dell'università e per due anni presso il laboratorio di calcolo della stessa.
Ha presentata per la prova di qualificazione all'esame di Laurea le seguenti tesine orali: ″Teoria del rinnovo″ e ″Discriminante e teorema di Stickelberger sulla parità del numero di fattori irriducibili di un polinomio di $\mathbb{Z}_p[X]$″.

Introduzione

In questa tesi vengono esposti i principali risultati della teoria classica delle singolarità delle curve algebriche piane, sia dal punto di vista geometrico che da quello analitico, mantenendo sempre un linguaggio il più elementare possibile. Tutti i risultati presentati sono ben noti, anche nella loro dimostrazione, persino ai matematici del secolo scorso, però sono presenti in letteratura in maniera molto ″sparpagliata″. Si è perciò preferito non tanto presentare una trattazione esaustiva della letteratura apparsa su tale argomento , quanto piuttosto operare, nell'ambito dei risultati presi in esame, una selezione tesa a presentare una collezione dei risultati che fosse il più possibile omogenea. Sono stati preferiti, quindi, gli approcci di tipo geometrico rispetto a quelli più spiccatamente algebrici.

In tutta la trattazione si opera su un qualsiasi campo K algebricamente chiuso di caratteristica nulla, con eccezione del secondo capitolo in cui si è preferito lavorare sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Si assume, inoltre, come nota l'algebra commutativa presente in [**?**], così come i concetti basilari della teoria delle varietà algebriche presenti in [**?**] e in [**?**].

Nel corso del primo capitolo si introduce la definizione classica di curva algebrica piana $\mathcal{C}$ affine (risp. proiettiva) come classe di proporzionalità di polinomi non costanti (risp. omogenei) in $K[X,Y]$ (risp. $K[X_0,X_1,X_2]$). Inoltre vengono presentate le nozioni di base, valide sia nel caso affine che in quello proiettivo, di molteplicità di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta r in un punto P, di molteplicità di P, distinguendo tra punti semplici e punti multipli (o singolari), di tangenti a $\mathcal{C}$ in P e, infine, di anello locale della curva.
Questo capitolo, di natura essenzialmente propedeutica, si conclude con i principali risultati relativi al discriminante di un polinomio in $D[X_1,...,X_n]$, con D dominio a fattorizzazione unica. In tutto il primo capitolo ci si riferisce costantemente al materiale sulle curve algebriche piane presente in [**?**] e in

[**?**], in virtù della loro straordinaria semplicità espositiva.

Il secondo capitolo si apre con la definizione dei punti regolari e di quelli singolari per un polinomio $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ in termini del suo discriminante. Si passa poi ad un'analisi esaustiva del comportamento delle radici di $f(X,Y)$ nell'intorno di un qualsiasi punto $a \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, dove $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ è da intendersi come l'unione $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si vuole, nello specifico, estendere ai punti singolari il teorema delle funzioni implicite che, ricordiamo, afferma l'esistenza di un'unica serie di potenze con raggio di convergenza positivo $\bar{Y} = b_1 + b_2t^2 + ... \in \mathbb{C}[[t]]$ tale che $f(a+t, \bar{Y}) = 0$, per ogni $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ punto della curva $f(X,Y) = 0$ con almeno una derivata parziale di $f(X,Y)$ non nulla in (a,b).

Si considerano così sostituzioni del tipo $\bar{X} = a+t^r, \bar{Y} = P(t)$ se $a \in \mathbb{C}$ oppure $\bar{X} = t^{-r}, \bar{Y} = P(t)$ se $a = \infty$, con $r \geq 1$ e $P(t) \in \mathbb{C}((t))$ (campo delle serie di Laurent formali), tali che $f(\bar{X}, \bar{Y}) \equiv 0$. In entrambi i casi la coppia $(\bar{X}, \bar{Y})$ si dice **parametrizzazione di Puiseux per f in a**.

Si distinguono poi le parametrizzazioni riducibili da quelle irriducibili, si definisce un **posto di f** come la classe di equivalenza di parametrizzazioni irriducibili e, infine, si arriva al teorema che costituisce il fulcro di questo capitolo : il *Teorema di Puiseux* (1850).

Con questo teorema, si riesce a dimostrare l'esistenza di un numero finito di parametrizzazioni di Puiseux per f in un punto n-plo $a \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. Tali parametrizzazioni sono irriducibili, uniche (a meno di permutazioni cicliche), della forma $(\bar{X}_1 = a + t^{r(1)}, \bar{Y}_1)$, ..., $(\bar{X}_s = a + t^{r(s)}, \bar{Y}_s)$ e soddisfano le condizioni seguenti:

(i) $r(1) + ... + r(s) = n$.

(ii) Le serie $\bar{Y}_1$,.....,$\bar{Y}_s$ hanno raggio di convergenza positivo .

(iii) Per ogni $X \in D \backslash \{a\}$, dove D è un opportuno intorno di a , le n radici distinte $Y_1(z)$,...,$Y_n(z)$ di $f(X,Y)$ coincidono , a meno dell'ordine , con gli n valori $\bar{Y}_j(\tau_j)$, al variare di τ_j tra le $r(j)$ determinazioni di $(X-a)^{\frac{1}{r(j)}}$ e $j = 1, ..., s$.

Si propongono poi alcuni esempi di parametrizzazioni di Puiseux dai quali si evince che se si considera una parametrizzazione $(\bar{X}, \bar{Y})$ con raggio di convergenza di $\bar{Y}$ pari a $R > 0$, allora i punti $(\bar{X}(t), \bar{Y}(t)) \in \mathbb{C}^2$, con $t \in D(0,R) \backslash \{0\}$, appartengono alla curva definita da f.

In questa fase il riferimento principale è il [**?**]. Il capitolo si chiude con una particolare rappresentazione grafica di due esempi di curve algebriche piane con punto singolare nell'origine tratta da [**?**]; tale rappresentazione appare come un ″sistema planetario″.

Si passa poi, nel terzo capitolo, ad uno studio da un diverso punto di vista, introducendo la teoria delle trasformazioni quadratiche come appare in [**?**]. I vari paragrafi che costituiscono questo capitolo sono strettamente collegati tra di loro; infatti, come apparirà evidente nel corso della trattazione, spesso sono usati in maniera decisiva risultati non banali conseguiti in paragrafi precedenti. Nel primo di questi paragrafi si dà la definizione di trasformazione quadratica standard T tra due piani proiettivi come l'applicazione razionale :

$$\begin{array}{rcl} T : S_2 & \longrightarrow & S_2^{'} \\ [x_0, x_1, x_2] & \longmapsto & [x_1x_2, x_2x_0, x_0x_1] = [y_0, y_1, y_2]. \end{array}$$

I punti $P_0 = [1, 0, 0]$, $P_1 = [0, 1, 0]$, $P_2 = [0, 0, 1]$ si dicono **punti fondamentali** di T, mentre le rette $L_i : X_i = 0$ sono le **rette fondamentali** di T. In seguito, si introducono le definizioni di **trasformata algebrica** e di **trasformata propria (o stretta)** di una curva di S_2, evitando situazioni particolari di curve aventi rette fondamentali come componenti in modo tale da avere sempre, a meno di un numero finito di eccezioni, una corrispondenza biunivoca tra la curva e la sua trasformata propria.
Nel secondo paragrafo si analizzano gli effetti di una trasformazione quadratica standard su ciascuna delle singolarità di una curva irriducibile $\mathcal{C}$. Si inizia mostrando come le intersezioni della sua trasformata propria con le rette fondamentali, corrispondano alle tangenti principali a $\mathcal{C}$ nei corrispondenti punti fondamentali. Questa analisi si completa verificando che i punti r-pli di $\mathcal{C}$ non appartenenti ad alcuna retta fondamentale sono trasformati, attraverso T, in punti r-pli della trasformata propria, e che le rispettive tangenti principali si corrispondono in molteplicità.
Nel terzo paragrafo di questo capitolo, mediante risultati classici riguardanti la geometria delle curve algebriche, si riesce a dimostrare che, attraverso un numero finito di trasformazioni quadratiche standard e di proiettività, una curva piana irriducibile dotata di qualunque singolarità (ordinaria o non ordinaria) si può trasformare in un'altra con singolarità solo ordinarie ($Teorema\, di\, N\ddot{o}ether$). Il terzo capitolo si conclude con un'interessante descrizione delle singolarità, anche complicate, di una curva algebrica piana in termini di particolari punti chiamati **punti infinitamente vicini** alle singolarità. In particolare, si descriverà una cuspide come un punto doppio con uno semplice nel suo intorno del primo ordine, mentre si definirà un tacnodo

come un punto doppio composto di un punto doppio nel suo intorno del primo ordine, e di due semplici in quello del secondo ordine. Infine, si osserverà che questa analisi delle singolarità, in termini di punti infinitamente vicini, è un processo che conduce ad una classificazione completa di tutti i punti singolari di una data curva.

Nel corso del quarto capitolo si vuole spingere lo studio ancora più in profondità, come appare in [**?**]. Supponendo assunti i principali risultati della teoria delle varietà algebriche, per i quali i riferimenti principali sono l'ottimo [**?**] e lo stesso [**?**], si riesce a migliorare il risultato del teorema di *Nöether* fino ad ottenere una ″risoluzione″ delle singolarità, a partire, però, dall'ipotesi più restrittiva di curva piana proiettiva singolare $\mathcal{C}$ i cui punti multipli sono già tutti ordinari. Il procedimento seguito è questo: si considera una curva $\mathcal{C} \in \mathbf{P}^2(K)$ con singolarità in P e si fa ″scoppiare″ tale punto, cioè lo si rimuove da $\mathbf{P}^2(K)$ sostituendolo con una retta proiettiva L, in modo tale che il piano ″scoppiato″ $B = (\mathbf{P}^2(K) - \{P\}) \cup L$ sia ancora una varietà. Infine, si prende una curva $\mathcal{C}'$ della varietà B e si verifica che $\mathcal{C}' - (\mathcal{C}' \cap L)$ è isomorfo a $\mathcal{C} - \{P\}$, quindi $\mathcal{C}'$ è birazionalmente equivalente a $\mathcal{C}$ ma non singolare.
Questo processo di risoluzione delle singolarità, di straordinaria importanza, è uno dei principali risultati di questa tesi anche se presenta quale unico svantaggio quello di determinare una curva che non è più piana.

Nel quinto e ultimo capitolo, si opera un processo di astrazione di tutte le definizioni introdotte nei primi due capitoli. Questo procedimento è particolarmente influenzato dal ruolo principale che ricoprono gli anelli locali nello studio delle proprietà locali di una curva piana. Nel corso del primo paragrafo, si verifica che la definizione classica di molteplicità di una curva piana in un suo punto, dipende unicamente dall'anello locale della curva. Il principale riferimento in questa fase è il [**?**], assumendo i fondamentali prerequisiti di algebra commutativa che si trovano in [**?**]. Nell'ultimo paragrafo si trattano le caratteristiche principali della *teoria dei rami analitici* (cfr.[**?**]), che permetterà lo studio locale di una curva in termini di serie di potenze. Inizialmente si definisce una **parametrizzazione astratta** in $K[[t]] \times K[[t]]$ come una coppia $(x(t), y(t))$, con $x(t), y(t) \in K[[t]]$ e almeno uno dei due elementi di questa coppia non costante ($(x(0), y(0))$ è il **centro della parametrizzazione**). Si distinguono, poi, le parametrizzazioni astratte irriducibili da quelle riducibili e, nell'insieme delle parametrizzazioni irriducibili, si introduce la seguente relazione di equivalenza: due coppie di parametrizzazioni astratte irriducibili $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ sono **equivalenti** se esiste un automorfismo:

$$\begin{aligned} \sigma : K[[t]] &\longrightarrow K[[t]] \\ t &\longmapsto \sigma(t) = c_1 t + c_2 t^2 + ... \end{aligned}$$

tale che : $(x_2(t), y_2(t)) = (x_1(\sigma(t)), y_1(\sigma(t)))$. Una classe di equivalenza di parametrizzazioni astratte irriducibili è detta **ramo analitico** e il suo **centro** è il centro di ogni rappresentante del ramo. Queste nozioni sono strettamente legate a quelle del capitolo due; infatti, nel caso $K = \mathbb{C}$ un caso particolare di ramo analitico è un **posto** avente centro (a, b), con $a \neq \infty \neq b$, mentre un caso particolare di parametrizzazione astratta è una parametrizzazione di Puiseux. Viene inoltre introdotta la definizione di **curva analitica** (riducibile o irriducibile) come classe di proporzionalità di serie formali (riducibili o irriducibili) non invertibili di $K[[X, Y]]$. Anche nel caso delle curve analitiche, generalizzazioni di curve algebriche piane, vengono esposti i concetti di molteplicità e di tangenti principali.
Il più importante teorema afferma l'esistenza di un unico ramo analitico con centro in $(0, 0)$ per una qualsiasi curva analitica irriducibile.
Questo risultato permetterà di concludere la tesi, su ispirazione del [**?**], affermando che è possibile parametrizzare, nell'intorno di $(0, 0)$, una curva algebrica piana irriducibile con punto r-plo in $(0, 0)$ in termini di rami analitici.
Si giunge così ad una generalizzazione del Teorema di Puiseux.

Capitolo 1

NOZIONI PRELIMINARI

1.1 Generalità sulle curve algebriche piane

Per un lavoro il più generale possibile considereremo curve definite in un piano affine o proiettivo su un campo K e, per semplicità, lavoreremo solo sui piani numerici $\mathbf{A}^2(K)$, $\mathbf{P}^2(K)$.
Nel corso di tutta la trattazione supporremo sempre, a meno di esplicita menzione contraria, che K sia un generico campo algebricamente chiuso di caratteristica nulla.

Per definire una curva algebrica in $\mathbf{A}^2(K)$ introduciamo la seguente relazione:

Definizione 1.1.1 *Due polinomi $f(X,Y), g(X,Y) \in$ K[X,Y] si dicono* **proporzionali** *se esiste $\lambda \in K^*$ tale che $g = \lambda f$.*

Si può facilmente verificare che questa è una relazione di equivalenza , allora abbiamo la definizione :

Definizione 1.1.2 *Una* **curva algebrica** *in $\mathbf{A}^2(K)$ è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $K[X,Y]$. Se $f(X,Y)$ é un rappresentante della curva, l'equazione $f(X,Y) = 0$ si dice* **equazione della curva**.
Il grado di f si chiama **grado della curva**. *Il* **supporto della curva** *è il sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbf{A}^2(K)$ costituito dai punti le cui coordinate soddisfano $f(X,Y) = 0$.*

Talvolta, quando non vi è possibilità di equivoco, indicheremo la curva algebrica di equazione $f(X,Y) = 0$ ed avente supporto $\mathcal{C}$ semplicemente con la lettera $\mathcal{C}$; il grado di $\mathcal{C}$ sarà denotato con $gr(\mathcal{C})$.

Una curva algebrica in $\mathbf{P}^2(K)$ si definisce in modo analogo con la sola avvertenza di considerare unicamente i polinomi omogenei di $K[X_0, X_1, X_2]$ (anche detti **forme**).
Perché se $F(X_0, X_1, X_2) \in K[X_0, X_1, X_2]$ è un polinomio qualsiasi potrebbe accadere che le coordinate proiettive $[x_0, x_1, x_2]$ di un punto P di $\mathbf{P}^2(K)$ soddisfino l'equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, mentre per un certo $\lambda \in K^*$ si abbia che $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \neq 0$ pur essendo $[\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2]$ ancora coordinate di P. Se, invece, F è omogeneo questa situazione non si verifica mai: infatti, un polinomio in $K[X_0, X_1, X_2]$ è omogeneo di grado n se e solo se sussiste l'identità :

$$F(tX_0, tX_1, tX_2) = t^n F(X_0, X_1, X_2)$$

per ogni $X_0, X_1, X_2 \in K$, $t \in K^*$, e in questa uguaglianza il primo membro si annulla se e solo se si annulla il secondo. Pertanto, nel caso di un polinomio omogeneo ha senso dire che le coordinate omogenee di un punto del piano numerico proiettivo lo annullano.
Allora in $\mathbf{P}^2(K)$:

Definizione 1.1.3 *Siano* $F(X_0, X_1, X_2), G(X_0, X_1, X_2) \in K[X_0, X_1, X_2]$ *due polinomi omogenei . F e G si dicono* **proporzionali** *se esiste* $\lambda \in K^*$ *tale che* $G = \lambda F$.

Definizione 1.1.4 *Una* **curva algebrica** *in* $\mathbf{P}^2(K)$ *è una classe di proporzionalità di polinomi omogenei di* $K[X_0, X_1, X_2]$*. Se* $F(X_0, X_1, X_2)$ *è un rappresentante della curva , l'equazione* $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ *si dice* **equazione della curva***. Il grado di F si chiama* **grado della curva***.*
Il sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^2(K)$ *costituito dai punti le cui coordinate soddisfano* $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ *prende il nome di* **supporto della curva** *.*

Come nel caso affine, spesso denoteremo una curva avente supporto pari a $\mathcal{C}$, semplicemente con $\mathcal{C}$. Il grado , invece , sarà indicato con $gr(\mathcal{C})$.
Una curva algebrica in $\mathbf{A}^2(K)$ (rispettivamente in $\mathbf{P}^2(K)$) è detta **affine** (**proiettiva**).

In generale, sia nel caso affine che in quello proiettivo, si ha che :

Definizione 1.1.5 *Una curva algebrica $\mathcal{C}$ si dice* **irriducibile** *se un polinomio che la rappresenta è irriducibile ; altrimenti $\mathcal{C}$ è detta* **riducibile**.

NOTA. Si dimostra facilmente che tale definizione non dipende dal polinomio scelto per rappresentare la curva.

Se la curva $\mathcal{C}$ (affine o proiettiva) ha equazione $F = 0$ e $F = \prod_{i=1}^{k} F_i^{e_i}$ è la decomposizione del polinomio in fattori irriducibili, le curve $\mathcal{C}_1$,..., $\mathcal{C}_k$ di equazione $F_1 = 0$,...,$F_k = 0$ si dicono **componenti irriducibili** di F di molteplicità, rispettivamente, e_1,...,e_k. Se la molteplicità e_i di $\mathcal{C}_i$ $(i = 1, ..., k)$ è pari a 1, tale componente si dice **semplice** ; se, invece, e_i è strettamente maggiore di 1, $\mathcal{C}_i$ è detta **multipla**.
Infine, tra i supporti esiste la relazione :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup ... \cup \mathcal{C}_k$$

Osservazione.
È importante sottolineare che se $\mathcal{C}$ è una curva algebrica affine di equazione $f(X, Y) = 0$, con f polinomio di grado n, possiamo sempre considerare la sua **chiusura proiettiva**, cioè la curva algebrica proiettiva $\mathcal{C}^*$ di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, dove $F(X_0, X_1, X_2) = X_0^n f(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0})$ è il polinomio omogeneizzato di $f(X, Y)$ rispetto a X_0 . Le due curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^*$ hanno lo stesso grado .

Ad ogni punto di una qualsiasi curva (affine o proiettiva) è sempre possibile associare un anello locale che si definisce nel seguente modo.
Se $\mathcal{C}$ è la curva affine definita da $f(X, Y) \in K[X, Y]$ che supporremo irriducibile e $P \in \mathcal{C}$, si considera l'anello quoziente $\Gamma(\mathcal{C}) = K[X, Y]/(f)$, dove $(f) = \{(a_1, a_2) \in \mathbf{A}^2(K) \,|\, f(a_1, a_2) = 0\}$ è l'ideale generato da f; $\Gamma(\mathcal{C})$ è un dominio essendo (f) primo. Si prende il campo dei quozienti di $\Gamma(\mathcal{C})$, cioè l'insieme $k(\mathcal{C}) = \{\phi \,|\, \phi = g/h, \text{ con } g, h \in \Gamma(\mathcal{C}) \text{ e } h \neq 0\}$ e si definisce **anello locale di $\mathcal{C}$ in P** il sottoanello di $k(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = \{g/h \,|\, g, h \in \Gamma(\mathcal{C}) \text{ e } h(P) \neq 0\}.$$

L'unico ideale massimale di $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è

$$M_P(\mathcal{C}) = \{\phi = g/h \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) \,|\, g(P) = 0\}.$$

$M_P(\mathcal{C})$ si chiama **ideale massimale di $\mathcal{C}$ in P.**
Se, invece, abbiamo la curva proiettiva definita dal polinomio F omogeneo di grado d che supponiamo anche in questo caso irriducibile e $P \in \mathcal{C}$, si prende l'anello quoziente $\Gamma(\mathcal{C}) = K[X_0, X_1, X_2]/(F)$ che è un dominio e, indicando con L il campo dei quozienti di $\Gamma(\mathcal{C})$, si considera l'insieme :
$k(\mathcal{C}) = \{\Phi \in L \mid \Phi = \overline{G}/\overline{H}\ ,\ G, H \in K[X_0, X_1, X_2] \text{ omogenei dello stesso grado}\}$.
Infine, si prende il sottoanello di $k(\mathcal{C})$:

$$\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = \{\Phi \in k(\mathcal{C}) \mid H(P) \neq 0\};$$

tale insieme si dice **anello locale di $\mathcal{C}$ in P.**
Anche nel caso proiettivo l'unico ideale massimale di $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è :

$$M_P(\mathcal{C}) = \{\Phi \in \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) \mid G(P) = 0\}.$$

$M_P(\mathcal{C})$ si chiama **ideale massimale di $\mathcal{C}$ in P.**

NOTA. Siano $\mathcal{C} : f(X, Y) = 0$ una curva in $\mathbf{A}^2(K)$ e $P = (x, y)$ un suo punto. È semplice verificare che l'anello locale $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è canonicamente isomorfo all'anello locale in $[1, x, y]$ della chiusura proiettiva $\mathcal{C}^*$ di $\mathcal{C}$.

Detto ciò introduciamo altre importanti definizioni.
Per semplicità, si consideri la curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione :

$$F(X_0, X_1, X_2) = 0 \tag{1.1}$$

con F polinomio omogeneo di grado n . Sia r una retta individuata da due suoi punti distinti $P = [p_0, p_1, p_2]$ e $Q = [q_0, q_1, q_2]$. Un qualsiasi altro punto di r sarà di coordinate :

$$[\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2], \quad \text{con } (\lambda, \mu) \neq 0 \tag{1.2}$$

e verrà denotato più semplicemente con $\lambda P + \mu Q$.
Ovviamente $\lambda P + \mu Q$ appartiene a $\mathcal{C}$ se e soltanto se $F(\lambda P + \mu Q) = 0$. Tale equazione è omogenea di grado n in λ e μ e le sue soluzioni , sostituite in (1.2), definiranno i punti di $r \cap \mathcal{C}$. In particolare se $F(\lambda P + \mu Q)$ è identicamente nullo in λ e μ , allora ogni punto di r è un punto di $\mathcal{C}$, cioè r è contenuta nel supporto di $\mathcal{C}$.

Questo discorso conduce direttamente alla seguente definizione :

Definizione 1.1.6 *Siano r e $\mathcal{C}$, rispettivamente , una retta e una curva in* $\mathbf{P}^2(K)$ *. Si dice che r e $\mathcal{C}$ hanno molteplicità di intersezione $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r)$ nel punto $P_0 = \lambda_0 P + \mu_0 Q$ di r, se (λ_0, μ_0) è una radice di molteplicità $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r)$ del polinomio $F(\lambda P + \mu Q)$, convenendo di porre $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = 0$ se $P_0 \notin \mathcal{C} \cap r$ e $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = \infty$ se $r \subset \mathcal{C}$.*

Si verifica che la definizione data non dipende dalla scelta di P e Q su r , quindi è ben posta . Facilmente si può dare una definizione analoga nel caso affine .
Questa notazione $I_P(\mathcal{C} \cap r)$ introdotta per la molteplicità di intersezione nel punto P tra la curva $\mathcal{C}$ e la retta r, è fondamentale per i prossimi risultati.

Definizione 1.1.7 *Siano $\mathcal{C}$ una curva algebrica* (affine o proiettiva) *e P un punto del piano . Si chiama* **molteplicità** *di $\mathcal{C}$ in P* (si denota $m_P(\mathcal{C})$) *il minimo delle molteplicità di intersezione di $\mathcal{C}$ con r nel punto, dove r varia tra le rette del fascio di centro P, cioè*

$$m_P(\mathcal{C}) = min_{P \in r} I_P(\mathcal{C} \cap r)$$

Se $m_P(\mathcal{C}) = 1$, P si dice **punto semplice** *di $\mathcal{C}$.*
Se $m_P(\mathcal{C}) > 1$, P si dice **punto multiplo** (o **singolare**) *di $\mathcal{C}$; diremo anche che P è un* **punto m-plo** *di $\mathcal{C}$ se $m_P(\mathcal{C}) = m$* (in particolare **doppio, triplo**,... se $m = 2, 3, ...$).

La curva $\mathcal{C}$ si dice **non singolare** se tutti i suoi punti sono semplici, mentre si dice **singolare** se possiede almeno un punto singolare.

Sempre considerando la curva proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione (1.1) si supponga che il punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathcal{C}$. Allora sostituendo in (1.1) le equazioni parametriche di r scritte in (1.2) si ottiene l'equazione omogenea in λ , μ :

$$A(\lambda, \mu) = F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) = 0.$$

Il punto $P \in \mathcal{C} \cap r$ corrisponderà alla radice $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, oppure, deomogeneizzando $A(\lambda, \mu)$, alla radice $t = 0$ di :

$$A(1, t) = F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) \tag{1.3}$$

e la molteplicità di $t = 0$ sarà proprio $I_P(\mathcal{C} \cap r)$. Ma $t = 0$ è una radice multipla di $A(1, t)$ se e soltanto se :

$$F_0(P)q_0 + F_1(P)q_1 + F_2(P)q_2 = 0 \tag{1.4}$$

dove $F_i(P)$ denota la derivata parziale di F rispetto a X_i calcolata in P [**?**, lemma A.9], perciò P è singolare per $\mathcal{C}$, cioè $I_P(\mathcal{C} \cap r) > 1$ per ogni possibile retta r del fascio di centro P, se e solo se per ogni possibile scelta di $Q \in \mathbf{P}^2(K)$ è vera la (1.4) e ciò è equivalente ad affermare che :

$$F_0(P) = F_1(P) = F_2(P) = 0.$$

Si noti, infine, che se $n = gr(F)$, si ha l'identità di Eulero

$$\sum_{i=0,1,2} F_i(X_0, X_1, X_2)X_i = n\, F(X_0, X_1, X_2) \tag{1.5}$$

[**?**, prop. A.12] e quindi le tre condizioni $F_i(P) = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, implicano anche $F(P) = 0$.
È possibile dunque enunciare il seguente risultato :

Proposizione 1.1.8 *Sia $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^2(K)$ la curva di equazione* (1.1).
P è semplice per $\mathcal{C}$ se e solo se $P \in \mathcal{C}$ e almeno una delle derivate parziali prime di F non si annulla in P. Viceversa, $P \in \mathbf{P}^2(K)$ è singolare per la curva se e solo se tutte le derivate parziali prime di F si annullano in P .

Se P è semplice per $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^2(K)$ e s è la retta di equazione

$$F_0(P)X_0 + F_1(P)X_1 + F_2(P)X_2 = 0$$

allora dalla (1.5) si deduce che $P \in s$. La (1.4) implica poi che s è l'unica retta tale che $I_P(\mathcal{C} \cap s) > 1$. s si dice **retta tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto semplice P**. Se, invece, $P \in \mathcal{C}$ è singolare, ciascuna retta l passante per P è tale che $I_P(\mathcal{C} \cap l) \geq m_P(\mathcal{C}) \geq 2$. Per questo motivo si conviene di considerare **tangente a $\mathcal{C}$ in** P ogni retta passante per P, mentre :

Definizione 1.1.9 *Si chiama* **tangente principale** *ad una curva algebrica proiettiva $\mathcal{C}$ in un suo punto P una retta r tale che :*

$$I_P(\mathcal{C} \cap r) > m_P(\mathcal{C}).$$

Proseguendo con l'analisi delle proprietà locali di una curva di equazione (1.1) avente un punto $P = [p_0, p_1, p_2]$ di molteplicitá $m_P(\mathcal{C})= m$ e concentrando l'attenzione sulla struttura di tale punto si può ottenere un risultato più generale della 1.1.8. Infatti, se applichiamo il teorema di Taylor al polinomio (1.3) si ottiene :

$$F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) = \sum_j F_j(P)q_j + \sum_{i,k} F_{i,k}(P)q_iq_kt^2 + ...$$

dove $F_j(P)$, $F_{i,k}(P)$,..., denotano le derivate parziali di $F(X_0, X_1.X_2)$ rispetto alle variabili indicate dagli indici calcolate in P e da questa identità si deduce che la condizione $m_P(\mathcal{C}) = m$ è equivalente all'annullarsi in P di tutte le derivate parziali di F di ordine $\leq m - 1$ e al non annullarsi in P di almeno una di ordine m. Ricorrendo ancora all'identità di Eulero si potrà dire che, se tutte le derivate di ordine $m - 1$ calcolate in P sono nulle, allora anche quelle di ordine inferiore e il polinomio stesso si annullano nel punto.
Riassumendo quanto riportato qui sopra si ha :

Proposizione 1.1.10 *Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proiettiva di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$. Un punto $P \in \mathcal{C}$ ha molteplicità m per $\mathcal{C}$ se e solo se si annullano in P tutte le derivate parziali di $F(X_0, X_1, X_2)$ di ordine $m - 1$ e almeno una di ordine m è non nulla in P .*

Infine, ricordando la definizione di tangente principale ad una curva in un punto, si può introdurre una nuova definizione :

Definizione 1.1.11 *Sia $\mathcal{C}$ una curva piana proiettiva e P un suo punto di molteplicità $m_P(\mathcal{C})$. Posto ξ il numero di tangenti principali distinte in P a $\mathcal{C}$, si avrà che $1 \leq \xi \leq m_P(\mathcal{C})$.*
Inoltre se $\xi = m_P(\mathcal{C}) \geq 2$, P prende il nome di **punto multiplo ordinario** *se , invece , $\xi < m_P(\mathcal{C})$, P si dice* **punto multiplo non ordinario**.
Un punto doppio ordinario si dice **nodo** *. Un punto doppio non ordinario in cui la curva ha un'unica tangente principale r tale che $I_P(\mathcal{C} \cap r) = 3$ si definisce* **cuspide ordinaria**.

NOTA. Tale definizione di punto multiplo ordinario o non ordinario si applica ovviamente anche nel caso di una curva di $\mathbf{A}^2(K)$. In particolare nel caso affine le tangenti principali in un punto r-plo si determinano utilizzando il prossimo teorema.

Teorema 1.1.12 *Se $f(X,Y)$ è privo di termini di grado minore di r e ha qualche termine di grado r, allora l'origine è punto r-plo di $f=0$ e la curva definita ponendo uguale a zero i termini di f di grado r ha come componenti le tangenti principali a f nell'origine.* [**?**, I-9.3].

A meno di un'opportuna sostituzione lineare, possiamo sempre supporre che i punti multipli delle curve affini che studiamo siano nell'origine.
Cerchiamo di applicare questo teorema ad alcuni esempi di curve affini con singolarità nell'origine del sistema di assi cartesiani considerato.

Esempio 1 : $X^3 - X^2 + Y^2 = 0$. Possiede in O un nodo con tangenti principali : $X + Y = 0$, $X - Y = 0$.

Esempio 2 : $X^3 + Y^2 = 0$. Possiede nell'origine una cuspide ordinaria con un'unica tangente principale : $Y = 0$.

Esempio 3 : $X^4 + X^2Y^2 - Y^2 = 0$. Questa curva ha nell'origine un punto doppio con un'unica tangente principale $r : Y = 0$.
Si verifica con semplicità che $I_P(\mathcal{C} \cap r) = 4$, dunque O non è una cuspide ordinaria. Questo nuovo punto singolare sarà studiato nel corso del capitolo 3 e verrà definito **tacnodo**.

Esempio 4 : $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$. L'origine O è un punto di molteplicità tre per questa curva con le seguenti tangenti principali : $Y = 0$, $Y - \sqrt{3}X = 0$, $Y + \sqrt{3}X = 0$. Quindi è triplo ordinario.

Esempio 5 : $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$. Tale curva presenta in O un punto di molteplicità quattro con due tangenti principali : $X = 0$, $Y = 0$.

NOTA. Dall'inclusione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ segue che: $\mathbf{A}^2(\mathbb{R}) \subset \mathbf{A}^2(\mathbb{C})$. In particolare, se si vuole conoscere la rappresentazione grafica di una curva F in $\mathbf{A}^2(\mathbb{C})$, sarà possibile solo riportare la sua parte reale, cioè l'insieme dei punti che appartengono all'intersezione $F \cap \mathbf{A}^2(\mathbb{R})$.

1.2 Il discriminante di un polinomio

Prima di concludere questo capitolo , vogliamo riportare il concetto di discriminante di un polinomio che risulterà essenziale nel capitolo 2. Però, per introdurre il discriminante, è necessaria prima la nozione di risultante di due polinomi.

Definizione 1.2.1 *Sia G un dominio a fattorizzazione unica . Supponiamo che $f(X), g(X) \in G[X]$ siano della forma :*

$$f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n, a_n \neq 0$$

$$g(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_mX^m, b_m \neq 0$$

Si chiama **risultante** *di f e g il determinante della matrice quadrata di ordine $(m+n)$:*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}$$

le cui prime m righe sono formate dai coefficienti $a_0, ..., a_n$, mentre le successive n righe dai coefficienti $b_0, ..., b_m$.

Il risultante di f e g si indica con $R(f, g)$.

Proposizione 1.2.2 *Siano $f(X)$ e $g(X)$ due polinomi che soddisfano le ipotesi della* 1.2.1. *f e g hanno un fattore non costante in comune se e solo se $R(f, g) = 0$.* [**?**, I-9.3]

A questo punto abbiamo la definizione :

Definizione 1.2.3 *Il* **discriminante** *di f è $D(f) = R(f, f')$, dove f' è la derivata prima di f rispetto a X.*

La precedente proposizione ci permette di dimostrare che :

Proposizione 1.2.4 *Un polinomio $f(X) \in G[X]$ ha un fattore multiplo non costante se e solo se il suo discriminante è nullo.*

Dimostrazione.
Se $D(f) = 0$, per la proposizione 1.2.2 esiste un polinomio non costante g di $G[X]$ comune a f e $f^{'}$ che, per semplicità, supponiamo irriducibile.
Si ha $f = gh$ e $f^{'} = gh^{'} + g^{'}h$; poiché $g \mid f^{'}$, si ha anche che $g \mid g^{'}h$.
Ma $gr(g^{'}) < gr(g)$ e g è irriducibile, perciò $g \mid h$ e quindi $g^2 \mid f$.
Viceversa, se esiste g non costante in $G[X]$ tale che $f = g^2k$, allora :

$$f^{'} = 2gg^{'}k + g^2k^{'}$$

cioè $g \mid f^{'}$, in più per ipotesi $g \mid f$, quindi abbiamo provato che $D(f) = 0$. $\square$

Infine, un modo molto utile di esprimere il risultante di un polinomio è illustrato nel prossimo teorema :

Teorema 1.2.5 *Siano $f, g \in G[X]$ con $gr(f) = n$ e $gr(g) = m$. Esistono $A, B \in G[X]$ con $gr(A) = m - 1$ e $gr(B) = n - 1$ tali che $R = Af + Bg$, dove $R = R(f, g)$.*

Dimostrazione.
Sia

$$\begin{aligned} f &= a_0 + ... + a_nX^n \\ Xf &= a_0X + ... + a_nX^{n+1} \\ &\vdots \\ X^{m-1}f &= a_0X^{m-1} + ... + a_nX^{n+m-1} \end{aligned}$$

Analogamente sia

$$\begin{aligned} g &= b_0 + ... + b_mX^m \\ Xg &= b_0X + ... + b_mX^{m+1} \\ &\vdots \\ X^{n-1}g &= b_0X^{n-1} + ... + b_mX^{n+m-1} \end{aligned}$$

Se indichiamo con $A_1, ..., A_{n+m}$ le matrici cofattori di R ottenute eliminando un elemento della sua prima colonna si avrà che :

$$(A_0 + A_1X + ... + A_mX^{m-1})f + (A_{m+1} + A_{m+2}X + ...A_{m+n}X^{n-1})g = R$$

da cui direttamente la tesi . $\square$

Osservazione.
Se, in generale, abbiamo che $f, g \in G[X_1, ..., X_N]$, con $N \geq 2$, possiamo pensare di scriverli come polinomi in X_N a coefficienti in $G[X_1, ..., X_{N-1}]$, cioè :

$$f(X_1, ..., X_N) = a_0 + a_1X_N + ... + a_nX_N^n$$
$$g(X_1, ..., X_N) = b_0 + b_1X_N + ... + b_mX_N^m$$

dove $a_0, ...a_n, b_1, ..., b_m \in G[X_1, ..., X_{N-1}]$.
Allora il loro risultante $R(f, g)$ è detto **risultante di f e g rispetto a $\mathbf{X_N}$** ed è un polinomio in $G[X_1, ..., X_{N-1}]$.
Allo stesso modo il $D(f)$, con $f \in G[X_1, ...X_N]$ è chiamato **discriminante di f rispetto a $\mathbf{X_N}$** e sarà in $G[X_1, ..., X_{N-1}]$.

Capitolo 2

IL TEOREMA DI PUISEUX

2.1 Il teorema di Puiseux

Supponiamo che K coincida con il campo dei complessi . Nel corso di questo capitolo ci proponiamo di analizzare il comportamento delle radici di un polinomio che definisce una curva del piano numerico proiettivo nell'intorno di un qualsiasi punto $a \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.

Consideriamo una curva piana $\mathcal{C} \in \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione affine $f(X,Y) = 0$, dove $f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ è irriducibile scritto nella forma :

$$f(X,Y) = f_n(X)Y^n + ... + f_1(X)Y + f_0(X), \quad \text{con } f_0, ..., f_n \in \mathbb{C}[X]$$

Indichiamo con $D(X)$ il discriminante di $f(X,Y)$ rispetto a Y e poniamoci nelle condizioni in cui :

1. f abbia grado n in Y (cioè $f_n \neq 0$).
2. $f_0, ..., f_n$ non abbiano fattori non costanti in comune
   (poiché f è irriducibile) .
3. $D(X)$ non sia identicamente uguale a zero .

Allora abbiamo le seguenti :

Definizione 2.1.1 *Un punto $a \in \mathbb{C}$ si dice* **regolare** (o **ordinario**) **per** f *se $f_n(a)D(a) \neq 0$. Altrimenti a si dice* **singolare** (o **non ordinario**) **per** f.

Definizione 2.1.2 *Il polinomio f è* **regolare all' ∞** *se 0 è punto regolare per il polinomio $\varphi(U,Y) = U^m f(U^{-1},Y)$, dove $m = deg_X f(X,Y)$.*

Dalle definizioni appena riportate si può dedurre che, se $a \in \mathbb{C}$ è regolare per f e $b \in \mathbb{C}$ è tale che $f(a,b) = 0$, allora b è una radice semplice del polinomio $f(a,Y)$ (cioè $f_Y(a,b) \neq 0$) e $f(a,Y)$ è un polinomio di grado n in Y . In tal caso, una rappresentazione parametrica della curva $\mathcal{C}$ ci è fornita dal teorema delle funzioni implicite che, ricordiamo, afferma che :

Teorema 2.1.3 (**delle funzioni implicite**) *Sia $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tale che soddisfi l'equazione $f(a,b) = 0$ e $f_Y(a,b) \neq 0$. Esiste un'unica serie di potenze $\bar{Y} = b + c_1 t + c_2 t^2 + ... \in \mathbb{C}[[t]]$ tale che $f(\bar{X},\bar{Y}) = 0$, con $\bar{X} = a + t$. Tale serie $\bar{Y}$ ha raggio di convergenza positivo.* [**?**, p.114]

Dunque, se la coppia $(\bar{X} = a + t, \bar{Y} = b + c_1 t + ...)$ è tale che $f(\bar{X},\bar{Y}) = 0$ e $\bar{Y}$ abbia raggio di convergenza positivo R , avremo che $(\bar{X}(t),\bar{Y}(t)) \in \mathbb{C}^2$, con $t \in D(0,R)$, sono punti della curva $\mathcal{C}$; per questo $(\bar{X},\bar{Y})$ prende il nome di **parametrizzazione di $\mathcal{C}$** .
Se , invece , $a \in \mathbb{C}$ è singolare per f si verifica almeno una delle seguenti due condizioni :

1. $f_n(a) = 0$, cioè $f(a,Y)$ ha grado $< n$.
2. $D(a) = 0$, cioè $f(a,Y)$ non ha radici tutte distinte.

Inoltre, se $b \in \mathbb{C}$ è una radice multipla di $f(a,Y)$, sicuramente $f_Y(a,b) = 0$ e non è possibile applicare il teorema delle funzioni implicite in (a,b).
In questo caso una rappresentazione parametrica della curva $\mathcal{C}$ ci è fornita da un teorema che rivestirà un ruolo di notevole importanza nel successivo svolgimento ed è noto come *Teorema di Puiseux*, dimostrato dallo stesso Puiseux nel 1850.
Prima di enunciarlo,però, è necessario introdurre alcune importanti definizioni.
Consideriamo il campo dei quozienti di $\mathbb{C}[[t]]$ che denoteremo con $\mathbb{C}((t))$;
i suoi elementi si chiamano **serie di Laurent formali**.

Definizione 2.1.4 *Una* **parametrizzazione di Puiseux per f in** $a \in \mathbb{C}$ *è una coppia*

$$(\bar{X} = a + t^r, \bar{Y} = P(t))$$

con $r \geq 1$ intero , $P(t) \in \mathbb{C}((t))$ e $f(\bar{X},\bar{Y}) \equiv 0$.

Definizione 2.1.5 *Una* **parametrizzazione di Puiseux per** f **in** $a = \infty$ *è una coppia*

$$(\bar{X} = t^{-r}, \bar{Y} = P(t))$$

con $r \geq 1$ *intero ,* $P(t) \in \mathbb{C}((t))$ *e* $f(\bar{X}, \bar{Y}) \equiv 0$ *.*

In entrambe le precedenti definizioni il punto (a, b) si dice **centro della parametrizzazione**, dove $b = P(0)$ se l'ordine di $P(t)$ è non negativo, mentre $b = \infty$ se l'ordine di $P(t)$ è negativo.

Osservazione.
Il teorema delle funzioni implicite può essere considerato un teorema di esistenza di parametrizzazioni di Puiseux nel caso particolare in cui $r = 1$, $P(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ e $r(P) > 0$ (cioè con raggio di convergenza di P positivo) in $a \in \mathbb{C}$ regolare per f.

Definizione 2.1.6 *Una parametrizzazione di Puiseux per* f *in* $a \in \mathbb{C}$ *(oppure in* $a = \infty$*) si dice* **riducibile** *se gli esponenti della serie* $P(t) \in \mathbb{C}((t))$ *(che supponiamo ordinati* $h < h' < h'' < \ldots$*) abbiano , in comune con* r *, un fattore* $k > 1$*. Altrimenti la parametrizzazione si dice* **irriducibile**.

Osservazione.
Possiamo sempre limitarci a considerare parametrizzazioni irriducibili.
Perché se $(\bar{X}, \bar{Y})$ è una parametrizzazione di Puiseux riducibile per f in a e $k = MCD(h, h', h'', \ldots, r)$, dividendo sia r sia gli esponenti della serie $\bar{Y}$ per k si otterrà la coppia $(\bar{X}', \bar{Y}')$ che è ancora una parametrizzazione per f in a ma questa volta irriducibile. In più si nota che se la serie $\bar{Y}$ ha raggio di convergenza positivo R anche $\bar{Y}'$ ha lo stesso raggio, mentre l'insieme dei punti della curva $\mathcal{C}$ parametrizzati da $(\bar{X}, \bar{Y})$ coincide con l'insieme di quelli parametrizzati da $(\bar{X}', \bar{Y}')$.
Queste osservazioni ci convincono che non è restrittivo considerare solo parametrizzazioni irriducibili. Introduciamo allora una relazione che si verifica essere d'equivalenza.

Definizione 2.1.7 *Sia* $(\bar{X}, \bar{Y})$ *una parametrizzazione di Puiseux irriducibile per* f *in* a (rispettivamente in $a = \infty$) *e* ω *una radice r-esima dell'unità. Ponendo* $t = \omega t'$*,si ottiene una parametrizzazione* $(\bar{X} = a + t^r, \bar{Y}' = P(\omega t'))$ (rispettivamente $(\bar{X} = t^{-r}, \bar{Y}' = P(\omega t'))$) *ancora irriducibile detta* **equivalente** *a* $(\bar{X}, \bar{Y})$*. Una classe di equivalenza di parametrizzazioni di Puiseux con raggio di convergenza positivo si chiama* **posto** *di* f*.*

Teorema 2.1.8 (di Puiseux) . *Sia* $a \in \mathbb{C}$. *Esistono un numero finito di parametrizzazioni di Puiseux per* f *in* a *irriducibili* $(\bar{X}_1 = a+t^{r(1)}, \bar{Y}_1)$,......., $(\bar{X}_s = a + t^{r(s)}, \bar{Y}_s)$ *tali che :*
(i) $r(1) + ... + r(s) = n$.
(ii) *Le serie di Laurent* $\bar{Y}_1$,.....,$\bar{Y}_s$ *hanno raggio di convergenza positivo .*
(iii) *Per ogni* $X \in D \backslash \{a\}$, *dove* D *è un opportuno intorno di* a , *le* n *radici distinte* $Y_1(z)$,...,$Y_n(z)$ *di* $f(X,Y)$ *coincidono , a meno dell'ordine , con gli* n *valori* $\bar{Y}_j(\tau_j)$, *al variare di* τ_j *tra le* $r(j)$ *determinazioni di* $(X-a)^{\frac{1}{r(j)}}$ *e* $j = 1, ..., s$.
Se $(\bar{X}_1^{'} = a + t^{q(1)}, \bar{Y}_1^{'})$,.....,$(\bar{X}_m^{'} = a + t^{q(m)}, \bar{Y}_m^{'})$ *sono parametrizzazioni di Puiseux per* f *in* a *irriducibili che soddisfano le condizioni* (i) ,(ii) *e* (iii), *allora* $m = s$, $r(j) = q(j)$, *a meno di permutazioni* , $\forall j = 1, ..., s$ *e* $(\bar{X}_j^{'} = a + t^{q(j)}, \bar{Y}_j^{'})$ *è equivalente a* $(\bar{X}_j = a + t^{q(j)}, \bar{Y}_j)$.

Osservazione.
Valgono analoghe conclusioni per $a = \infty$.

Dimostrazione.
-Se $a \in \mathbb{C}$ è regolare per f , abbiamo una parametrizzazione di Puiseux per f in a con $r = 1$ e $P(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ perché è fornita dal teorema delle funzioni implicite .
-Se $a \in \mathbb{C}$ è singolare per f , consideriamo il polinomio $f(a, Y)$ non costante rispetto a Y e l'elemento $b \in \mathbb{C}$ radice di $f(a, Y) = 0$ di molteplicità $q \geq 1$.
Si distinguono due casi :
CASO 1 : $q = 1$, allora $f_Y(a, b) \neq 0$. Ricorrendo, in particolare , alla dimostrazione del teorema delle funzioni implicite avremo la parametrizzazione di Puiseux per f in a :

$$\begin{cases} \bar{X} = a + t \\ \bar{Y} = b + c_1 t + c_2 t^2 + ..., \quad \text{con}\, r(\bar{Y}) > 0. \end{cases}$$

CASO 2 : $q \geq 2$, allora $f_Y(a, b) = 0$.
In tal caso scriviamo :

$$f(X,Y) = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}(X-a)^{\alpha}(Y-b)^{\beta}$$

Se, inoltre, consideriamo l'insieme : $P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : A_{\alpha\beta} \neq 0\}$, si può osservare che :

1. Tutti i punti di P appartengono al primo quadrante.

2. Tra i punti di P c'è (0,q) mentre $\nexists(0, q\prime) \in P$ tale che $0 \leq q\prime < q$ (perché b è radice di molteplicità q di $f(a, Y) = 0$) .

3. Esiste qualche punto della forma $(p, 0)$, $p > 0$, in P (altrimenti $(Y - b)$ dividerebbe f) .

Costruiamo allora un poligono, detto **Poligono di Newton**, considerando i seguenti passi :
- Nessun lato è orizzontale.
- Il primo lato del poligono ha come estremi $(0, q)$ e (α_1, β_1) se il segmento che li congiunge lascia alla propria destra i punti di P che non gli appartengono e se , per qualsiasi altro $(\alpha, \beta) \in P$ che si trova sul segmento , si verifichi $\beta > \beta_1$.
- Il secondo lato ha come estremi (α_1, β_1) e (α_2, β_2) se anche questo segmento lascia alla propria destra i punti di P che non gli appartengono e se , comunque considero un altro $(\alpha, \beta) \in P$ che si trova sul segmento , $\beta > \beta_1$.

Proseguiamo in questo modo nella costruzione del poligono che avrà come ultimo estremo $(p, 0)$ e che può essere così raffigurato:

A questo punto prendiamo due estremi di un lato di questo poligono : (α_1, β_1) e (α_2, β_2), con $\beta_1 > \beta_2$ e riscriviamo :

$$f(X,Y) = A_{\alpha_1\beta_1}(X-a)^{\alpha_1}(Y-b)^{\beta_1} + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}(X-a)^{\alpha}(Y-b)^{\beta} +$$
$$+A_{\alpha_2\beta_2}(X-a)^{\alpha_2}(Y-b)^{\beta_2} + \sum_{\alpha',\beta'} A_{\alpha'\beta'}(X-a)^{\alpha'}(Y-b)^{\beta'}$$

dove (α, β) è un punto del lato di P diverso da (α_1, β_1) e (α_2, β_2), mentre, (α', β') è un qualsiasi altro punto. Scriviamo l'equazione del lato così :

$$\varrho_1\alpha + \gamma_1\beta = p_1 \quad \text{con}\ \varrho_1, \gamma_1, \mathrm{p}_1 \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \text{il} \quad \mathrm{MCD}(\varrho_1, \gamma_1) = 1$$

e se eseguiamo la sostituzione :

$$\begin{cases} X = a + t_1^{\varrho_1} \\ Y = b + t_1^{\gamma_1} u_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

avremo che :

$$f(a + t_1^{\varrho_1}, b + t_1^{\gamma_1}u_1) = t_1^{p_1}[u_1^{\beta_2}\Phi_1(u_1) + t_1\Psi(t_1, u_1)] = t_1^{p_1} f_1(t_1, u_1)$$

dove $\Phi_1(u_1) = A_{\alpha_1\beta_1}u_1^{\beta_1-\beta_2} + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}u_1^{\beta-\beta_2} + A_{\alpha_2\beta_2}$ e
$f_1(t_1, u_1) = u_1^{\beta_2}\Phi_1(u_1) + t_1\Psi(t_1, u_1)$ non è divisibile per t_1 (perché $\Phi_1(u_1) \neq 0$) né per u_1 (perché $A_{p_0} \neq 0$) .

Sia $c_1 \neq 0$ una radice di $f_1(0, u_1) = 0$ di molteplicità $q_1 \geq 1$ (c_1 esiste perché $f_1(0, u_1) = {u_1}^{\beta_2}\Phi_1(u_1)$) e distinguiamo ancora due casi :
$CASO\ 1$: $q_1 = 1$. Per il teorema delle funzioni implicite troveremo una serie $\bar{u}_1 = c_1 + c_2t + c_3t^2 + ...$, tale che $r(\bar{u}_1) > 0$ e $f_1(t_1, \bar{u}_1) = 0$. Sostituendo allora in (2.1) si ottiene :

$$\begin{cases} \bar{X} = a + t^{\varrho_1} \\ \bar{Y} = b + t^{\gamma_1}(c_1 + c_2t + c_3t^2 + ...) \end{cases}$$

che è una parametrizzazione di Puiseux per f di centro (a, b) con $r(\bar{Y}) > 0$.
$CASO\ 2$: $q_1 > 1$. Costruiamo , come nel precedente passo , il poligono di Newton relativo dello sviluppo del polinomio $f_1(t_1, u_1)$ in serie di potenze di t_1 e $(u_1 - c_1)$. Scegliamo il lato di tale poligono di equazione:

$$\varrho_2\alpha + \gamma_2\beta = p_2, \quad \text{con}\ \varrho_2, \gamma_2, p_2 \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \text{il} \quad \mathrm{MCD}(\varrho_2, \gamma_2) = 1$$

e consideriamo la sostituzione :

$$\begin{cases} t_1 = t_2^{\varrho_2} \\ u_1 = c_1 + t_2^{\gamma_2} u_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Arriveremo a scrivere : $f_1(t_2^{\varrho_2}, c_1 + t_2^{\gamma_2} u_2) = t_2^{p_2} f_2(t_2, u_2)$, per una certa $f_2(t_2, u_2)$ che non è divisibile per t_2 né per u_2.
Sia allora $c_2 \neq 0$ una radice di $f_2(0, u_2)$ di molteplicità $q_2 \geq 1$, abbiamo di nuovo due possibilità :
CASO 1 : $q_2 = 1$. Sempre grazie al teorema delle funzioni implicite esisterà una serie $\bar{u}_2(t)$ con $r(\bar{u}_2) > 0$ tale che $f_2(t, \bar{u}_2) = 0$. Così, ricordando la (2.1) e (2.2) otterremo la parametrizzazione di Puiseux :

$$\begin{cases} \bar{X} = a + t^{\varrho_1 \varrho_2} \\ \bar{Y} = b + t^{\gamma_1}(c_1 + t^{\gamma_2} \bar{u}_2(t)) \end{cases}$$

CASO 2 : $q_2 > 1$. Ripeteremo il solito procedimento.
È facile verificare che, dopo un numero finito di passi, il procedimento conduce, necessariamente, ad un polinomio $\Phi_k(u_k)$ avente solo radici semplici e quindi alla determinazione di un'espansione di Puiseux per f in a della forma:

$$\begin{cases} \bar{X} = a + t^{\varrho} \\ \bar{Y} = b + b^{'} t^{\mu^{'}} + ... \end{cases} \tag{2.3}$$

con $r(\bar{Y}) > 0$ e $\bar{Y}$ serie di ordine ≥ 0.
Se, in particolare, supponiamo che tale rappresentazione sia stata ottenuta dopo aver eseguito le $''i''$ sostituzioni :

$$\begin{cases} X = a + t_1^{\varrho_1} \\ Y = b + t_1^{\gamma_1} u_1 \end{cases} , \quad \begin{cases} t_1 = t_2^{\varrho_2} \\ u_1 = c_1 + t_2^{\gamma_2} u_2 \end{cases} \quad , \ . \ . \ . \ . \ , \quad \begin{cases} t_{i-1} = t_i^{\varrho_i} \\ u_{i-1} = c_{i-1} + t_i^{\gamma_i} u_i \end{cases}$$

con $u_i = c_i + c_{i+1} t_i + c_{i+2} t_i^2 + ...$, allora avremo che :

$$\begin{cases} r = \varrho_1 \varrho_2 ... \varrho_i \\ \mu^{'} = \gamma_1 \varrho_2 ... \varrho_i \\ \mu^{''} = \gamma_2 \varrho_3 ... \varrho_i + \mu^{'} \\ \vdots \\ \mu^{(i)} = \mu^{(i-1)} + \gamma_i \end{cases}$$

L'irriducibilità dell'espansione (2.3) è un'immediata conseguenza delle ipotesi, poste ad ogni passo, che $\mathrm{MCD}(\varrho_{\mathrm{i}}, \gamma_{\mathrm{i}}) = 1$, per ogni i.
Inoltre è importante sottolineare che :
1) si ottengono espansioni diverse scegliendo lati diversi (perché varia il quoziente γ_1/ϱ_1 che è il coefficiente angolare del lato considerato al primo passo) .
2) Le espansioni ottenute dallo stesso lato ma da radici diverse di $\Phi_1(u_1)$ sono diverse (perché cambia il primo elemento di $\bar{Y}$) .
Quindi, ricapitolando, si può dire che una volta che si è determinato il primo poligono di Newton (relativo a f) e si sono ottenute le parametrizzazioni di Puiseux corrispondenti a ciascuna radice semplice di $\Phi_1(u_1)$ per ogni possibile scelta di un lato del poligono , si avrà che il numero delle espansioni distinte ottenute, aggiunto alla somma delle molteplicità delle radici multiple di ciascun $\Phi_1(u_1)$ è pari alla somma dei gradi di questi $\Phi_1(u_1)$ che , chiaramente, è q (cioè la molteplicità di b come radice di $f(a, Y) = 0$).
Questo ragionamento può essere ripetuto ad ogni passo del procedimento di costruzione di tutte le parametrizzazioni. Dunque abbiamo che: ″il numero delle parametrizzazioni di Puiseux distinte, corrispondenti alla radice b di $f(a, Y) = 0$ di molteplicità q e ottenute con il metodo di costruzione del poligono di Newton, è proprio q ″.
Supponiamo siano le seguenti :

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = a + t^{r_1} \\ \bar{Y}_1 = b + b_1' t^{{\mu_1}'} + ... \end{cases} \quad , \ . \ . \ . \ . \ , \begin{cases} \bar{X}_q = a + t^{r_q} \\ \bar{Y}_q = b + b_q' t^{{\mu_q}'} + ... \end{cases}$$

Si consideri $X \neq a$ tale che $|X - a|$ sia sufficientemente piccolo ; le q radici distinte di $f(a, Y) = 0$ prossime a b si ottengono come valori delle q funzioni $\bar{Y}_j(t_j)$, dove t_1 ,..., t_q sono tali che $X = a + t_1^{r_1} = ... = a + t_q^{r_q}$.
Infatti se $m = m.c.m.(r_1, ..., r_q) = k_j r_j$, $j = 1, ..., q$, e ω è una radice primitiva m-esima dell'unità, per il principio di identità delle funzioni analitiche esiste un intorno di $t = 0$ nel quale le funzioni $\bar{Z}_1(t) = \bar{Y}_1(\omega^{k_1} t^{k_1})$,..., $\bar{Z}_q(t) = \bar{Y}_q(\omega^{k_q} t^{k_q})$ assumeranno valori diversi (perché se ne esistessero due uguali si avrebbe l'identità di due serie, ad esempio, $\bar{Z}_i(t)$ e $\bar{Z}_j(t)$, e dunque l'uguaglianza tra i rispettivi esponenti $k_i {\mu_i}' = k_j {\mu_j}'$, $k_i {\mu_i}'' = k_j {\mu_j}''$,......
Ma l'irriducibilità delle espansioni implicherebbe anche che $k_i = k_j$ e quindi $r_i = r_j$ e , ancora per l'irriducibilità , $\bar{Y}_i = \bar{Y}_j$; perciò si arriverebbe ad avere

l'uguaglianza $i = j$) ; quindi per avere quanto volevamo verificare è sufficiente considerare $t_j = \omega^{k_j} t^{k_j}$.
Sia, a questo punto, ω una radice r_j-esima dell'unità, per qualche $j = 1, ..., q$, allora :

$$\begin{cases} \bar{X}_j' = \bar{X}_j(\omega t') = a + t'^{r_j} \\ \bar{Y}_j' = \bar{Y}_j(\omega t') = b + b'_j \omega^{\mu'_j} t'^{\mu'_j} + ... \end{cases}$$

è ancora una parametrizzazione irriducibile di Puiseux per f in a.
Per quanto verificato sopra $\bar{Y}_j(t_j)$ deve coincidere con una delle radici di $f(X, Y) = 0$ prossime a b, cioè deve esistere h tale che $\bar{Y}_j'(t_j) = \bar{Y}_h(t_h)$ e, sempre per il principio d'identità, si avrà che : $\bar{Y}_j' = \bar{Y}_h$.
Al variare di ω si possono determinare r_j parametrizzazioni distinte (perché non tutti gli $\mu_j{}'$, $\mu_j{}''$,... sono multipli di r_j) . Dunque, al variare di ω e di j, le sostituzioni $t = \omega t'$ determinano delle permutazioni cicliche tra le q date ; così possiamo trovare tra queste k parametrizzazioni che soddisfano le condizioni (i) , (ii) e (iii) dell'enunciato .
L'unicità è conseguenza del solito principio d'identità .
Ovviamente se il polinomio $f(a, Y)$ ha grado n in Y (cioè $f_n(a) \neq 0$) la dimostrazione del teorema di Puiseux è completa.
Se, invece, supponiamo che sia :

$$f_n(a) = f_{n-1}(a) = ... = f_{n-q+1}(a) = 0, \quad f_{n-q}(a) \neq 0 \quad \text{per qualche}\, q \leq n$$

ponendo $Y = 1/Y'$ in f, otterremo il polinomio $g(X, Y') = Y'^n f(X, 1/Y')$ che ha grado n in Y'. Applicando il metodo precedente alla radice q-pla $Y' = 0$ di $g(a, Y')$, troviamo le espansioni $(\bar{X}_{k+1}, \bar{Z}_{k+1})$, . . . , $(\bar{X}_k, \bar{Z}_k)$.
Infine, ponendo $\bar{Y}_{k+1} = \bar{Z}_{k+1}^{-1}$, . . . , $\bar{Y}_k = \bar{Z}_k^{-1}$ si ottengono k espansioni per f in a che chiaramente soddisfano le tre condizioni richieste.

Per dimostrare il teorema nel caso in cui $X = \infty$ si fa un analogo ragionamento:
-Si pone $X = 1/X'$ in f .
-Si considera $g(X', Y) = X'^m f(1/X', Y)$.
-Si applica il procedimento precedente in $X' = 0$. $\square$

Esempi.

1. $f(X,Y) = Y^2 - X$. Il punto $a = 0$ è singolare per il polinomio considerato. È evidente che non può esistere una serie $Y(t) \in C[[t]]$ tale che $Y(t)^2 - t = 0$ e, ovviamente, non ne esiste neanche una convergente. Però le sostituzioni :

$$\begin{cases} X = t^2 \\ Y = t \end{cases}$$

nel polinomio $f(X,Y)$ ci permettono di avere : $(t^2) - (t^2) \equiv 0$.
Anche $a = \infty$ è singolare per f perché ponendo $Z^{-1} = X$ si ottiene : $Z(Y^2 - Z^{-1}) = ZY^2 - 1$ che ha un punto singolare nell'origine . Però se si considera la sostituzione :

$$\begin{cases} Z = t^2 \\ Y = t^{-1} \end{cases}$$

si ha che : $t^2(t^{-1})^2 - 1 \equiv 0$. Perciò una parametrizzazione di Puiseux per f è :

$$\begin{cases} \bar{X} = t^{-2} \\ \bar{Y} = t^{-1} \end{cases}$$

2. $f(X,Y) = Y^2 - X^3$. Il punto $a = 0$ è singolare per f .
Come nell'esempio precedente non può esistere una serie $Y(t) \in C[[t]]$ tale che $Y(t)^2 - t^3 = 0$. Ma se poniamo :

$$\begin{cases} X = t^2 \\ Y = t^3 \end{cases}$$

avremo che : $(t^3)^2 - (t^2)^3 \equiv 0$.

Il punto $a = \infty$ è singolare per f . Sia $Z^{-1} = X$, ponendo :

$$\begin{cases} Z = t^2 \\ Y = t^{-3} \end{cases}$$

avremo che : $(t^{-3})^2 - (t^2)^{-3} \equiv 0$.
Dunque, in questo caso, una parametrizzazione di Puiseux è :

$$\begin{cases} \bar{X} = t^{-2} \\ \bar{Y} = t^{-3}. \end{cases}$$

3. $f(X,Y) = XY^2 - 1$. Anche in questo caso $a = 0$ è singolare, infatti, $f(0,Y)$ ha grado strettamente minore di 2 . Dunque, per valori piccoli di $|X|$, con $X \neq 0$, $f(X,Y)$ ha due radici distinte, mentre per $X = 0$ si ha $f(0,Y) = -1$ che è priva di radici. Però se poniamo :

$$\begin{cases} X = t^2 \\ Y = t^{-1} \end{cases}$$

avremo che : $t^2(t^{-1})^2 - 1 \equiv 0$.

2.2 Un modello per le singolarità delle curve algebriche piane

Concludiamo questo capitolo mostrando una particolare rappresentazione grafica di curve con punto singolare nell'origine, che si ottiene utilizzando proprio gli sviluppi in serie di Puiseux.

$a)$ Consideriamo la curva di equazione $Y^3 - X^4 = 0$. Ha nell'origine un punto di molteplicità tre con un'unica tangente principale. Quando X descrive nel piano π_X un cerchio γ con centro in $X = 0$, i tre valori corrispondenti della Y (che indichiamo con Y_1,Y_2,Y_3) percorrono i 4/3 della circonferenza γ' che ha origine in $Y = 0$ e giace sul piano π_Y.
Questa situazione è rappresentata graficamente nella Fig.(a) della pagina seguente.

b) Analizziamo un caso più difficile. Supponiamo di studiare la curva di equazione : $Y^{30} - aX^{45} - bX^{55} - cX^{67} = 0$.
Esplicitando la Y si ha : $Y = aX^{45/30} + bX^{55/30} + cX^{67/30}$.
Riscriviamo l'espressione nel seguente modo :

$$Y = aX^{3/2} + bX^{11/6} + cX^{67/30}.$$

Poniamo ora : $U = aX^{3/2}$, $\quad V = U + bX^{11/6}$, $\quad Y = V + cX^{67/30}$
e osserviamo che quando X descrive in π_X il solito cerchio γ centrato in $X = 0$, ciascuno dei due valori corrispondenti di U percorre i $3/2$ del cerchio γ_1 di centro $Y = 0$; a sua volta V descrive, attorno a U, $11/6$ di un cerchio γ_2, ed infine Y , attorno a V, i $67/30$ di un cerchio γ_3.
Tutto questo movimento può essere immaginato come un ″sistema planetario″ nel quale $Y = 0$ è un sole dotato di due pianeti (i due valori di U),ciascuno di questi ha tre satelliti (i tre valori di V) e ogni satellite, a sua volta, ha cinque satelliti del secondo ordine.
Il tutto è rappresentato nella Fig.(b) :

Capitolo 3

LE TRASFORMAZIONI QUADRATICHE

3.1 Definizioni principali

Nei paragrafi precedenti ci siamo limitati ad un'analisi dei punti singolari concentrandoci soprattutto sulla loro molteplicità; ora, invece, cercheremo di portare avanti lo studio da un diverso punto di vista, introducendo la teoria delle trasformazioni quadratiche.

Definizione 3.1.1 *Siano S_2 e $S_2^{'}$ due piani proiettivi. La* **trasformazione quadratica standard** *di S_2 in $S_2^{'}$ è l'applicazione razionale :*

$$\begin{array}{rcl} T : S_2 & \longrightarrow & S_2^{'} \\ [x_0, x_1, x_2] & \longmapsto & [x_1 x_2, x_2 x_0, x_0 x_1] = [y_0, y_1, y_2] \end{array}$$

Osservazione.
Indichiamo con (x) il punto di S_2 di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e con (y) il punto di $S_2^{'}$ di coordinate $[y_0, y_1, y_2]$. Il trasformato (y) di (x) attraverso T verrà denotato con $T(x)$.

Le proprietà principali di T sono le seguenti:
1. Ogni punto (x) di $S_2 \backslash B$ è trasformato in un unico punto $[y_0, y_1, y_2]$ di $S_2^{'}$, se si considera $B = \{P_0 = [1, 0, 0], P_1 = [0, 1, 0], P_2 = [0, 0, 1]\}$.
I tre punti dell'insieme B sono detti **punti fondamentali** della trasformazione e i loro trasformati attraverso T non sono definiti .

2. Ogni punto non fondamentale della retta $L_i : X_i = 0$ è trasformato nel punto P_i, per ogni $i = 0, 1, 2$.
Le tre rette L_0,L_1,L_2 sono chiamate **rette fondamentali** della trasformazione.

Se ora consideriamo l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} T^{'} : S_2^{\ '} & \longrightarrow & S_2 \\ [y_0, y_1, y_2] & \longmapsto & [y_1 y_2, y_2 y_0, y_0 y_1] = [x_0, x_1, x_2] \end{array}$$

si dimostra facilmente che anche $T^{'}$ soddisfa le due precedenti proprietà.
In più si verifica che :
3. Se il punto (x) è un punto non appartenente a nessuna delle tre rette fondamentali di T, allora il punto $(y) = T(x)$ non giace su nessuna delle tre rette fondamentali di $T^{'}$, ed avremo che $T^{'}(y) = (x)$. La stessa proprietà è soddisfatta da $T^{'}$.
Dunque c'è una corrispondenza biunivoca tra S_2 e $S_2^{'}$ fuori delle rette fondamentali e T e $T^{'}$ sono due trasformazioni l'una inversa dell'altra .
Introduciamo una nuova definizione:

Definizione 3.1.2 *Sia $F(X_0, X_1, X_2) = F(X_i) = 0$ una curva in S_2. La curva di equazione $G(Y_0, Y_1, Y_2) = F(Y_1Y_2, Y_2Y_0, Y_0Y_1) = 0$ è detta* **trasformata algebrica** *di F.*

NOTA. Talvolta, nel corso di questo capitolo, la curva $\mathcal{C}$ di equazione $F = 0$ sarà semplicemente chiamata la curva F identificando $\mathcal{C}$ con il polinomio che la definisce.

Ora descriveremo la precisa relazione geometrica tra F e G cercando, soprattutto, di capire che cosa avviene quando F contiene un punto fondamentale.
Per semplicità supponiamo che F sia la retta $H : \sum_i a_i X_i = 0$.
Distinguiamo tre casi :
CASO 1: $a_0 a_1 a_2 \neq 0$. In tal caso, H non contiene alcun punto fondamentale, perciò ogni suo punto è trasformato da T in un'unico punto della conica C di equazione $\sum_{i,j,k} a_i Y_j Y_k = 0$. Tale conica contiene i tre punti fondamentali di $T^{'}$ ma non ha altro punto in comune con le rette fondamentali. Facilmente si verifica che la corrispondenza tra H e C è biunivoca .
In particolare, i punti fondamentali di C corrispondono alle intersezioni tra H e le rette fondamentali di T, mentre, ciascuno di quelli non fondamentali, come osservato in **3**. , è trasformato da $T^{'}$ in un unico punto di $H \backslash B$.

CASO 2: Sia $H = X_1 + \lambda X_2$. La retta contiene il punto fondamentale P_0. La trasformata algebrica di H è la conica di equazione: $Y_2Y_0 + \lambda Y_0Y_1 = 0$. Tale conica è riducibile : infatti si decompone in

$$Y_2Y_0 + \lambda Y_0Y_1 = Y_0(Y_2 + \lambda Y_1)$$

e la ″ vera ″ trasformata di H è la retta

$$H^{'} : Y_2 + \lambda Y_1 = 0$$

perché la componente Y_0 è un fattore che ha un significato puramente algebrico. In particolare, in questa corrispondenza tra H e $H^{'}$ al punto P_0 di H è associato quello di coordinate $[0, 1, -\lambda]$ in cui $H^{'}$ interseca la retta fondamentale L_0 . Così a P_0, per ogni possibile valore di λ, corrisponde un diverso punto di $Y_0 = 0$, cioè, in un certo senso, ai punti di questa retta fondamentale corrispondono le direzioni delle rette passanti per P_0 .
CASO 3: Sia $H = X_0$. La sua trasformata algebrica è costituita da due rette fondamentali , perché è $Y_1Y_2 = 0$, ma tutti i suoi punti non fondamentali sono trasformati in P_0. Per evitare situazioni così particolari non considereremo mai curve aventi rette fondamentali come componenti.
L'analisi di questi tre casi ci consente di introdurre una nuova definizione :

Definizione 3.1.3 *Sia $F(X)$ una curva non avente alcuna retta fondamentale come componente e $G(Y) = F(Y_1Y_2, Y_2Y_0, Y_0Y_1)$ la sua trasformata algebrica . Se $G(Y) = \pi(Y)F^{'}(Y)$, dove π è un prodotto di potenze delle Y_i e $F^{'}$ non è divisibile per alcuna delle Y_i, allora si dice che $F^{'}$ è la* **trasformata stretta** (o **propria**) *di F attraverso T.*

Osservazione.
Tra F e $F^{'}$ esiste una corrispondenza che è messa in evidenza dal prossimo teorema.

Teorema 3.1.4 *Se $F^{'}$ è la trasformata stretta di F attraverso T, allora F è la trasformata stretta di $F^{'}$ attraverso $T^{'}$. Tranne per un numero finito di eccezioni, i punti e le componenti di F e $F^{'}$ sono in corrispondenza biunivoca.*

Dimostrazione.
Per ipotesi possiamo scrivere :

$$F(Y_1Y_2, Y_2Y_0, Y_0Y_1) = \pi_1(Y)F^{'}(Y_0, Y_1, Y_2) \tag{3.1}$$

e, se $F^{''}$ è la trasformata propria di F' attraverso T', avremo che :

$$F'(X_1X_2, X_2X_0, X_0X_1) = \pi_2(X)F^{''}(X_0, X_1X_2) \tag{3.2}$$

Ponendo $Y_i = X_jX_k$ nella prima equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} F(X_0^2X_1X_2, X_0X_1^2X_2, X_0X_1X_2^2) &= \pi_3(X)F^{'}(X_1X_2, X_2X_0, X_0X_1) \\ &= \pi_4(X)F^{''}(X_0X_1X_2) \end{aligned}$$

dove $\pi_3(X)$ e $\pi_4(X)$ rappresentano, al solito, prodotti di potenze delle X_i.
Inoltre, F è un polinomio omogeneo perciò :

$$F(X_0^2X_1X_2, X_0X_1^2X_2, X_0X_1X_2^2) = (X_0X_1X_2)^nF(X_0X_1X_2)$$

ma, né F né $F^{'}$ sono divisibili per X_i , dunque $F = F^{'}$.
Per dimostrare completamente il teorema è sufficiente dire che la corrispondenza biunivoca tra i punti di F e $F^{'}$ è un'immediata conseguenza di quanto osservato a pagina 25 nel punto **3**. , perché F e $F^{'}$ avranno solo un insieme finito di punti in comune con le rette fondamentali. Invece, la corrispondenza tra le componenti si deduce dalle (3.1) e (3.2) .
Il teorema è così dimostrato . $\square$

3.2 Trasformazione di una singolarità

Passiamo ad uno studio più diretto dei punti singolari . Più precisamente, vogliamo occuparci degli effetti della trasformazione quadratica standard sulle singolarità di un'assegnata curva algebrica piana.
Iniziamo mostrando come le intersezioni della trasformata stretta $F^{'}$ della curva F mediante T con le rette fondamentali corrispondano alle tangenti principali a F nei corrispondenti punti fondamentali.

Teorema 3.2.1 *Sia F una curva di grado n avente un punto di molteplicità r_i , con $r_i \geq 0$ nel punto fondamentale $X_j = X_k = 0$ (i,j,k tutti differenti) e con tangenti principali in questi punti distinte dalle rette fondamentali. Allora :*
(i) La trasformata algebrica G di F ha la retta $Y_i = 0$ come componente di

molteplicità r_i, *e così* $F^{'}$ *ha grado* $2n - \sum_i r_i$.
(ii) *Esiste una corrispondenza biunivoca, che conserva la molteplicità, tra le tangenti principali a* F *in* $X_j = X_k = 0$ *e le intersezioni non fondamentali di* $F^{'}$ *con* $Y_i = 0$.
(iii) $F^{'}$ *ha molteplicità* $n - r_j - r_k$ *in* $Y_j = Y_k = 0$ *; le tangenti principali sono distinte dalle rette fondamentali e corrispondono alle intersezioni non fondamentali di* F *con* $X_i = 0$.

Dimostrazione.
(i) Supponiamo che $P_0 = [1, 0, 0]$ abbia molteplicità $r_0 \geq 0$ per F . Allora :

$$F(X) = X_0^{n-r} A_{r_0}(X_1 X_2) + X_0^{n-r-1} A_{r_0+1}(X_1 X_2) + ... + A_n(X_1 X_2)$$

dove A_p è un polinomio omogeneo di grado p e $A_{r_0} A_n \neq 0$. Dunque, la trasformata algebrica di F rispetto a T sarà :

$$\begin{aligned} G(Y) &= Y_1^{n-r_0} Y_2^{n-r_0} A_{r_0}(Y_2 Y_0, Y_0 Y_1) + ... + A_n(Y_2 Y_0, Y_0 Y_1) = \\ &= Y_1^{n-r_0} Y_2^{n-r_0} Y_0^{r_0} A_{r_0}(Y_2, Y_1) + ... + Y_0^n A_n(Y_2, Y_1). \end{aligned}$$

È evidente che $Y_0^{r_0}$ è la più alta potenza di Y_0 nella quale $G(Y)$ sia fattorizzabile . Un discorso analogo vale anche per $Y_1^{r_1}$ e $Y_2^{r_2}$.
Quindi la $F^{'}$ ha grado :

$$2n - r_0 - r_1 - r_2 \;=\; 2n - \sum_i r_i.$$

(ii) Basta osservare che le tangenti principali a F in P_0 sono le componenti della curva $A_{r_0}(X_1, X_2) = 0$, mentre le intersezioni di $F^{'}$ con la retta fondamentale $Y_0 = 0$ sono le radici dell'equazione :

$$Y_1^{n-r_0-r_1} Y_2^{n-r_0-r_2} A_{r_0}(Y_2, Y_1) = 0.$$

(iii) Sviluppiamo l'espressione ottenuta nel corso della dimostrazione del punto (i) :

$$\begin{aligned} &G(Y) = Y_1^{n-r_0} Y_2^{n-r_0} Y_0^{r_0} A_{r_0}(Y_2, Y_1) + ... + Y_0^n A_n(Y_2, Y_1) = \\ &= Y_0^{r_0} Y_1^{r_1} Y_2^{r_2} (Y_1^{n-r_0-r_1} Y_2^{n-r_0-r_2} A_{r_0}(Y_2, Y_1) + ... + Y_0^{n-r_0} Y_1^{-r_1} Y_2^{-r_2} A_n(Y_2, Y_1) \end{aligned}$$

perciò $F^{'}(Y) = Y_1^{n-r_0-r_1} Y_2^{n-r_0-r_2} A_{r_0}(Y_2, Y_1) + ... + Y_0^{n-r_0} Y_1^{-r_1} Y_2^{-r_2} A_n(Y_2, Y_1)$ e la molteplicità di $F^{'}$ in P_0 è il grado del polinomio :

$$B(Y_1, Y_2) = Y_1^{-r_1} Y_2^{-r_2} A_n(Y_2, Y_1)$$

cioè , è $n - r_1 - r_2$.
Le tangenti principali, invece, sono le componenti della curva $B(Y_1, Y_2) = 0$ e sono rette distinte dalle rette fondamentali . Perché se una fosse fondamentale, allora $A_n(Y_2, Y_1)$ sarebbe divisibile, per esempio, per Y_1 elevato ad una certa potenza $r > r_1$. Dunque, F avrebbe r intersezioni con $L_0 : X_0 = 0$ in P_1 e ciò vuol dire che una delle tangenti principali in P_1 è la retta L_0, contrariamente a quanto assunto per ipotesi .
Per verificare anche l'ultima affermazione, è sufficiente ripetere la dimostrazione del punto (ii) per la trasformata propria $F^{'}$. $\square$

Osservazione.
Per provare la correttezza di quanto affermato in questo teorema, analizzeremo cosa accade se applichiamo prima T e poi $T^{'}$. Applicando T, avremo che n,r_0,r_1,r_2 sono cambiati rispettivamente in :

$$\begin{array}{ll} n^{'} = 2n - r_0 - r_1 - r_2, & r_0^{'} = n - r_1 - r_2 \\ r_1^{'} = n - r_2 - r_0, & r_2^{'} = n - r_0 - r_1 \end{array} \tag{3.3}$$

$T^{'}$, a sua volta, cambierà allo stesso modo $n^{'}$,$r_0^{'}$,$r_1^{'}$,$r_2^{'}$ in $n^{''}$,$r_0^{''}$,$r_1^{''}$,$r_2^{''}$, cioè :

$$\begin{array}{ll} n^{''} = 2n^{'} - r_0^{'} - r_1^{'} - r_2^{'}, & r_0^{''} = n^{'} - r_1^{'} - r_2^{'} \\ r_1^{''} = n^{'} - r_2^{'} - r_0^{'}, & r_2^{''} = n^{'} - r_0^{'} - r_1^{'} \end{array} \tag{3.4}$$

Se ora sostituiamo le espressioni (3.3) nelle (3.4) avremo che :

$$\begin{aligned} n^{''} &= 2(2n - r_0 - r_1 - r_2) - n + r_1 + r_2 - n + r_2 + r_0 - n + r_0 + r_1 = \\ &= 4n - 2r_0 - 2r_1 - 2r_2 - 3n + 2r_0 + 2r_1 + 2r_2 \; = \; n \end{aligned}$$

Analogamente, si verifica che : $r_0^{''} = r_0$, $r_1^{''} = r_1$ e $r_2^{''} = r_2$, come volevamo dimostrare .

Infine, per completare l'analisi del comportamento dei punti singolari sotto l'azione di una trasformazione quadratica, è importante quanto affermato nel prossimo teorema.

Teorema 3.2.2 *Sia P un punto r-plo di F che non appartiene a nessuna retta fondamentale .*
Allora P è trasformato, attraverso T, nel punto P' r-plo di F' e le rispettive tangenti principali si corrispondono in molteplicità.

Dimostrazione.
Supponiamo che sia P che il suo trasformato P' siano i due punti "unità", cioè siano di coordinate $[1, 1, 1]$. Possiamo sempre ricondurci a questa situazione perché se $P = [a_0, a_1, a_2]$, considerando le nuove coordinate :

$$\begin{cases} X_i' = a_i^{-1} X_i \\ Y_i' = a_i Y_i \end{cases}$$

le equazioni della trasformazione quadratica restano della stessa forma :

$$Y_i' = X_j' X_k'$$

e le coordinate di P saranno quelle desiderate $[1, 1, 1]$.
Poiché, per definizione, F' e la trasformata algebrica G di F differiscono solo di componenti che, però, non contengono il punto P', è sufficiente dimostrare il teorema per G invece che per F' . Consideriamo in S_2 il cambiamento di coordinate :

$$\begin{cases} z_0 = X_0 \\ z_1 = X_1 - X_0 \\ z_2 = X_2 - X_0 \end{cases}$$

Allora P sarà di z-coordinate $[1, 0, 0]$ ed avremo che :

$$\begin{aligned} F(X) &= F_1(z) = z_0^{n-r} A_r(z_1, z_2) + ... + A_n(z_1, z_2) = \\ &= X_0^{n-r} A_r(X_1 - X_0, X_2 - X_0) + ... + A_n(X_1 - X_0, X_2 - X_0). \end{aligned}$$

dove, per ipotesi, $A_r(z_1, z_2)$ determina le tangenti principali a F in P; perciò

$$\begin{aligned} G(Y) = Y_1^{n-r} Y_2^{n-r} A_r(Y_2 Y_0 - Y_1 Y_2 \, , \, Y_0 Y_1 - Y_1 Y_2) + ... \\ + A_n(Y_2 Y_0 - Y_1 Y_2 \, , \, Y_0 Y_1 - Y_1 Y_2) \end{aligned}$$

Eseguiamo un cambiamento analogo in $S_2^{'}$:

$$\begin{cases} w_0 = Y_0 \\ w_1 = Y_0 - Y_1 \\ w_2 = Y_0 - Y_2. \end{cases}$$

allora $P^{'} = [1, 0, 0]$ e per G si ottiene l'espressione :

$$\begin{aligned} G(Y) = G_1(w) &= (w_0 - w_1)^{n-r}(w_0 - w_2)^{n-r} A_r(w_0w_1 - w_1w_2, w_0w_2 - w_1w_2) + \\ &\quad + (w_0 - w_1)^{n-r-1}(w_0 - w_2)^{n-r-1} A_{r+1}(w_0w_1 - w_1w_2, w_0w_2 - w_1w_2) + \\ &\quad + ... + A_n(w_0w_1 - w_1w_2, w_0w_2 - w_1w_2) \\ &= w_0^{2n-r} A_r(w_1, w_2) + (\ldots) + w_0^{2n-r-1} A_{r+1}(w_1, w_2) + (\ldots) + ... \\ &\quad + w_0^n A_n(w_1, w_2) + (\ldots) \end{aligned}$$

dove con $(\ldots)$ indichiamo termini con potenze di w_0 più basse rispetto a quelle scritte. La più alta potenza con cui appare w_0, invece, è $2n - r$, ciò implica che le tangenti in $P^{'}$ saranno le componenti della curva di equazione $A_r(w_1, w_2) = 0$.

Quest'ultima affermazione completa la nostra dimostrazione. $\square$

3.3 Riduzione delle singolarità: teorema di *Nöether*

L'aspetto più importante del Teorema 3.2.1 è il fatto che i nuovi punti multipli della trasformata stretta di F attraverso T corrispondono alle rette fondamentali della trasformazione quadratica eseguita, e sono punti multipli a tangenti principali distinte se queste rette incontrano la curva F in punti distinti, fuori dei punti fondamentali. Ma $F^{'}$ potrebbe presentare un punto multiplo a tangenti principali non distinte; il teorema di Nöether mostra come sia possibile far scomparire tale singolarità, considerandola come punto fondamentale di una nuova trasformazione quadratica standard. Quindi, attraverso successive trasformazioni quadratiche standard ed eventuali proiettività, si possono ″sciogliere″ le singolarità di F in modo tale che le nuove singolarità create dalle trasformazioni eseguite siano punti a tangenti principali distinte; perciò si ottiene una curva dotata soltanto di punti multipli ordinari.

Iniziamo riportando alcuni risultati di base della teoria delle curve algebriche piane.

Proposizione 3.3.1 *Se $\mathcal{C}$ è una curva di grado n senza componenti multiple, allora per ogni $P \notin \mathcal{C}$ passano rette che hanno n punti distinti in comune con la curva $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione.
Scegliamo un sistema di coordinate per il quale $P = [0, 0, 1]$ e sia $f(X, Y) = 0$ l'equazione di $\mathcal{C}$ in coordinate affini. Siano :

$$\begin{cases} X = \alpha & , \alpha \in K \\ Y = t \end{cases}$$

le equazioni parametriche di una retta L_α passante per P. Considerando ogni possibile valore finito di t otteniamo tutti i punti di L_α eccetto P. L'insieme $L_\alpha \cap \mathcal{C}$ è determinato dalle soluzioni di $f(\alpha, t) = 0$, che è di grado n in t (essendo $P \notin \mathcal{C}$) e che ha n soluzioni distinte per qualche scelta di $\alpha \in K$.
Infatti, se supponiamo che $f(\alpha, t)$ abbia una radice multipla per ogni α, si ottiene che $D(\alpha) = 0$ per ogni α, dove $D(\alpha)$ è il discriminante di $f(\alpha, t)$. Dunque $D(X) = 0$, ma questa condizione è equivalente ad affermare che $f(X, Y)$ ha un fattore multiplo (proposizione 1.2.4) in contraddizione con le ipotesi su $\mathcal{C}$. $\square$
Facilmente si può dimostrare che vale il risultato più generale :

Proposizione 3.3.2 *Se $\mathcal{C}$ soddisfa le stesse ipotesi della precedente proposizione, allora per ogni $P \in \mathcal{C}$ di molteplicità r passano rette che intersecano $\mathcal{C}$ in $n - r$ punti oltre P .*

Proposizione 3.3.3 *Se una curva $\mathcal{C}$ di grado n priva di componenti multiple ha molteplicità r_i nei punti P_i , si ha :*

$$n(n-1) \geq \sum_i r_i(r_i - 1). \tag{3.5}$$

Dimostrazione. [**?**, III-4.3].

NOTA. Se $\mathcal{C}$ è composta di n rette distinte, allora ha un punto singolare n-plo e vale il segno di uguaglianza in (3.5).
Invece, per le curve irriducibili si ha un'altra disuguaglianza :

Teorema 3.3.4 *Se una curva irriducibile $\mathcal{C}$ di grado n ha molteplicità r_i in P_i , allora :*

$$(n-1)(n-2) \geq \sum_i r_i(r_i-1). \tag{3.6}$$

Dimostrazione.
La proposizione 3.3.3 ci permette di dire che :

$$\sum_i r_i(r_i-1)/2 \leq n(n-1)/2 \leq (n-1)(n+2)/2$$

Perciò esiste una curva $\widetilde{\mathcal{C}}$ di grado $n-1$ avente un punto (r_i-1)-plo in P_i e passante per :

$$(n-1)(n+2)/2 - \sum_i r_i(r_i-1)/2$$

punti semplici di $\mathcal{C}$. Dato che $\mathcal{C}$ è irriducibile e che $gr(\widetilde{\mathcal{C}})$ è più piccolo del $gr(\mathcal{C})$, le due curve non possono avere componenti comuni e così [**?**, 3.3]:

$$n(n-1) \geq \sum_i r_i(r_i-1) + (n-1)(n+2)/2 - \sum_i r_i(r_i-1)/2.$$

Questa disuguaglianza si riduce alla (3.6) . $\square$

A questo punto passiamo al teorema principale.

Teorema 3.3.5 (**di Nöether**) *Mediante un numero finito di trasformazioni quadratiche e di proiettività, ogni curva piana irriducibile $\mathcal{C}$: $F = 0$ dotata di qualunque singolarità si può trasformare in un'altra con singolarità solo ordinarie .*

Dimostrazione.
Denotiamo con r_i la molteplicità dei diversi punti singolari non ordinari della curva, definiamo l'*indice* di F l'intero :

$$I = \sum_i (r_i - 1)$$

e dimostriamo il teorema per induzione sull'indice I .
Se $I = 0$ il teorema è vero banalmente .

Se $I > 0$ supponiamo vero il teorema per qualsiasi curva irriducibile di indice $< I$; perciò per dimostrare il teorema di Nöether sarà sufficiente mostrare che F può essere trasformata in una curva di indice $< I$.
Sia P un punto r-plo non ordinario di F . Poniamoci in un sistema di coordinate per il quale :
(i) $P = [1, 0, 0]$.
(ii) La retta $X_0 = 0$ interseca la curva $X_1 X_2 F = 0$ in $n + 2$ punti distinti (proposizione 3.3.1).
(iii) Entrambe le rette $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$ intersecano F in $n - r$ punti distinti oltre P (proposizione 3.3.2).
In questo modo ci siamo posti nelle ipotesi del teorema 3.2.1 con $r_0 = r$ e $r_1 = r_2 = 0$, perciò F è trasformata in una curva irriducibile $F^{'}$ tale che :
(iv) $F^{'}$ ha grado $2n - r$ (teorema 3.2.1(i)).
(v) Ogni singolarità di F diversa da P è trasformata in una con la stessa molteplicità e, in particolare, se la singolarità è ordinaria anche la sua trasformata è ordinaria (teorema 3.2.2).
(vi) $F^{'}$ ha tre nuovi punti singolari ordinari : uno n-plo (in $[1, 0, 0]$) e due di molteplicità $(n - r)$ (in $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$) (teorema 3.2.1(iii)).
(vii) Al punto P corrispondono su $F^{'}$ i punti $P_{\alpha}^{'}$, $\alpha = 1, ..., k$ che appartengono alla retta fondamentale $Y_0 = 0$ (teorema 3.2.1(ii)).
A questo punto è importante osservare che le singolarità di $F^{'}$ descritte in (v) e (vi) non cambiano l'indice della curva, infatti, indicando con ${r_{\alpha}}^{'}$ la molteplicità di $P_{\alpha}^{'}$, si ha che l'indice di $F^{'}$ è inferiore a quello di F di una quantità :

$$h \geq (r - 1) - \sum_{\alpha=1}^{k} ({r_{\alpha}}^{'} - 1)$$

Ma, per il teorema 3.2.1(ii), $\sum_{\alpha} {r^{'}}_{\alpha} \leq r$; infatti, il numero delle intersezioni in $P_{\alpha}^{'}$ di $Y_0 = 0$ con $F^{'}$ è sicuramente $\geq \sum_{\alpha} {r_{\alpha}}^{'}$ e, allo stesso tempo, tale numero è pari alla somma delle molteplicità di F in P, cioè è uguale a r .
Perciò si ha la catena di disuguaglianze :

$$h \geq (r - 1) - (\sum_{\alpha} {r_{\alpha}}^{'} - k) \geq (r - 1) - (r - k) = k - 1 \geq 0$$

e , $h = 0$ se e solo se $k = 1$ e ${r_1}^{'} = r$. Se $h > 0$, allora l'indice di $F^{'}$ è strettamente minore di I e il teorema è dimostrato .
Se, invece, $h = 0$ applichiamo a $F^{'}$ una nuova trasformazione quadratica con

punto fondamentale in $P_1^{'}$ e ripetiamo per $F^{'}$ il procedimento precedente.
Se la trasformata $F^{(2)}$ ha indice più piccolo di I la dimostrazione termina; altrimenti, consideriamo altre trasformazioni fino a quando non raggiungiamo la condizione che desideriamo .
Supponiamo di averla con la curva $F^{(p+1)}$, ottenuta da F attraverso $(p+1)$ successive trasformazioni per le quali $h = 0$.
Sicuramente, il grado di $F^{(p+1)}$ è :

$$n_{p+1} = 2n_p - r$$

e tra i suoi punti singolari ce ne sono due per ciascuna delle molteplicità : $n - r$, $n_1 - r$,..., $n_p - r$ e uno per ciascuna delle molteplicità : n, n_1 ,..., n_p .
Per la proposizione 3.3.4 avremo che l'intero :

$$M_{p+1} = (n_{p+1} - 1)(n_{p+1} - 2) - 2\sum_{i=0}^{p} (n_i - r)(n_i - r - 1) - \sum_{i=0}^{p} n_i(n_i - 1)$$

dove $n_0 = n$ deve essere non negativo. Ma, ricordando che $r \geq 2$, si ha che :

$$M_{p+1} - M_p = -r(r-1) \leq -2$$

e quindi p non può essere arbitrariamente grande .
La verifica del Teorema di Nöether è così completa . $\square$

3.4 Punti infinitamente vicini

Terminata anche questa dimostrazione, siamo interessati a vedere come sia possibile utilizzare i principali teoremi riportati nel corso di questo capitolo al fine di fornire una precisa descrizione delle singolarità, anche complicate, di una curva algebrica piana .
Sia F una curva priva di componenti multiple e P un suo punto r-plo . Se P è fondamentale per la trasformazione del teorema 3.2.1, P è rappresentato sulla $F^{'}$ dai punti $P_1^{'}$,$P_2^{'}$,...,$P_k^{'}$ di molteplicità, rispettivamente, $r_1^{'}$,$r_2^{'}$,...,$r_k^{'}$.
Descriveremo questa situazione dicendo che :
'' nell'**intorno del primo ordine** di P, la curva F ha i punti P_1 ,..., P_k di molteplicità $r_1^{'}$,..., $r_k^{'}$ '' .

Spesso questi P_α sono chiamati **punti infinitamente vicini** a P . È fondamentale far notare che i P_α non sono punti nel senso ordinario di intendere la parola, ma solo uno $''$ stratagemma $''$ utile per descrivere la curva F ; ai punti infinitamente vicini, infatti, si possono assegnare proprietà simili a quelle dei punti ordinari. Allora, per convenzione, diremo $P_\alpha^{'}$ il trasformato di P_α mediante T ed avremo che ciascun punto di $F^{'}$ è il trasformato di uno o più punti di F, inclusi quelli appartenenti all'intorno del primo ordine di P . L'unico punto di F che non è trasformato in nessuno di quelli di $F^{'}$ è P, perché è uno dei punti fondamentali della trasformazione quadratica che stiamo considerando quindi, eseguendo T, P scompare .
Inoltre, dal momento che la posizione di $P_\alpha^{'}$ dipende dalla direzione della corrispondente tangente principale a F in P, diremo che la $''$posizione$''$ del punto infinitamente vicino P_α è determinata da questa tangente. Estendendo la terminologia introdotta diremo che, se $F^{'}$ possiede il punto $P_{\alpha\beta}^{''}$ $r_\beta^{''}$-plo appartenente all'intorno del primo ordine di $P_\alpha^{'}$, allora $P_{\alpha\beta}^{''}$ è il trasformato di un punto $r_\beta^{''}$-plo di F appartenente all'intorno del primo ordine di P_α e a quello del **secondo ordine** di P. Procedendo nello stesso modo, si arriva a definire i punti di F in termini di intorni di ordine arbitrariamente grande.

Osservazioni.
(i) Sia P semplice per F. Ovviamente, è rappresentato su $F^{'}$ da un unico punto $P^{'}$; cioè ogni punto semplice di una curva ha solamente un punto, anch'esso semplice, nel suo intorno del primo ordine .
Si verifica immediatamente che lo stesso discorso è valido per qualsiasi altro intorno di ordine superiore. Ne segue che, in generale, la ricerca dei punti infinitamente vicini di un qualsiasi punto si può interrompere non appena si determina un punto semplice .
(ii) Sia P un punto r-plo ordinario di F. Su $F^{'}$ gli corrisponderanno r punti semplici $P_1^{'}$,$P_2^{'}$,...,$P_k^{'}$, quindi P ha r punti semplici nel suo intorno del primo ordine .

Ora vogliamo provare un'estensione della proposizione 3.3.4 che ci mostrerà l'esistenza di un intero non negativo associato ad una data curva che è invariante rispetto ad una successione di trasformate quadratiche standard applicate a F .

Teorema 3.4.1 *Se r_1,r_2,... le molteplicità di tutti i punti multipli (inclusi quelli infinitamente vicini) di una curva irriducibile F di grado n, allora :*

$$(n-1)(n-2) \geq \sum_i r_i(r_i - 1)$$

Dimostrazione.
Supponiamo che i punti infinitamente vicini di F siano definiti rispetto alla successione delle trasformazioni T_1,T_2,...,T_k . Poniamo :

$$N = (n-1)(n-2) - \sum_i r_i(r_i - 1)$$

e osserviamo gli effetti che si hanno su questo intero applicando la trasformazione T_1 con punto fondamentale in P_1, r_1-plo per F. Sappiamo che la trasformata $F^{'}$ sarà di grado $2n-r_1$, e che avrà punti singolari di molteplicità r_2,r_3,...che sono i trasformati di quelli non fondamentali di F, oltre ai punti infinitamente vicini a P e a tre singolarità di molteplicità, rispettivamente, n , $(n-r_1)$, $(n-r_1)$. Al solito, P sparisce, perciò per $F^{'}$ si ha :

$$N_1 = (2n - r_1 - 1)(2n - r_1 - 2) - \sum_i r_i(r_i - 1) + r_1(r_1 - 1)$$
$$-n(n-1) - 2(n - r_1)(n - r_1 - 1)$$

che , si riduce a N. Allo stesso modo si può mostrare che :

$$N_{k+1} = N_k = ... = N_1 = N.$$

Ma abbiamo supposto dopo le trasformazioni T_1,...,T_k si giunge ad una curva F_k priva di punti infinitamente vicini singolari, quindi, per la proposizione 3.3.4, $N_k \geq 0$ e allora $N \geq 0$. $\square$

Prima di concludere questo paragrafo vogliamo chiarire ulteriormente la convenzione dei punti infinitamente vicini, applicando il metodo di riduzione delle singolarità descritto in precedenza a due curve già incontrate nel primo capitolo .

Esempio 1. Analizziamo la curva $F(X,Y) = Y^2 + X^3 = 0$ che, come già visto possiede una cuspide nell'origine O . Eseguiamo un cambiamento di coordinate in modo tale che la tangente principale della curva in O non sia uno degli assi coordinati ; poniamo allora $Y = Y - X$ ed avremo che la curva diventa di equazione :

$$F(X,Y) = X^3 + (Y - X)^2 = 0$$

mentre la sua chiusura proiettiva sarà definita da :

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_1^3 + (X_2 - X_1)^2 X_0$$

Se ora si esegue la trasformazione T avente punto fondamentale in $P = O$ si ottiene che :

$$F^{'}(Y_0, Y_1, Y_2) = Y_2^2 Y_0 + (Y_1 - Y_2)^2 Y_1 = 0.$$

Su $F^{'} = 0$ l'unico punto $P^{'}$ che corrisponde a P sarà il punto semplice di coordinate $[0, 1, 0]$.
La situazione determinata si può riassumere dicendo che :
″ una cuspide è un punto doppio con uno semplice nel suo intorno del primo ordine ″ .

Esempio 2. Si consideri la curva $F(X,Y) = X^4 + X^2Y^2 - Y^2 = O.$
Ha due punti doppi : uno nell'origine e l'altro all'infinito ; in particolare, quello nell'origine, che chiameremo P, non è ordinario. Per prima cosa, come nel precedente esempio, consideriamo il cambiamento di coordinate : $Y = Y - X$; l'equazione diventa :

$$F(X,Y) = X^4 + X^2(Y - X)^2 - (Y - X)^2 = 0$$

e , in coordinate proiettive , si riscrive :

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_1^4 + X_1^2(X_2 - X_1)^2 - (X_2 - X_1)^2 X_0^2 = 0.$$

Allora , in questo caso , si trova che :

$$F^{'}(Y_0, Y_1, Y_2) = Y_2^2 Y_0^2 + Y_0^2(Y_1 - Y_2)^2 - (Y_1 - Y_2)^2 Y_1^2 = 0$$

e su $F^{'}$ il punto che corrisponde a P è $P^{'} = [0, 1, 1]$.
Se, a questo punto, poniamo : $Y_2 = Y_2^{'} + Y_1$ si ottiene per $F^{'}$ l'espressione :

$$F^{'}(Y_0, Y_1, Y_2) = (Y_1 + Y_2^{'})^2 Y_0^2 + Y_0^2 {Y_2^{'}}^2 - {Y_2^{'}}^2 {Y_1^{'}}^2 = 0$$

mentre le nuove coordinate di P' saranno $[0, 1, 0]$ che per F' è un punto doppio ordinario . In sintesi, possiamo dire che :
″la singolarità di F in P è composta di un punto doppio con un punto doppio nel suo intorno del primo ordine e di due semplici in quello del secondo ordine″. Un punto doppio non ordinario con una simile decomposizione prende il nome di **tacnodo**.

Osservazione.
Un'attenta osservazione di questi due esempi può mettere in evidenza come, ad ogni passo del processo di analisi delle singolarità di una curva, sia necessario introdurre dei precisi cambiamenti di coordinate.
Chiaramente ogni volta si ha un'ampia varietà di scelta delle coordinate; però, si può far vedere, mediante una dimostrazione che non verrà riportata perché troppo lunga e complicata, che tale analisi è indipendente dal sistema di coordinate introdotto.
Si osservi che, dal Teorema di N*ö*ether discende che l'analisi dei punti singolari, in termini di singolarità vicine, è un processo finito e conduce ad una classificazione completa di tutti i punti singolari di una data curva.

Capitolo 4

RISOLUZIONE DELLE SINGOLARITÀ

4.1 ″Scoppiamento″ di un punto in $\mathbf{A}^2(K)$

Nel corso della dimostrazione del teorema di N*ö*ether è stato illustrato un metodo, per la riduzione delle singolarità di una curva algebrica piana irriducibile, che ci ha permesso di giungere ad una curva piana con punti multipli solo ordinari . Ora ci proponiamo l'obiettivo più ambizioso di ″risolvere″ tali singolarità ordinarie però, per poterci riuscire, abbiamo di lavorare con la struttura più generale delle varietà algebriche. Dal momento che vogliamo mantenere, nel corso di tutta la trattazione, un linguaggio più elementare possibile, utilizzeremo i principali risultati della teoria delle varietà algebriche rinviando ai testi di geometria algebrica : [**?**] e [**?**].

Dicendo di voler risolvere le singolarità intendiamo dire che costruiremo una curva proiettiva non singolare X e un morfismo birazionale $\delta : X \longrightarrow C$.
L'idea che seguiremo è la seguente: si prende una curva $\mathcal{C}$ del piano proiettivo avente una singolarità nel punto P e si rimuove tale punto da $\mathbf{P}^2(K)$ sostituendolo con una retta proiettiva L ; in poche parole, si fa ″scoppiare″ il punto P. Chiaramente, ciascun punto di L corrisponderà ad una diversa direzione tangente alla curva in P. Tutto ciò verrà eseguito in modo tale che il piano ″scoppiato″ risultante $B = (\mathbf{P}^2(K) - \{P\}) \cup L$ sia ancora una varietà . $\mathcal{C}$ sarà birazionalmente equivalente ad una curva $\mathcal{C}'$ della varietà B,

con $\mathcal{C}' - (\mathcal{C}' \cap L)$ isomorfo a $\mathcal{C} - \{P\}$; ma $\mathcal{C}'$ avrà su L singolarità ″migliori″ di quella che $\mathcal{C}$ ha in P .
In un primo momento realizzeremo questa costruzione nel piano affine .
Successivamente, studieremo la situazione proiettiva e vedremo che, localmente, si ripete il comportamento analizzato nel caso affine.

Premettiamo, al fine di semplificare le notazioni, che di qui in avanti scriveremo $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{P}^2$ al posto di $\mathbf{A}^2(K)$ e $\mathbf{P}^2(K)$.
Sia allora $\mathcal{C}$ una curva in $\mathbf{A}^2$ avente un punto multiplo in P e supponiamo che P coincida con l'origine di $\mathbf{A}^2$.
Consideriamo l'insieme $U = \{(x, y) \in \mathbf{A}^2 |\, x \neq 0\}$ e definiamo il morfismo :

$$\begin{array}{rcl} g : U & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = y/x. \end{array}$$

Sia $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{A}^3 |\, y = xz,\ x \neq 0\} \subset U \times \mathcal{A}^1 \subset \mathcal{A}^2 \times \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^3$ il grafico di g e chiamiamo B la chiusura di G in $\mathbf{A}^3$, cioè :

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{A}^3 |\, y = xz\}\,;$$

B è una varietà perchè $Y - XZ$ è un polinomio irriducibile .
Se π è la restrizione a B della proiezione da $\mathbf{A}^3$ in $\mathbf{A}^2$, si ha che :
$\pi^{-1}(U) = \{(x, y, z) \in B |\, \pi(x, y, z) \in U\,\} = \{(x, y, z) \in B |\, x \neq 0\,\} = G$,
quindi la restrizione di π all'insieme $\pi^{-1}(U)$ è un isomorfismo da $\pi^{-1}(U)$ in U . Sia L la controimmagine di P rispetto a π , cioè $L = \pi^{-1}(P) = \{(0, 0, z) |\, z \in K\}$ e osserviamo che, per definizione, G è una sottovarietà aperta di B, mentre L è una sottovarietà chiusa di B.
Sia ora :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & B \\ (x, z) & \longmapsto & \varphi(x, z) = (x, xz, z). \end{array}$$

φ è un isomorfismo di $\mathbf{A}^2$ in B la cui inversa è la proiezione sul piano (x, z);
se poi consideriamo la sua composizione con π, cioè il morfismo :
$\psi = \pi \circ \varphi : \mathbf{A}^2 \longrightarrow \mathbf{A}^2$ definito mandando $(x, z) \in \mathbf{A}^2$ in $(x, xz) \in \mathbf{A}^2$ e chiamiamo E la controimmagine di P attraverso ψ, cioè :

$$E = \psi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(L) = \{(x, z) \in \mathbf{A}^2 |\, x = 0\}\,,$$

si ha che $\psi|_{(\mathbf{A}^2-E)} : (\mathbf{A}^2 - E) \longrightarrow U$ è un isomorfismo ; in altri termini, abbiamo verificato che ψ è un morfismo birazionale del piano in se stesso .

Supponendo che la curva $\mathcal{C}$ che stiamo analizzando sia distinta dall'insieme algebrico $V(X)$, prendiamo la sottovarietà aperta di $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U$.
Se ${\mathcal{C}_0}^{'} = \psi^{-1}(\mathcal{C}_0)$ e $\mathcal{C}^{'}$ è la sua chiusura in $\mathbf{A}^2$, allora $\delta : \mathcal{C}^{'} \longrightarrow \mathcal{C}$, essendo la restrizione di ψ a $\mathcal{C}^{'}$, è un morfismo birazionale di $\mathcal{C}^{'}$ in $\mathcal{C}$.
Ricordiamo che al morfismo birazionale tra $\mathcal{C}^{'}$ e $\mathcal{C}$ è associato un unico isomorfismo tra i rispettivi campi delle funzioni razionali $k(\mathcal{C}) = k(x,y)$ e $k(\mathcal{C}^{'}) = k(x,z)$, con $y = xz$ indotto dall'isomorfismo :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : K(X,Z) & \longrightarrow & K(X,Y) \\ X & \longmapsto & X \\ Z & \longmapsto & Y/X \, . \end{array}$$

Inoltre , è importante mostrare che :

Proposizione 4.1.1 *Se $\mathcal{C} = V(F)$, $F = F_r + F_{r+1} + ... + F_n$, con F_i polinomio omogeneo di grado i in $K[X,Y]$ $(i = r, ...n)$, $r = m_P(\mathcal{C})$ e $n = gr(\mathcal{C})$, allora $\mathcal{C}^{'} = V(F^{'})$, dove $F^{'} = F_r(1,Z) + XF_{r+1}(1,Z) + ... + X^{n-r}F_n(1,Z)$.*

Dimostrazione.
Se poniamo $Y = XZ$ in $F(X,Y)$ si ottiene che :

$$\begin{aligned} F(X,XZ) &= F_r(X,XZ) + F_{r+1}(X,XZ) + ... + F_n(X,XZ) = \\ &= X^r F_r(1,Z) + X^{r+1}F_{r+1}(1,Z) + ... + X^n F_n(1,Z) \end{aligned}$$

allora :

$$F(X,XZ) = X^r F^{'} \, .$$

Ma, per ipotesi, $F_r(1,Z) \neq 0$ quindi X non divide $F^{'}$.
Se, per assurdo, si supponesse che $F^{'} = GH$, con G e H che variano in $K[X,Z]$, si arriverebbe a scrivere :

$$F = X^r G(X, Y/X) H(X, Y/X)$$

in contrasto con l'ipotesi di irriducibilità di F . $F^{'}$ è, dunque, irriducibile e ciò implica anche l'irriducibilità dell'insieme algebrico $V(F^{'})$.

$V(F') \supset \mathcal{C}_0{}'$: infatti, $(X,Z) \in \mathcal{C}_0{}' \Rightarrow \psi(X,Z) \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow (X,XZ) \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow F(X,XZ) = 0 \Rightarrow X^r F'(X,Z) = 0 \Rightarrow (X,Z) \in V(F')$.
Allora $V(F')$ contiene la chiusura di $\mathcal{C}_0{}'$ in $\mathbf{A}^2$, cioè $\mathcal{C}'$, perciò per l'irriducibilità di $V(F')$ termina la nostra verifica. □

Continuando ad illustrare il fenomeno dello scoppiamento di $P \in \mathcal{C}$, supponiamo che l'asse delle ascisse non sia una tangente principale alla curva in P e assumiamo, moltiplicando eventualmente per una costante, che si abbia:

$$F_r = \prod_{i=1}^{s} (Y - \alpha_i X)^{r_i} \tag{4.1}$$

dove le $L_i = (Y - \alpha_i X)$ sono le tangenti principali a $\mathcal{C}$ in P, per $i = 1, ..., s$.
Allora si ha che :

Proposizione 4.1.2 *Sia $F = F_r + F_{r+1} + ... + F_n$, con F_i polinomio omogeneo di grado i in $K[X,Y]$, $r = m_P(\mathcal{C})$, $n = gr(\mathcal{C})$ e $f^{-1}(P) = \{P_1, ..., P_s\}$, dove $P_i = (0, \alpha_i)$, e $m_{P_i}(C') \leq I_{P_i}(\mathcal{C}' \cap E) = r_i$. Se P è un punto multiplo ordinario di $\mathcal{C}$, allora ciascun P_i è semplice per $\mathcal{C}'$.*

Dimostrazione.
$f^{-1}(P) = (\psi|_{\mathcal{C}'})^{-1}(P) = \psi^{-1}(P) \cap \mathcal{C}' = E \cap \mathcal{C}' = \{(0,z) \in \mathbf{A}^2 | \, F_r(1,z) = 0\}$
(perché $(x,z) \in E \cap \mathcal{C}' \Leftrightarrow (x,z) = (0,z) \quad e F'(0,z) = 0 \Leftrightarrow F_r(1,z) = 0$) .
Ricordando che $f^{-1}(P) = \{P_1, ..., P_s\}$ e osservando che nella (4.1)
$L_i = (Y - \alpha_i X)$ è la tangente principale corrispondente al punto $P_i \in f^{-1}(P)$
, si deduce che :

$$\{P_1, ..., P_s\} = \{(0,z) \in \mathbf{A}^2 | \prod_{i=1}^{s} (z - \alpha_i)^{r_i} = 0\} \tag{4.2}$$

Inoltre, P è punto multiplo ordinario di $\mathcal{C}$ di molteplicità r, quindi il numero di tangenti distinte a $\mathcal{C}$ in P è proprio r e la molteplicità di ciascun P_i è $r_i = 1$; ne segue che la (4.2) si riscrive :

$$\{P_1, ..., P_r\} = \{(0,z) \in \mathbf{A}^2 | \prod_{i=1}^{r} (z - \alpha_i) = 0\} \tag{4.3}$$

e la corrispondenza tra L_i e P_i, per ogni $i = 1, ..., r$ implica che questi P_i sono semplici per $\mathcal{C}'$. □

4.2 "Scoppiamenti" in $\mathbf{P}^2(K)$

Completato lo studio del caso affine, vogliamo occuparci, come annunciato, del processo di risoluzione delle singolarità del piano proiettivo numerico .

Teorema 4.2.1 *Sia $\mathcal{C}$ una curva piana proiettiva irriducibile tale che i suoi punti multipli siano tutti ordinari. Esiste una curva proiettiva non singolare $\mathcal{C}'$ e un morfismo birazionale δ da $\mathcal{C}'$ in $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione.
Siano $Q_1, ..., Q_t$ i punti multipli di $\mathcal{C}$ e, a meno di opportuni cambi di coordinate proiettive, supponiamo che $Q_i = [1, a_{i1}, a_{i2}]$ $(i = 1, ..., t)$, cioè che appartenga a $U_0 : X_0 = 1$. Prendiamo l'aperto del piano proiettivo $U = \mathbf{P}^2 - \{P_1, ..., P_t\}$. Definiamo il morfismo :

$$\begin{array}{rcl} h_i : U & \longrightarrow & \mathbf{P}^2 \\ [x_0, x_1, x_2] & \longmapsto & h_i([x_0, x_1, x_2]) = [x_1 - a_{i1}x_0, x_2 - a_{i2}x_0] \end{array}$$

poniamo $h = (h_1 ... h_t) : U \longrightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1$ (t volte) il morfismo prodotto di questi h_i e chiamiamo $G \subset U \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1$ il grafico di h .
Denotando con X_0, X_1, X_2 le coordinate omogenee correnti in $\mathbf{P}^2$ e con Y_{i1}, Y_{i2} quelle nell'i-esima copia di $\mathbf{P}^1$, consideriamo l'insieme algebrico :

$$B = V(\{Y_{i2}(X_2 - a_{i2}X_0) - Y_{i1}(X_1 - a_{i1}X_0) |\, i = 1, ..., t\})$$

chiaramente questo è un sottoinsieme di $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1$ che contiene G ma, nella nota riportata alla fine di questa dimostrazione, verificheremo che è esattamente la chiusura di G in $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1$, quindi B è una varietà .
Sia $\pi : B \longrightarrow \mathbf{P}^2$ la restrizione a B della proiezione da $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1$ in $\mathbf{P}^2$ e poniamo $E_i = \pi^{-1}(Q_i)$, allora si ottiene che :

(•) $E_i = \{Q_i\} \times \{h_1(Q_i)\} \times ... \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \{h_t(Q_i)\}$
dove $\mathbf{P}^1$ è all'i-esimo posto ; perciò E_i è canonicamente isomorfo a $\mathbf{P}^1$.

(•) $B - (\bigcup_{i=1}^t E_i) = B \cap (U \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1) = G$
allora la restrizione di π a ($B - (\bigcup_{i=1}^t E_i)$) è un isomorfismo di questo insieme con U .

Vogliamo analizzare π nell'intorno di un qualsiasi punto $P \in E_i$, $i = 1, ..., t$. Sia $i = 1$. A meno di eseguire eventuali cambi di coordinate in $\mathbf{P}^2$, possiamo assumere che $Q_0 = [1, 0, 0]$ e che P corrisponda a $[1, \lambda] \in \mathbf{P}^1$, con $\lambda \in K$.
Sia $\varphi_0 : \mathbf{A}^2 \longrightarrow U_0 \subset \mathbf{P}^2$ l'usuale morfismo definito da : $\varphi_0(x, y) = [1, x, y]$ e introduciamo due nuovi insiemi : $V = U_0 - \{Q_2, ..., Q_t\}$ e $W = {\varphi_0}^{-1}(V)$.
Poi, come nel caso affine, consideriamo :

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 \\ (x, z) & \longmapsto & \psi(x, z) = (x, xz) \end{array}$$

e chiamiamo W' la controimmagine di W rispetto a ψ . Se :

$$\varphi : W' \longrightarrow \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 \times ... \times \mathbf{P}^1$$

è definito da $\varphi(x, z) = (\,[1, x, xz], [1, z], h_2([1, x, xz]), ..., h_t([1, x, xz])\,)$ allora φ è un morfismo e $\pi \circ \varphi = \varphi_0 \circ \psi$.
Se $V' = \varphi(W') = B - (\,\bigcup_{i>1} E_i \cup V(X_0) \cup V(Y_{11})\,)$ allora V' è un intorno di Q in B . Se ora si considera il morfismo $\mathbf{P}^2 \times ... \times \mathbf{P}^1 - V(X_0 - Y_{11})$ in $\mathbf{A}^2$ definito mandando $(\,[x_0, x_1, x_2], [y_{11}, y_{12}], ...\,)$ in $(x_1/x_0, y_{12}/y_{11})$ e si restringe tale morfismo a V' si ottiene il morfismo inverso di φ .
Tutta questa analisi svolta si può riassumere in un diagramma :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{A}^2 & \supset & W' & \longrightarrow & V' & \subset & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}^2 & \supset & W & \longrightarrow & V & \subset & \mathbf{P}^2 \end{array}$$

dal quale emerge , in particolare , che :
$(*)$ "Localmente $\pi : B \longrightarrow \mathbf{P}^2$ si comporta come il morfismo $\psi : \mathbf{A}^2 \longrightarrow \mathbf{A}^2$ introdotto nell'analisi del caso affine " .
Se, allora, come in $\mathbf{A}^2$ poniamo $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap U$, ${\mathcal{C}_0}' = \pi^{-1}(\mathcal{C}_0) \subset G$ e $\mathcal{C}'$ la chiusura di $\mathcal{C}_0'$ in B, avremo che la restrizione di π a $\mathcal{C}'$, $\delta : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ è un isomorfismo di ${\mathcal{C}_0}'$ in $\mathcal{C}_0$.
La dimostrazione è così conclusa, perché la condizione che $\mathcal{C}'$ sia non singolare è garantita dalla proposizione 4.1.4 e dal fatto che una conseguenza

immediata di $(*)$ è che, per costruzione, h si comporta, localmente, come la corrispondente applicazione del caso affine . $\square$

NOTA. Vogliamo verificare che B è la chiusura di G in $\mathbf{P}^2 \times ... \times \mathbf{P}^1$. Se S è un sottoinsieme chiuso di $\mathbf{P}^2 \times ... \times \mathbf{P}^1$ che contiene G, allora $\varphi^{-1}(S)$ è chiuso in $W^{'}$ e contiene $\varphi^{-1}(G) = W^{'} - V(X)$. Dal momento che $W^{'} - V(X)$ è aperto in $W^{'}$, si avrà che questo insieme è denso, perciò $\varphi^{-1}(S) = W^{'}$. Allora, $P \in S$, ma P era un punto arbitrario di $B - G$, quindi $S \supset B$.

Osservazione.
Il teorema qui sopra verificato è di straordinaria importanza per lo studio che stiamo svolgendo sulle singolarità di una curva piana irriducibile, anche se è doveroso sottolineare che il procedimento seguito presenta lo svantaggio di farci determinare una curva che, benchè sia non singolare, non è più una curva piana.

Capitolo 5

STRUTTURA ANALITICA DELL'ANELLO LOCALE DI UNA CURVA

5.1 Molteplicità e anelli locali

In questo primo paragrafo vogliamo fornire una caratterizzazione della molteplicità di una curva piana $\mathcal{C}$ (affine o proiettiva) irriducibile in $P \in \mathcal{C}$ in termini dell'anello locale $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$, mostrando così che la classica definizione della molteplicità di una curva (affine o proiettiva) in un suo punto dipende unicamente dal suo anello locale nel punto.
Utilizzeremo la seguente notazione : per ogni polinomio $f \in K[X, Y]$ denoteremo la sua immagine (residuo) in $\Gamma(\mathcal{C})$ con $\overline{f}$.
La caratterizzazione che siamo interessati ad illustrare ricorre a diversi concetti e risultati di algebra commutativa e di geometria algebrica ; noi ne riporteremo brevemente solo alcuni, per una trattazione più ampia rinviamo ai testi : [**?**] e [**?**] .

Proposizione 5.1.1 *Siano D un dominio e $U(D)$ l'insieme degli elementi invertibili di D . Le seguenti condizioni sono equivalenti :*
(i) D è noetheriano, è locale e l'ideale massimale è principale .
(ii) Esiste un elemento irriducibile $t \in D$ tale che ogni elemento non nullo $z \in D$ può essere scritto in modo unico nella forma $z = ut^n$, con $u \in U(D)$ e n un intero non negativo .

Dimostrazione.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sia M l'ideale massimale di D. Per ipotesi M è principale, sia t un elemento generatore per M. Dimostreremo che t soddisfa la condizione (ii).
Supponiamo che $z \in D \setminus \{0\}$ si possa scrivere $z = ut^n = vt^m$, con $u, v \in U(D)$ e $n \geq m$. Allora $ut^{n-m} = v \in U(D)$; ne segue che $n = m$ e $u = v$. Dunque l'espressione $z = ut^n$ è unica .
Facciamo ora vedere che ogni $z \in D \setminus \{0\}$ si può rappresentare nella forma $z = ut^n$.
Sia z non nullo. Se supponiamo che z non sia invertibile, allora $z = z_1 t$, per qualche $z_1 \in D$. Se z_1 è invertibile la dimostrazione è conclusa. Se, invece, $z_1 \notin U(D)$ esisterà un certo $z_2 \in D$ tale che : $z_1 = z_2 t$. Proseguendo in questo modo resterà definita una successione :

$$z_1, z_2, ..., z_i, ... \quad \text{con } z_i = z_{i+1} t \,. \tag{5.1}$$

Ma la noetherianità di D impone la condizione di stazionarietà alla catena ascendente di ideali :

$$(z_1) \subset (z_2) \subset ... \subset (z_i) \subset ... \subset D$$

cioè, deve esistere $n \geq 1$ tale che $(z_n) = (z_{n+1}) = ...$
Dunque, $z_{n+1} = wz_n$, per qualche $w \in D$; così, ricordando la (5.1), si ha $z_n = wtz_n$ e $wt = 1$. Ma t non è invertibile in D perciò necessariamente si dovrà avere che $z_{n+1} = wz_n \in U(D)$ (altrimenti $t = w^{-1} \in U(D)$) e quindi si ha :

$$z = z_1 t = z_2 t^2 = ... = z_n t^n = z_{n+1} t^{n+1}$$

dove $z_{n+1} \in U(D)$ e n un intero non negativo .
$(ii) \Rightarrow (i)$ Chiaramente l'ideale $M = (t)$ è l'insieme degli elementi non invertibili in D. Dall'ipotesi (ii) segue immediatamente che gli unici ideali in D sono gli ideali principali della forma (t^n), $n \geq 0$. Dunque D è un PID .
La proposizione è così completamente dimostrata . $\square$

Un anello D che soddisfi le condizioni equivalenti della proposizione 5.1.1 si dice **anello di valutazione discreta** (o DVR). Un elemento t che verifichi la proprietà riportata in (ii), è chiamato **parametro uniformizzante per**

D ; ogni altro parametro uniformizzante è della forma ut, con $u \in U(D)$.
Se indichiamo con K il campo dei quozienti di D, fissando t, avremo che ogni elemento non nullo $z \in K$ può essere rappresentato unicamente mediante l'espressione : $z = ut^n$, con $u \in U(D)$ e n che varia in $\mathbb{Z}$.
L'esponente n è detto **ordine di** z e si indica $n = ord(z)$; per convenzione si pone $ord(0) = \infty$. Dalla proposizione precedente segue immediatamente che $D = \{z \in K \,|\, ord(z) \geq 0\,\}$ e $M = \{z \in K \,|\, ord(z) > 0\,\}$ è il suo ideale massimale .

Definizione 5.1.2 *Sia K un campo. Una* **valutazione discreta su** K *è una funzione $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tale che :*
$(v1)$ $\quad v(x\,y) = v(x) + v(y), \quad \forall x, y \in K$
$(v2)$ $\quad v(x + y) \geq min(v(x), v(y))$
con la convenzione che $v(0) = \infty$.

Osservazione.
1.) L'insieme $R = \{x \in K \,|\, v(x) \geq 0\,\}$ è un DVR con ideale massimale $M = \{x \in K \,|\, v(x) > 0\,\}$ e con campo dei quozienti il campo K. Questa affermazione si verifica mostrando che : R è un anello locale, è noetheriano e M è principale (proposizione 5.1.1(i)).
• R è locale. Ricordando la caratterizzazione degli anelli locali basterà mostrare che M ={elementi non invertibili di R} è un ideale di R.
Ma da questa definizione di M si deduce immediatamente che :
$x \in M \Leftrightarrow x = 0$ oppure $x^{-1} \notin R$; inoltre, è vero che :
$-$ se $a \in R$ e $x \in M$, allora $ax \in M$ (altrimenti, $(ax)^{-1} \in R$ e dunque $x^{-1} = a(ax)^{-1} \in R$, in contraddizione con l'ipotesi che $x \in M$) .
$-$ Se x e y sono due elementi non nulli di M, allora o $xy^{-1} \in R$ oppure $x^{-1}y \in R$ (infatti, se già $xy^{-1} \in R$, non dobbiamo dimostrare niente perché abbiamo già una delle due condizioni; se, invece, $xy^{-1} \notin R$, allora $(x^{-1}y)^{-1} = xy^{-1} \notin R$ ma ciò equivale ad affermare che $x^{-1}y \in M \subset R$).
Ma $xy^{-1} \in R \Leftrightarrow x + y = (1 + xy^{-1})y \in RM \subset R$; e si procede in modo simile se $x^{-1}y \in R$.
Dunque M è un ideale di R e pertanto R è un anello locale.
• R è Noetheriano. Sia $N \neq (0)$ un ideale di R, esiste un minimo intero k tale che $v(x) = k$, per qualche $x \in N$. Ne segue che N contiene ogni elemento $y \in R$ che verifichi $v(y) \geq k$. Perciò gli unici ideali non banali di R sono della forma $I_k = \{y \in R \,|\, v(y) \geq k\}$ e posto $I_1 = M_{i(1)}$, $I_2 = M_{i(2)}$, $I_3 = M_{i(3)}$,...

avremo la catena di ideali :

$$M \supset M_{i(2)} \supset M_{i(3)} \supset ... \qquad (5.2)$$

dove $i(1) \geq i(2) \geq i(3) \geq ... \geq 1$ è una catena di disuguaglianze tra interi che da un certo punto in poi sono necessariamente uguali a 1, quindi la catena (5.2) è stazionaria e ciò dimostra che il dominio R è noetheriano.

• M è principale. Banalmente, v è suriettiva, perciò esiste sicuramente un elemento $x \in M$ tale che $v(x) = 1$. Questo implica che $M = (x)$, cioè è principale.

2.) Viceversa, se R è un DVR con campo dei quozienti K, allora si verifica immediatamente che la funzione $ord : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, per come è stata definita, è una valutazione discreta su K.

Queste due osservazioni riportate ci permettono di sostenere che dare un DVR con campo dei quozienti K è equivalente a definire una funzione di valutazione discreta su tale campo .

ESEMPI.

1. Sia $p \in Z$ un numero primo.

L'insieme $\{r \,:\, r = a/b, \; \text{con}\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } p \text{ non divide } b\}$ è un DVR con campo dei quozienti $\mathbb{Q}$.

2. Sia K un campo. L'anello delle serie di potenze formali su K, cioè l'insieme:

$$K[[X]] = \{\sum_{1=0}^{\infty} a_i X^i \,|\, a_i \in K\}$$

è un DVR con parametro uniformizzante X e con campo dei quozienti $K((X))$.

Riportiamo ora un risultato fondamentale per collegare questioni locali (in termini di anelli locali) con problemi di natura globale (in termini di anelli delle coordinate).

Proposizione 5.1.3 *Sia I un ideale in $K[X_1, ..., X_n]$ e $V(I) = \{P_1, ..., P_N\}$ un insieme finito. Posto $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{P_i}(\mathbf{A}^n(K))$, esiste un isomorfismo naturale di $K[X_1, ..., X_n]/I$ con $\prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$.* [**?**, II-prop.6].

Immediatamente è possibile verificare che :

Corollario 5.1.4 *Se $V(I) = \{P\}$, allora $K[X_1, ..., X_n]/I$ è isomorfo a $\mathcal{O}_P(\mathbf{A}^n(K))/I\mathcal{O}_P(\mathbf{A}^n(K))$.*

Siamo pronti per enunciare il teorema principale .

Teorema 5.1.5 *Sia $\mathcal{C} : f(X, Y) = 0$ una curva piana affine irriducibile, $P \in \mathcal{C}$. P è un punto semplice di $\mathcal{C}$ se e solo se $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un anello di valutazione discreta. In questo caso, se $l : aX + bY + c = 0$ è una retta per P che non è la tangente a $\mathcal{C}$ in P, allora l'immagine $\bar{l}$ di l in $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un parametro uniformizzante per $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$.*

Dimostrazione.
Eseguiamo un cambiamento di coordinate in $\mathbf{A}^2(K)$ che ci permetta di avere:
- P nell'origine del sistema di assi cartesiani considerato,
- l'asse $Y = 0$ coincidente con la tangente a $\mathcal{C}$ in P,
- $l = X$.

Per verificare che $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un DVR è sufficiente dimostrare che l'ideale massimale $M_P(\mathcal{C})$ è generato da $\overline{X}$ (proposizione 5.1.1).
Prima di tutto notiamo che $M_P(\mathcal{C}) = (\overline{X}, \overline{Y})$, indipendentemente dal fatto che P sia o no semplice per la curva (cfr.[**?**, ex.2.43, 2.44]). Assunto ciò , avremo che :

$$f = Y + \text{termini di grado più alto.}$$

Raggruppando i termini con Y, possiamo scrivere che :

$$f = Yg - X^2h$$

dove $g = 1 + \text{termini di grado più alto}$, e $h \in K[X]$.
Nell'anello delle coordinate $\Gamma(\mathcal{C})$ avremo l'elemento $\overline{y}\,\overline{g} = \overline{X}^2\,\overline{h}$, perciò
$\overline{y} = \overline{X}^2\,\overline{h}\,(\overline{g})^{-1} \in (\overline{X})$, dal momento che $\overline{g}(P) \neq 0$. Siamo giunti alla conclusione, perché abbiamo verificato che $M_P(\mathcal{C}) = (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{X})$.
L'implicazione inversa è una conseguenza immediata del prossimo teorema.

Teorema 5.1.6 *Se P un punto della curva piana affine irriducibile $\mathcal{C}$ di equazione $f(X, Y) = 0$, allora $m_P(\mathcal{C}) = \dim_K(M_P(\mathcal{C})^n/M_P(\mathcal{C})^{n+1})$, per ogni n sufficientemente grande . In particolare, la molteplicità di $\mathcal{C}$ in P dipende soltanto dall'anello locale $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$.*

Dimostrazione.
Scriviamo $\mathcal{O}$ e M per intendere, rispettivamente, $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ e $M_P(\mathcal{C})$.
La successione :

$$0 \to M^n/M^{n+1} \to \mathcal{O}/M^{n+1} \to \mathcal{O}/M^n \to 0$$

è esatta . Dalla proprietà fondamentale delle successioni esatte si deduce che per dimostrare il teorema è sufficiente provare che :

$$\dim_K(\mathcal{O}/M^n) = n\, m_P(\mathcal{C}) + s$$

per qualche costante s e per ogni $n \geq m_P(\mathcal{C})$.
Supponiamo , senza perdita di generalità , che $P = (0,0)$, così $M^n = I^n\mathcal{O}$, dove $I = (X,Y) \in K[X,Y]$ (cfr.[**?**, ex.2.43]).
Dal momento che $V(I^n) = \{P\}$ e (I^n, f) contiene I^n, per la 5.1.3 e il suo corollario 5.1.4 avremo che :

$$K[X,Y]/(I^n,f) \cong \mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2(K))/(I^n,f)\mathcal{O}_P(\mathbf{A}^2(K)) \cong \mathcal{O}_P(\mathcal{C})/I^n\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = \mathcal{O}/M^n$$

Così ci siamo ricondotti a calcolare la dimensione dello spazio quoziente $K[X,Y]/(I^n,f)$. Sia $m = m_P(\mathcal{C})$. Allora $fg \in I^n$ non appena $g \in I^{n-m}$.
Ovviamente c'è un naturale omomorfismo di anelli :

$$\phi : K[X,Y]/I^n \to K[X,Y]/(I^n, f)$$

e un'applicazione K-lineare :

$$\begin{aligned} \psi : K[X,Y]/I^{n-m} &\longrightarrow K[X,Y]/I^n \\ \overline{g} &\longmapsto \psi(\overline{g}) = \overline{fg} \end{aligned}$$

dove la barra indica il residuo. In modo molto semplice si verifica che la successione :

$$0 \to K[X,Y]/I^{n-m} \to K[X,Y]/I^n \to K[X,Y]/(I^n,f) \to 0$$

è esatta e che $\dim_K(K[X,Y]/I^n) = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Allora, utilizzando questa relazione e applicando la proprietà delle successioni esatte si ha :

$$\begin{aligned}
\dim_K(K[X,Y]/(I^n,f)) &= \dim_K(K[X,Y]/I^n) - \dim_K(K[X,Y]/I^{n-m}) = \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} = \\
&= nm - \frac{m(m-1)}{2}
\end{aligned}$$

per qualsiasi $n \geq m$, come volevasi dimostrare . $\Box$

NOTA. Utilizzando il teorema 5.1.6 avremo che se $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un DVR, allora $m_P(\mathcal{C}) = 1$, cioè P è semplice per $\mathcal{C}$; ciò completa la dimostrazione del Teorema 5.1.5. $\Box$

Osservazione.
Nel corso della dimostrazione del teorema 5.1.6 è stata introdotta la funzione $\chi(n) = \dim_K(\mathcal{O}/M^n)$.
$\chi(n)$ è un polinomio in n (per n grande) che gioca un ruolo importante nello studio della molteplicità degli anelli locali ed è noto con il nome di **Polinomio di Hilbert - Samuel** dell'anello locale $\mathcal{O}$.

Ora, mantenendo le notazioni e le convenzioni utilizzate nel caso affine, consideriamo la curva piana proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$.
Sia $P \in U_i$, $i = 0, 1, 2$. Se F_* è il polinomio deomogenizzato di F rispetto a X_i, cioè F_* è il polinomio che si ottiene ponendo $X_i = 1$ in $F(X_0, X_1, X_2)$, la **molteplicità di** F **in** P si definisce come la molteplicità di F_* in P, quindi $m_P(F) = m_P(F_*)$.
Tale molteplicità è indipendente dalla scelta di U_i e invariante per un cambio di coordinate proiettivo (teorema 5.1.6). Dunque, per le curve proiettive possiamo enunciare teoremi analoghi ai teoremi 5.1.5 e 5.1.6 .
In particolare, il risultato più interessante resta sempre la caratterizzazione dei punti semplici :
" P è un punto semplice per la curva piana proiettiva irriducibile $\mathcal{C}$ se e solo se l'anello locale $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$ è un DVR ".

5.2 I rami analitici

Nel corso di questo secondo paragrafo ci proponiamo di proseguire lo studio locale di una curva piana irriducibile $\mathcal{C} : f(X, Y) = 0$ nell'intorno di un suo punto singolare O analizzando, però, f non come polinomio ma come elemento dell'anello delle serie formali $K[[X, Y]]$, e, in particolare, considerando localmente non più l'anello locale $\mathcal{O}_O(\mathcal{C})$ ma il suo completamento $\widehat{\mathcal{O}}_O(\mathcal{C})$ rispetto all'ideale massimale, cioè l'anello quoziente $K[[X, Y]]/(f)$.

Se $K = \mathbb{C}$ è possibile dare la seguente definizione :

Definizione 5.2.1 *Sia f un elemento dell'anello $\mathbb{C}[[X, Y]]$ che soddisfi le due proprietà :*
(a) f definisce una serie convergente in un intorno dell'origine del piano affine complesso .
(b) f è irriducibile in $\mathbb{C}[[X, Y]]$.
Si dice che l'equazione $f(X, Y) = 0$ definisce un **ramo analitico** *complesso $\mathcal{C}$ (o un germe di curva analitica piana irriducibile $\mathcal{C}$).*

Nel caso generale in cui K è un arbitrario campo algebricamente chiuso, non ha più senso parlare di convergenza di un elemento $f \in K[[X, Y]]$.
In tal caso si procede nel modo seguente.

Definizione 5.2.2 *Una* **parametrizzazione astratta** *in $K[[t]] \times K[[t]]$ è una coppia $(x(t), y(t))$, con $x(t), y(t) \in K[[t]]$ e con almeno uno dei due elementi di questa coppia non costante . La coppia $(x(0), y(0))$ si chiama* **centro della parametrizzazione** *.*

Definizione 5.2.3 *Una parametrizzazione astratta $(x(t), y(t))$ si dice* **irriducibile** *se il più grande divisore comune a tutti gli esponenti delle due serie $x(t)$ e $y(t)$ è pari a 1 . Se, invece, esiste almeno un divisore comune strettamente maggiore di 1 la parametrizzazione si dice* **riducibile** *.*

Non è restrittivo considerare solo parametrizzazioni irriducibili perché se $(x(t), y(t))$ è riducibile possiamo sempre pensare di dividere tutti gli esponenti delle due serie per il loro MCD così da ottenere l'irriducibilità della parametrizzazione .

Nell'insieme delle parametrizzazioni irriducibili introduciamo la seguente definizione :

Definizione 5.2.4 *Due coppie di parametrizzazioni astratte irriducibili* $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ *si dicono* **equivalenti** *se esiste un automorfismo:*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : K[[t]] & \longrightarrow & K[[t]] \\ t & \longmapsto & \sigma(t) = c_1 t + c_2 t^2 + ... \end{array}$$

tale che : $(x_2(t), y_2(t)) = (x_1(\sigma(t)), y_1(\sigma(t)))$.

La relazione introdotta si verifica facilmente essere di equivalenza .

Definizione 5.2.5 *Un* **ramo analitico** *è una classe di equivalenza di parametrizzazioni astratte irriducibili . Il* **centro** *di un ramo analitico è il centro di ogni rappresentante del ramo .*

Per semplicità useremo sempre l'espressione ″il ramo analitico $(x(t), y(t))$″ invece di dire ″il ramo analitico avente $(x(t), y(t))$ come rappresentante″ .

Osservazione.
Ad un occhio attento non sarà certamente sfuggito il collegamento tra le definizioni appena riportate e quelle introdotte nel corso del capitolo 2, che valevano in $K = \mathbb{C}$.
Infatti, nel caso $K = \mathbb{C}$ un caso particolare di ramo analitico è un **posto** avente centro in (a, b), con $a \neq \infty \neq b$, mentre un caso particolare di parametrizzazione astratta è una **parametrizzazione di Puiseux**.

D'ora in avanti riporteremo una serie di ragionamenti che mostreranno come per un qualsiasi elemento irriducibile e non invertibile F dell'anello $K[[X, Y]]$ esista un unico ramo analitico $(x(t), y(t))$ tale che $F(x(t), y(t)) = 0$ e che se F_1 e F_2 sono entrambi elementi irriducibili non invertibili di $K[[X, Y]]$ tali che $F_i(x(t), y(t)) = 0$ $(i = 1, 2)$, per un certo ramo $(x(t), y(t))$, allora F_1 e F_2 sono associati , cioè esiste u invertibile in $K[[X, Y]]$ tale che $F_1 = u\, F_2$. Per il momento consideriamo alcuni risultati preziosi per la nostra trattazione.

Teorema 5.2.6 (**di preparazione di Weierstrass**)
Se $P(X_1, ..., X_n) \in K[[X_1, ..., X_n]]$ *e* $P(0, ..., 0, X_n) = c_\nu X_n^\nu + c_{\nu+1} X_n^{\nu+1} + ...$, *con* $c_\nu \neq 0$, *allora esiste un unico elemento invertibile* E *in* $K[[X_1, ..., X_n]]$ *tale che :*

$$EP = X_n^\nu + A_1(X_1, ..., X_{n-1}) X_n^{\nu-1} + ... + A_\nu(X_1, ..., X_{n-1}) \tag{5.3}$$

con $A_i(X_1, ..., X_{n-1}) \in K[[X_1, ..., X_{n-1}]]$ *e* $A_i(0, ..., 0) = 0$ $(i = 1, ..., \nu)$.

Un elemento di $K[[X_1, ..., X_n]]$ avente un termine nella sola X_n , come per esempio l'elemento P che compare nel teorema di Weierstrass, si dice **regolare in** X_n. Un polinomio avente una rappresentazione tipo quella che compare nella parte destra della (5.3) è detto **speciale**.
Il teorema di Weierstrass è una conseguenza immediata del seguente risultato più generale :

Teorema 5.2.7 (**Formula di Weierstrass**)
Se $Q, P \in K[[X_1, ..., X_n]]$ *e* P *è regolare in* X_n, *con*

$$P(0, ..., 0, X_n) = c_\nu X_n^\nu + c_{\nu+1} X_n^{\nu+1} + ..., \quad c_\nu \neq 0$$

allora esistono unici A *e* B *in* $K[[X_1, ..., X_n]]$ *tali che :*

$$Q - AP = B \tag{5.4}$$

dove B *non possiede potenze di* X_n *di grado* $\geq \nu$.

Dimostrazione (Teorema di preparazione di Weierstrass).
Basta utilizzare la formula (5.3) con $Q = {X_n}^\nu$. Allora A deve essere invertibile in $K[[X_1, ..., X_n]]$, altrimenti il termine X_n^ν che compare nella parte sinistra della (5.3) non si può annullare. $\square$

Dimostrazione (Formula di Weierstrass).
La dimostrazione si esegue per induzione sul numero delle variabili $n \geq 1$. Se $n = 1$ l'uguaglianza è banalmente verificata .
Supponiamo allora $n > 1$. Se q_i, a_i, p_i, b_i sono i coefficienti di X_1^i, allora la (5.4) è equivalente al sistema infinito di uguaglianze :

$q_0 - a_0p_0 = b_0$
$q_1 - a_0p_1 - a_1p_0 = b_1$
$\vdots$
$q_i - a_0p_i - ... - a_{i-1}p_1 - a_ip_0 = b_i$
$\vdots$

Su $p_0(X_2, ..., X_n)$ abbiamo le stesse ipotesi introdotte per P e quindi $p_0(0, ..., 0, X_n) = c_\nu {X_n}^\nu + ...$, mentre quelle su b_i coincidono con quelle considerate per B. Per induzione su n , i coefficienti a_i e b_i esistono e sono univocamente determinati, ne segue che lo stesso può essere detto di A e B e la nostra dimostrazione termina. □

Corollario 5.2.8 *Se $P(X_1, ..., X_n) \in K[[X_1, ..., X_n]]$ con*

$$P(0, ..., 0, X_n) = c_\nu X_n^\nu + c_{\nu+1}X_n^{\nu+1} + ..., \quad c_\nu \neq 0$$

e se $A'P$ è un elemento di $K[[X_1, ..., X_{n-1}]][X_n]$ di grado $< \nu$, A' in $K[[X_1, ..., X_n]]$, si ha che $A' = 0$.

Dimostrazione.
Poniamo nella (5.4) $Q = 0$, così si ha : $0 - A'P = B'$ e $0 - 0 \cdot P = 0$, allora, per l'unicità degli elementi A e B che compaiono nella (5.4) , $A' = 0$. □

Corollario 5.2.9 *Se P è un polinomio speciale in $K[[X_1, ..., X_n]]$ di grado ν e $A'P = B' \in K[[X_1, ..., X_{n-1}]][X_n]$ è anch'esso di grado ν, allora A' appartiene a $K[[X_1, ..., X_{n-1}]]$.*

Dimostrazione.
Sia $B' = C{X_n}^\nu + ...,$ con $C \in K[[X_1, ..., X_{n-1}]]$, allora $C{X_n}^\nu - A'P = C{X_n}^\nu - B'$ è di grado $< \nu$. Se poniamo $Q = C{X_n}^\nu$ abbiamo che l'uguaglianza $Q - AP = B$ è soddisfatta da $A = A'$ e $B = C{X_n}^\nu - B'$ e anche da $A = C$ e $B = Q - CP$. Per l'unicità di A e B in (5.4) si ha $A' = C$. □

Proposizione 5.2.10 *Se F è speciale in X_n e irriducibile in $K[[X_1, ..., X_n]]$, allora è irriducibile in $K[[X_1, ..., X_{n-1}]][X_n]$.*

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $F = G_1G_2$, con $\mathrm{gr_{X_n}(G_i)} < \mathrm{gr_{X_n}(F)}$ $(i = 1, 2)$.

Ricordando l'ipotesi di irriducibilità di F, uno dei G_i deve essere invertibile in $K[[X_1, ..., X_n]]$, supponiamo che G_1 lo sia.
Allora si potrà scrivere $G_2 = {G_1}^{-1}F$ e, per il Corollario 5.2.8 , G_2 sarebbe nullo in contraddizione con le ipotesi fatte. $\square$

Concludiamo questa parte di prerequisiti fondamentali per sviluppare la teoria dei rami analitici osservando quanto segue.
Ricorriamo al seguente risultato della teoria delle curve piane :

Proposizione 5.2.11 *Sia $f(X,Y) = 0$, $f \in K[X,Y]$ l'equazione di una curva avente nell'origine O un punto semplice con tangente in O non verticale. Esiste un'unica serie di potenze $c_1X + c_2X^2 + ...$ tale che :*

$$f(X, c_1X + c_2X^2 + ...) = 0$$

Dimostrazione.
La proposizione è una conseguenza immediata del teorema delle funzioni implicite . $\square$

La proposizione 5.2.11 ci permette di dire che se consideriamo una curva di equazione $f(X,Y) = 0$ avente un punto semplice in $(0,0)$ con tangente non verticale, allora $f(X,Y)$ ha in $K[[X]][Y]$ un fattore $Y = c_1X + c_2X^2 + ...$.
Allo stesso modo, se $f(X,Y) = 0$ ha un punto semplice in $(0,b)$ con tangente non verticale, f ha un fattore della forma $Y - b - d_1X - d_2X^2 - ...$.
Così se $f = 0$ interseca l'asse Y in almeno due punti semplici con tangenti non verticali, allora f avrà almeno due fattori in $K[[X]][Y]$.
Si verifica facilmente che la situazione appena descritta non dipende dalle particolari ipotesi considerate, quindi si ottiene che :

Proposizione 5.2.12 (**Lemma di Hensel**)
Sia $f(X,Y) \in K[[X]][Y]$ monico di grado n in Y tale che $f(0,Y)$ abbia almeno due radici. Allora $f(X,Y)$ è riducibile in $K[[X]][Y]$. Inoltre, se esistono $g_0(Y)$ e $h_0(Y)$ primi tra loro e di grado, rispettivamente, r e $n-r$ tali che $f(0,Y) = g_0(Y)h_0(Y)$, si ha che:

$$f = g(X,Y)h(X,Y)$$

con $g, h \in K[[X]][Y]$ di grado r e $n-r$ in Y e con $g(0,Y) = g_0(Y)$ e $h(0,Y) = h_0(Y)$. [**?**, 21.6].

A questo punto introduciamo una definizione che generalizza quella di curva algebrica piana .

Definizione 5.2.13 *Due serie formali F e G dell'anello $K[[X,Y]]$ si dicono* **proporzionali** *se esiste $\lambda \in K^*$ tale che $G = \lambda F$.*

È evidente che la proporzionalità è una relazione di equivalenza in $K[[X,Y]]$. Diremo che :

Definizione 5.2.14 *Una* **curva analitica** *è una classe di proporzionalità di serie formali non invertibili di $K[[X,Y]]$.*
Se F è un rappresentante della curva, l'equazione $F = 0$ è chiamata **equazione della curva analitica**. *L'ordine di F si dice* **ordine della curva**. *La curva si dice* **irriducible** (rispettivamente **riducibile**) *se F è irriducibile* (rispettivamente irriducibile).

Anche nel caso delle curve analitiche si introducono i concetti di molteplicità e di tangenti principali .

Definizione 5.2.15 *Sia $\Gamma : F = 0$ una curva analitica .*
Se $F = F_r + F_{r+1} + ...,\ F_r \neq 0$ è la decomposizione di F nella somma di polinomi omogenei, diremo che $(0,0)$ è un punto **r-plo**. *In particolare, se $r = 1$ allora $(0,0)$ sarà detto* **semplice**.
Infine, diremo che i fattori di F_r definiscono le **tangenti principali** *alla curva Γ in $(0,0)$.*

Da queste definizioni si deduce immediatamente che se $F \in K[[X]][Y]$ è monico e irriducibile, allora per il Lemma di Hensel $F(0,Y)$ ha solamente una radice, m, ed F non è proporzionale ad X. Se $m = 0$, allora F è speciale; altrimenti , si può considerare la trasformazione :

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y - m \end{cases}$$

e rispetto a queste nuove variabili F diventa speciale . Quindi ogni curva analitica irriducibile distinta da $X = 0$ è rappresentata da un elemento monico ed irriducibile di $K[[X]][Y]$.

NOTA. Tutte le nozioni riportate nel corso delle 5.2.14 e 5.2.15 sono indipendenti dalla scelta delle coordinate, cioè sono invarianti rispetto a trasformazioni della forma :

$$\begin{cases} X = aX' + bY' \\ Y = cX' + dY' \end{cases} \tag{5.5}$$

con $ad - bc \neq 0$.

Teorema 5.2.16 *Sia* $\Gamma : F = 0$ *una curva analitica irriducibile di ordine* 1 *con centro in* $(0,0)$. *Esiste un unico ramo analitico* $(x(t), y(t))$ *centrato in* $(0,0)$ *tale che :* $F(x(t), y(t)) = 0$.

NOTA. Diremo che un ramo analitico è un **ramo della curva analitica** $\Gamma : F = 0$ se ogni rappresentante $(x(t), y(t))$ del ramo è tale che $F(x(t), y(t)) = 0$.

Dimostrazione.
Per la proposizione 5.2.11 esiste una serie di potenze $c_1X + c_2X^2 + ...$ tale che :

$$F(X, c_1X + c_2X^2 + ...) = 0 \tag{5.6}$$

Allora ponendo

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = c_1t + c_2t^2 + ... \end{cases}$$

otteniamo un ramo di Γ centrato nell'origine .
Verifichiamo che tale ramo $(x(t), y(t))$ è unico . Dal momento che vale la (5.6), allora in $K[[X]][Y]$ si può scrivere che :

$$F(X, Y) = Y - c_1X + c_2X^2 + ...$$

Perciò l'espressione (5.6) in $K[[t]]$ si riscrive :

$$F(x(t), y(t)) = y(t) - c_1x(t) - c_2x(t)^2 - ... = 0$$

e quindi $y(t) = c_1x(t) + c_2x(t)^2 + ...$. Ma $x(t)$ deve essere di ordine 1 altrimenti $(x(t), y(t))$ non sarebbe irriducibile, ne segue che la sostituzione $\sigma : t \mapsto \sigma(t) = c_1x(t) + c_2x(t)^2 + ...$ è una sostituzione di ordine 1, cioè σ

è un automorfismo di $K[[t]]$ in $K[[t]]$. Chiaramente anche σ^{-1} è un automorfismo, allora manderà la coppia $(x(t), y(t))$ in $(t, c_1 t + c_2 t^2 + ...)$, che è proprio il ramo analitico considerato all'inizio della dimostrazione. Abbiamo così dimostrato che $(t, c_1 t + c_2 t^2 + ...)$ è l'unico ramo di Γ centrato in $(0,0)$. $\square$

Questo teorema considera solo un caso particolare della situazione che ci interessa illustrare ; infatti arriveremo a dimostrare che :

Teorema 5.2.17 *Una curva analitica irriducibile* $\Gamma : F = 0$ *ha un unico ramo con centro in* $(0,0)$ *.*

Daremo la dimostrazione di questo teorema più avanti, prima sono necessari alcuni risultati che andiamo subito ad esporre.

Definizione 5.2.18 *Se* $\gamma : (x(t), y(t))$ *è un ramo di centro* P *e* $\Gamma : F = 0$ *è una curva analitica si definisce* **molteplicità di intersezione** *tra* Γ *e* γ *l'intero* $i_P(\Gamma \cap \gamma)$ *tale che :*

$$i_P(\Gamma \cap \gamma) = \mathrm{ord}_t F(x(t), y(t))$$

Definizione 5.2.19 *Sia* $\gamma : (x(t), y(t))$ *un ramo di centro* P*. Si dice che* $(x(t), y(t))$ *ha* **molteplicità** r *in* P *se* r *è il minimo delle intersezioni di* γ *con una qualsiasi retta per* P*, cioè :*

$$r = \min_l i_P(\gamma \cap l)$$

NOTA. Se la molteplicità è 1 il ramo si dice **lineare**.

Teorema 5.2.20 *Due curve analitiche irriducibili distinte* $\Gamma : F = 0$ *e* $\Delta : G = 0$ *non possono avere un ramo in comune.*

Dimostrazione.
A meno di applicare una trasformazione della forma (5.5), possiamo supporre che F e G siano regolari in Y, e dunque, per il teorema di preparazione di Weierstrass, che siano speciali. La Proposizione 5.2.10 ci permette di affermare che F e G restano irriducibili in $K[[X]][Y]$; sono irriducibili anche in $K((X))[Y]$ [**?**, lemma 8.3]. Inoltre, per ipotesi, F e G non sono associati in $K[[X,Y]$, perciò non lo sono né in $K[[X]][Y]$ né in $K((X))[Y]$, cioè il loro massimo comun divisore in $K((X))[Y]$ è pari a 1 e si avrà che :

$$1 = aF_1 + bF_2 \qquad a, b \in K((X))[Y].$$

Dopo aver eliminato eventuali denominatori l'identità diventa :

$$X^{\alpha} = AF + BG \qquad A, B \in K[[X]][Y] \tag{5.7}$$

per quale intero α. A questo punto se le due curve avessero un ramo in comune $(x(t), y(t))$, sostituendo nell'equazione (5.7), si avrebbe $x(t)^{\alpha} = 0$ e $x(t) = 0$. Essendo F speciale si avrebbe anche che $y(t) = 0$ in contraddizione con la definizione di ramo analitico . □

Si ha immediatamente che :

Corollario 5.2.21 *Se $(x(t), y(t))$ è un ramo analitico e $x(t) = 0$, allora l'unica curva analitica irriducibile che abbia $(x(t), y(t))$ come ramo analitico è $X = 0$.*

Teorema 5.2.22 *Un punto r-plo con tangenti distinte in $(0, 0)$ possiede esattamente r rami analitici lineari centrati in $(0, 0)$.*

Dimostrazione.[**?**, 12.13]

Consideriamo ora una curva analitica Γ di ordine r $(r > 1)$ e verifichiamo se esistono rami analitici della curva centrati in $(0, 0)$.
Per analizzare la situazione introduciamo trasformazioni della forma :

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y/X \end{cases} \tag{5.8}$$

che sono chiamate **trasformazioni localmente quadratiche** ; il punto $(0, 0)$ è detto **centro** della trasformazione (5.8).
Per semplicità definiamo la trasformata solo per quelle curve che non abbiano come tangente principale $X = 0$.
Sia $\Gamma : F = 0$, con F speciale. La **trasformata** di Γ attraverso la (5.8) sarà la curva analitica Γ' definita dall'equazione : $F(X, XY')/X^r = 0$. Tra Γ e Γ' sussiste la relazione descritta nel prossimo risultato che ci limitiamo ad enunciare :

Proposizione 5.2.23 *Se $\Gamma : F = 0$ è una curva analitica irriducibile centrata in $(0, 0)$ e diversa da $X = 0$, allora la sua trasformata $\Gamma' : F' = 0$ è irriducibile.*

Dimostrazione.
Per ipotesi F è irriducibile e distinta da X, quindi in particolare F non è divisibile per X. Vogliamo provare che anche $F^{'}$ è irriducibile (in $K[X, Y']$). Innanzittutto osserviamo che $F^{'}(X, Y^{'})$ non è divisibile per un polinomio non costante $h(X)$: infatti se così fosse, ponendo $Y^{'} = Y/X$ e moltiplicando per una potenza di X, si avrebbe che $X^{\rho}F(X, Y)$ è divisibile per $h(X)$ in $K[X, Y]$. Allora $h(X) = cX^{\sigma}$, con $c \in K$, ma $F^{'}(X, Y^{'})$ non è divisibile per X quindi si arriverebbe ad avere $\sigma = 0$, in contraddizione con la scelta di $h(X)$ non costante.
Se a questo punto supponiamo che $F^{'}(X, Y^{'})$ sia riducibile, allora esistono due fattori di grado positivo in $Y^{'}$ per $F^{'}(X, Y^{'})$. Sostituendo $Y^{'}$ con Y/X e moltiplicando per una potenza di X, si trova che $X^{\rho}F(X, Y)$ ha due fattori di grado positivo in Y ma questo è impossibile. $\square$

Finalmente dimostriamo il Teorema 5.2.17 .
Dimostrazione (Teorema 5.2.17)
Sia $(0, 0)$ r-plo per Γ .
Se $r = 1$ siamo nelle ipotesi del Teorema 5.2.16 perciò non abbiamo nulla da verificare. Se, invece, $r > 1$ procediamo nel modo seguente .
Sia $F = F_r + F_{r+1} + ...$, $F_r \neq 0$. A meno di ricorrere ad una trasformazione della forma (5.5), possiamo assumere che $F_r \not\equiv 0 \ (X)$, e allora grazie al Teorema di Weierstrass abbiamo che :

$$Y^r + a_1(X)Y^{r-1} + ... + a_r(X) = 0$$

è l'equazione speciale per Γ . Applichiamo la trasformazione (5.8) e così otteniamo per $\Gamma^{'}$ l'equazione :

$$F^{'}(X, Y^{'}) = F(X, XY^{'})/X^r = 0$$

Γ è irriducibile, perciò anche $\Gamma^{'}$ è irriducibile. Per il Lemma di Hensel, $F^{'}(0, Y^{'})$ ha un'unica radice m_1 e, dopo la traslazione :

$$\begin{cases} \widetilde{X} = X \\ \widetilde{Y} = Y' - m_1 \end{cases}$$

possiamo considerare $m_1 = 0$; ne segue che :

$$F^{'}(X, Y^{'}) = {Y^{'}}^{r} + b_1(X){Y^{'}}^{r-1} + ...$$

Se si verifica una riduzione di r la dimostrazione procede per induzione su r. Se, invece, la potenza più alta con cui $Y^{'}$ compare in $F^{'}(X, Y')$ è ancora r, applichiamo una nuova trasformazione (5.8), osservando che, in questo caso, non c'è bisogno di eseguire trasformazioni preliminari (eccetto eventuali traslazioni) dal momento che $F^{'}$ è già speciale e $\Gamma^{'}$ non ha l'asse $X = 0$ tra le sue tangenti principali (perché c'è sempre il termine $Y^{'r}$) . Così si ottiene la curva di equazione $F^{''}(X, Y^{''})$, anch'essa irriducibile . Se m_2 è l'unica radice che per il Lemma di Hensel la curva $F^{''}(0, Y^{''}) = 0$ può avere, allora, a meno di una traslazione rispetto al punto $(0, m_2)$, l'espressione di $F^{''}(X, Y^{''})$ sarà $F^{''}(X, Y^{''}) = Y^{''r} + c_1(X)Y^{''r-1} + ...$
Se anche in questo caso non si verifica una riduzione di r siamo sempre nelle condizioni giuste per applicare direttamente la trasformata (5.8) .
Per concludere la dimostrazione dobbiamo far vedere che questa successione di traslazioni e di trasformazioni localmente quadratiche utilizzate non può produrre una successione infinita di punti r-pli tutti con $r > 1$, cioè che dopo un numero finito di passi si giunge necessariamente ad una riduzione di r.
Se supponiamo per assurdo che le trasformazioni quadratiche localmente considerate non producano una riduzione di r, potremmo scrivere $F(X, Y)$ nella forma :

$$F(X,Y) = \sum_{b>0} c_{ab} X^a (Y - m_1 X - m_2 X^2 - ... - m_i X^i)^b + X^{h_i} P_i(X) \quad (5.9)$$

dove $c_{ab} \in K$, $P_i \in K[X]$, $P_i(0) \neq 0$ (può essere fatto in un unico modo). Allora $(a + b) \geq 0$ perché, considerando $Y_1 = Y - m_1 X$ in F, il termine in cui $(a + b)$ è minimale e che non può essere cancellato dagli altri termini è $X^a Y_1^b$, in più $(0, 0)$ è r-plo per $F(X, Y_1 - m_1 X) = 0$, perciò $(a + b) \geq r$.
In modo analogo si fa vedere che $h_i \geq r$.
Allora l'espressione per $F^{'}$ simile alla (5.9) sarà :

$$F^{'}(X,Y^{'}) = \sum_{b>0} c_{ab} X^{a+b-r} (Y^{'} - m_1 - m_2 X - ... - m_i X^{i-1})^b + X^{h_i - r} P_i(X)$$

cioè $h_i(F) = h_{i-1}(F) + r$. Ripetendo tutto il discorso, con la trasformata $F^{''}$ si avrà : $h_i(F) = h_{i-2}(F^{''}) + 2r$; così si determina che $h_i(F) \geq ir$, e quindi $h_i \longrightarrow \infty$ per $i \longrightarrow \infty$.
Allora $F(X, m_1 X + m_2 X^2 + ...) = 0$ e sostituendo $Y = \sum_{i=1}^{\infty} m_i X^i$ nella (5.9) si trova che $\mathrm{ord_x F(X, m_1 X + m_2 X^2 + ...)} \geq \mathrm{min\{i + 1, h_i\}}$, per ogni i.
Dunque $\mathrm{ordF(X, m_1 X + ...)} = \infty$, $F(X, m_1 X + ...) = 0$ e

$$F(X, Y) = (Y - m_1 X - m_2 X^2 - ...)\, G(X, Y)$$

con $G(X,Y) \in K[[X]][Y]$.
Ma F è stato scelto irriducibile e monico, perciò si ha che :

$$F(X,Y) = Y - m_1X - m_2X^2 - ...$$

da cui $r = 1$. $\square$

Concludiamo il nostro studio sulle singolarità applicando direttamente quanto affermato nel teorema 5.2.17.
Sia $\Gamma : F(X,Y) = 0$ una curva algebrica irriducibile con singolarità in $(0,0)$ e $F = F_1^{r_1}...F_s^{r_s}$ la decomposizione di F in componenti irriducibili in $K[[X,Y]]$, con $\Gamma_i : F_i^{r_i} = 0$.
Per ciascuna delle curve analitiche irriducibili Γ_i esiste un unico ramo analitico $(x(t), y(t))$ di molteplicità $\nu_i \geq 1$ in $(0,0)$ tale che si abbia identicamente $F_i(x(t), y(t)) = 0$.
Quindi, la curva algebrica Γ con un punto r-plo in $(0,0)$ avrà esattamente r rami analitici $(x_1(t), y_1(t))$,...,$(x_s(t), y_1(s))$ di molteplicità ν_i in $(0,0)$ tali che $\nu_1 + ... + \nu_s = r$ e ciascuno di questi rami darà luogo ad una parametrizzazione astratta irriducibile della curva in $(0,0)$. Quanto affermato non è che una generalizzazione del teorema di Puiseux per un campo K qualsiasi.

Bibliografia

[AM] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald:*Introduzione all'algebra commutativa*, Feltrinelli, Milano 1980.

[CHI] O. Chisini: *Un modello per le singolarità delle curve algebriche piane*, Memorie e note di geometria, p. 535-538.

[EC] F. Enriques, O. Chisini: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche 1*, Libro IV, Zanichelli, Bologna 1985.

[FUL] W. Fulton: *Algebraic Curves*, Benjamin, Reading (Massachussets) 1969.

[PRO] C. Procesi: *Elementi di teoria degli anelli*, Zanichelli, Bologna, 1990, pagg.30-31.

[SEI] A. Seidenberg: *Elements of the Theory of Algebraic Curves*, Addison Wesley, Reading (Massachussets) 1968.

[SER1] E. Sernesi: *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino 1989.

[SER2] E. Sernesi: *Appunti del corso di Istituzioni di Geometria superiore 1989-1990*, Cap. V.

[SHA] I. R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer Verlag, Berlin Heindeberg, 1977.

[WAL] R. J. Walker: *Algebraic Curves*, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1950.