Modelli Evolutivi per la Struttura a Termine dei Tassi di Interesse

Sintesi della tesi di laurea di
Alexia Gerace

Professore Relatore: Massimo Bernaschi

Professore Co-relatore: Fabio Martinelli

In questi ultimi anni, il mercato finanziario ha puntato i riflettori sui modelli evolutivi per descrivere il comportamento dei tassi d'interesse. Le motivazioni principali sono riuscire a prezzare i derivati su tassi d'interesse (interest rate derivatives), strumenti il cui valore dipende dal livello dei tassi d'interesse e sviluppare tecniche di copertura del rischio (hedging).
Un evidente problema è capire quanto le previsioni fornite da questi modelli riflettano realisticamente l'andamento dei tassi d'interesse.

Data l'incertezza sul valore che possono assumere i tassi d'interesse nel futuro, si cerca di modellizzare il loro comportamento ricorrendo a processi stocastici. Viene abbandonata l'idea di avere dei modelli completamente deterministici. Da un punto di vista matematico, vengono utilizzate equazioni differenziali stocastiche del tipo

$$dr(t) = \alpha(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dB_t \tag{1}$$

Queste equazioni sono caratterizzate dal coefficiente di "drift" α, correlato con il tempo, dal processo stocastico del moto Browniano B_t e dal coefficiente di diffusione σ, ossia la volatilità. Quest'ultimo descrive intuitivamente l'ampiezza del fattore rischio del tasso d'interesse.

Ogni modello è associato ad una specifica equazione differenziale stocastica (forma funzionale di α e σ), la cui forma determina il modello stesso. Per molto tempo si è lavorato con modelli semplici, ad un fattore, come il modello Ho-Lee, Cox, Ingersoll e Ross (CIR) o Vasicek per poi utilizzare modelli a due o più fattori. Questi modelli hanno però dimostrato di avere diverse limitazioni e molte delle esigenze presenti sul mercato non venivano rispettate.

L'interesse si è allora spostato su modelli più sofisticati, per esempio il modello Heath-Jarrow-Morton (HJM). Si tratta di un approccio diverso in quanto si considera l'intera curva dei tassi d'interesse come una variabile di stato.

Inoltre, la particolarità di questo modello risiede nel descrivere la struttura a termine dei tassi d'interesse utilizzando i tassi "forward" [1], per i quali si costruisce un modello stocastico. Il tasso d'interesse forward risolve un'equazione differenziale stocastica

$$df(t,T) = \alpha(t,T,f(t,T))dt + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(t,T,f(t,T))dB_i(t) \tag{2}$$

(qui le B_i rappresentano N moti browniani indipendenti).

L'equazione è caratterizzata da un'importante relazione, quella tra il drift e la volatilità.

$$\alpha(t,T,f(t,T)) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(t,T,f(t,T)) \int_t^T \sigma_i(t,u,f(t,u))du \tag{3}$$

Da questa, si può trarre come conclusione che è sufficiente conoscere la legge del processo della volatilità del tasso forward per il calcolo di tutti i prezzi.

Questi modelli, per la maggioranza, sono stati applicati ai mercati finanziari americani mentre il caso italiano è stato poco esplorato.

Il nostro scopo invece è quello di utilizzare i dati forniti dal Ministero del Tesoro e capire come e quanto il modello HJM sia adatto a descrivere le dinamiche del nostro mercato dei Titoli di Stato.

Nella pratica, il modello va calibrato basandoci sulla stima del comportamento della struttura a termine iniziale, a scopo di riprodurre i dati forniti

[1] il tasso d'interesse forward $f(t,T)$, per $t \leq T$, rappresenta il tasso d'interesse istantaneo a tempo T come 'anticipato' dal mercato al tempo t

dal passato. Tipicamente, si assume una specifica forma del modello e si scelgono dei parametri capaci di stimare i dati storici, ossia uguagliare i prezzi del mercato osservati. Poiché nel caso specifico del modello HJM, con la struttura a termine iniziale dei tassi forward e le funzioni volatilità del tasso forward si determina il valore del drift, diventa cruciale definire le funzioni volatilità. Esistono diverse possibilità, noi abbiamo scelto un modello gaussiano, tramite il quale siamo in grado di poter descrivere la volatilità come una funzione analitica, indipendente dai tassi forward.

Per determinare la volatilità partendo dai dati storici siamo ricorsi ad un metodo di calibrazione noto come analisi delle componenti principali (PCA). È una tecnica di analisi statistica di tipo descrittivo, finalizzata alla trasformazione di un insieme di dati. Viene usata per minimizzare la ridondanza delle informazioni riducendo la dimensione dei dati. Nel nostro caso si tengono in considerazioni tre soli fattori forniti dalla PCA che determinano la volatilità pressochè totale dei tassi d'interesse. Successivamente, si definisce la funzione analitica che meglio può approssimare le volatilità, ciò avviene basandoci sui dati reali e minimizzando l'errore di stima.

Otteniamo così un'equazione del modello HJM discretizzata con la seguente forma:

$$\Delta f(t,T) = \alpha(t,T)\Delta t + \sum_{i=1}^{3} \bar{\sigma}_i(t,T)\Delta B_i(t) \tag{4}$$

Prima di implementare il modello, valutiamolo e calibriamolo sui dati osservati.

Nella valutazione del modello, verifichiamo con esito positivo che la funzione analitica riesca ad approssimare in modo corretto la volatilità.

In seguito, ci interessiamo al moto browniano presente nell'equazione (4). Una volta calcolati i parametri del modello, possiamo avere varie previsioni dovute a k estrazioni casuali del moto browniano. Otteniamo così k scenari diversi e per un tasso d'interesse fissato T, le equazioni del modello HJM che vengono implementate, ovviamente in un tempo discreto, sono:

$$\begin{aligned} \Delta f_1(t,T) &= \alpha(t,T)\Delta t + \bar{\sigma_1}(t,T)\Delta B_{11}(t) + \bar{\sigma_2}(t,T)\Delta B_{12}(t) + \bar{\sigma_3}(t,T)\Delta B_{13}(t) \\ &\vdots \\ \Delta f_k(t,T) &= \alpha(t,T)\Delta t + \bar{\sigma_1}(t,T)\Delta B_{k1}(t) + \bar{\sigma_2}(t,T)\Delta B_{k2}(t) + \bar{\sigma_3}(t,T)\Delta B_{k3}(t) \end{aligned}$$

Abbiamo valutato che il numero k di scenari più ragionevole è di 150.

Successivamente, calibriamo il modello su un numero di giorni che permette di ottenere i valori più bassi della volatilità del tasso forward previsto dall'HJM. Tale volatilità è calcolata sulla media dei k scenari implementati per ogni previsione giornaliera.

Valutiamo infine i dati sperimentali ottenuti dall'implementazione del modello HJM.

Il principale risultato è che il modello si comporta bene nelle situazioni di mercato nelle quali il tasso segue una tendenza regolare. Indipendentemente dal valore assunto dalla volatilità del tasso osservato, i risultati previsti dall'HJM possono considerarsi soddifacenti per circa una settimana lavorativa, tanto più che la volatilità dei tassi HJM si mantiene bassa.

Non possiamo dire altrettanto per quelle situazioni di mercato nelle quali il tasso subisce variazioni repentine e durature nel tempo. Il modello rimane ancorato alla tendenza passata e fornisce delle previsioni sbagliate. Si deve però sottolineare che l'HJM si mostra abbastanza flessibile nel riallineare le sue previsioni con la situazione del mercato. Sono sufficienti pochi giorni di ricalibrazione per proporre di nuovo risultati soddisfacenti.

Ricordiamo che questi risultati provengono da una specifica calibrazione del modello HJM. Abbiamo utilizzato l'analisi delle componenti principali (PCA) per calibrare il modello, assumendo che le funzioni volatilità del tasso forward fossero gaussiane.

Per quanto ci accorgiamo che le previsioni del modello non sono sempre credibili, questo tipo di approccio ha permeso di avere delle formule semplici per prezzare le opzioni sui titoli ed altri tipi di derivati su tassi d'interesse [5].

Heath, Jarrow e Morton hanno fornito un modello generale nel quale la volatilità del tasso forward ha un ruolo fondamentale: le dinamiche della struttura a termine e i prezzi dei derivati dipendono solamente dalla struttura a termine iniziale e dalla funzione volatilità del tasso forward. Il modello HJM va dunque esteso e testato con altre funzioni della volatilità.

Studi recenti effettuati sul mercato americano [8] [9] hanno utilizzato metodi non parametrici per determinare le funzioni volatilità del tasso forward. Una delle direzioni di sviluppo del presente lavoro è l'applicazione di questi metodi al mercato italiano.

Bibliografia

[1] B. Øksendal. Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag. 1995

[2] P. Baldi. Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni. Pitagora editrice. 1984

[3] B. Tuckman. Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets. J. Wiley and Sons, Inc. 1995

[4] Thomas S.Y.Ho. The Journal of Derivatives. Evolution of Interest Rate Models: A Comparison. Volume 2 number 4. 1995

[5] J. James and N. Webber. Interest rate modelling. J. Wiley and Sons, Inc. 2001

[6] R. Rebonato. Interest-Rate Option Models: Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options . II edition. Wiley, 1997.

[7] D. Heath. Introduction to models for the evolution of the term structure of interest rates. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Volume 57

[8] N. D. Pearson and A. Zhou. A Nonparametric Analysis of the Forward Rate Volatilities. OFOR Paper Number 99-05, October 1999

[9] A. Zhou. Modeling the volatility of the Heath-Jarrow-Morton Model: a Multi-factor GARCH analysis. OFOR Paper Number 00-05, August 2000

[10] P. Willmott, S. Howison and J. Dewynne. The Mathematics of Financial Derivatives, A Student Introducion. Cambridge university press, 1996.

[11] L. Torosantucci. Progetto IAC-INA sgr: Determinazione della struttura a termine dei tassi di interesse, 2001.

[12] J. C. Hull. Options, Futures, and Other Derivatives. Prentice Hall, Inc. 1997.

[13] http://www.math.toronto.edu/quastel/. Stocastic calculus for mathematical finance notes.

[14] S. R. S. Varadhan. Diffusion Problems and Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 1980.

[15] D. Backus. http://www.stern.nyu.edu/ ~dbackus/. Notes on Bond Pricing for PhD students and advanced MBAs

[16] L. Marangio, A. Ramponi, M. Bernaschi. A critical review of techniques for term structure analysis. International Journal of Theoretical and Applied Finance.

[17] D. Lamberton, B. Lapeyre. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman and Hall, 1996.

[18] R. Renò. PCA based calibration of an HJM model. IAC preprint, 2000.