UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea

presentata da

Gabriele Fusacchia

Pullback Constructions: a topological approach

Relatore

Prof.ssa Stefania Gabelli

ANNO ACCADEMICO 2005 - 2006
Ottobre 2006

Classificazione AMS: 13A18, 13G05, 13B99, 54B99
Parole Chiave: Valuation domains, Pseudo-valuation domains, Pullbacks, Jaffard domains, CPI-extensions

Lo scopo di questo lavoro è quello di fornire un'ampia panoramica sull'utilizzo delle costruzioni di pullback, mostrando le loro numerose applicazioni nell'algebra commutativa e nella teoria degli anelli. La costruzione di pullback più generale è la seguente: prendiamo un anello B e un omomorfismo suriettivo π verso un anello C; quindi, scegliamo un sottoanello A di C, e consideriamo la preimmagine $D = \pi^{-1}(A)$. E' immediato verificare che D è un sottoanello di B. Diremo allora che D è il pullback del seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ B \arrow[r, two heads, "\pi"'] & C \end{tikzcd}$$

Gran parte del nostro lavoro sarà incentrata sullo studio delle proprietà di D, e di come esse siano collegate a quelle di B e dell'estensione $A \subset C$. Pari importanza sarà data al mostrare come i pullback possano essere usati per descrivere diverse classi di anelli, tra cui i domini di pseudo-valutazione, le estensioni CPI e le coppie di anelli con gli stessi ideali primi. Questo secondo obiettivo nasce da una delle motivazioni principali nello studio dei pullback, e cioè la loro estrema versatilità nel produrre esempi di anelli che soddisfino determinate proprietà.

I primi utilizzi delle costruzioni di pullback possono essere rintracciati nei lavori di Prüfer e Krull sugli anelli di polinomi. Nel 1954, essi vennero usati da Seidenberg nel suo studio sulla dimensione di Krull degli anelli di polinomi [22], mentre nel 1962 Nagata descrisse la composizione di valutazioni [20], facilmente interpretabile come costruzione di pullback (e in effetti uno degli esempi ispiratori della teoria dei pullback). Tuttavia, questi lavori erano ancora privi di una notazione che riflettesse esplicitamente l'utilizzo dei pullback; il primo a formalizzare questo linguaggio fu Gilmer, nel 1968, con il suo studio sul più importante esempio di pullback, la costruzione $D + M$

[15]; in essa si suppone che B sia di valutazione e che contenga il suo campo residuo C. Questo risultato, e la notevole quantità di esempi da esso scaturita, fece nascere l'interesse nei confronti dei pullback, dando inizio allo studio delle loro proprietà: nel 1973 Bastida e Gilmer studiarono i sovranelli e gli ideali divisoriali degli anelli $D+M$ [4], mentre tre anni dopo Brewer e Rutter svilupparono una significativa generalizzazione della costruzione $D+M$ [6], ottenuta riducendo le ipotesi sull'anello B (evitando cioè di richiedere che fosse di valutazione o anche solo semilocale). Numerose sono le applicazioni dei pullback negli anni successivi: nel 1977, lo studio delle estensioni CPI da parte di Boisen e Sheldon [5]; nel 1978, la costruzione $D+XD_S[X]$, descritta da Costa, Mott e Zafrullah [8]; nel 1980, lo studio di Anderson e Dobbs sulle coppie di anelli con gli stessi ideali primi, comprensivo di una caratterizzazione dei domini di pseudo-valutazione in termini di pullback [2]. Più avanti negli anni, nel 1988, Cahen studiò le coppie di anelli con un ideale comune [7], mentre Anderson, Bouvier, Dobbs, Fontana e Kabbaj si servirono dei pullback ne loro lavoro sui domini di Jaffard [1]. Nell'ambito della teoria degli ideali, nel 1996 Gabelli e Fontana si occuparono dei gruppi delle classi degli anelli coinvolti in un pullback di domini integri rispetto a un ideale massimale [12]. Un anno dopo Gabelli e Houston caratterizzarono diverse proprietà di questi pullback simili alla coerenza [13]. Nel 2000 Lucas ha raccolto una vasta serie di esempi di anelli ottenuti da costruzioni di pullback, spaziando dai domini di Mori ai domini di Jaffard e agli S-domini [19]. Infine, è del 2003 lo studio di Zafrullah sugli anelli intermedi fra $D[X]$ e $K[X]$, dove K è un campo contenente il dominio D, e in particolare sulla costruzione $A+XB[X]$ [23].

Abbiamo intenzionalmente escluso da questo excursus storico un contributo significativo nello studio dei pullback, e cioè il lavoro di Fontana "Topologically defined classes of commutative rings", pubblicato nel 1980 [10]: in realtà, uno degli intenti principali di questo lavoro è proprio quello di introdurre

i pullback tramite l'approccio topologico adottato da Fontana nel suo lavoro. Come vedremo in seguito, questa scelta ci consentirà di studiare le varie costruzioni di pullback riferendoci il più delle volte a un unico risultato generale, basato sulla nozione di prodotto fibrato. Questo approccio ha anche il vantaggio di rendere particolarmente intuitiva la visualizzazione degli spettri degli anelli costruiti: essi appaiono infatti come veri e propri "incollamenti" di spettri differenti, il che ci consente di costruire con facilità spazi spettrali dotati di strutture scelte in partenza. Infine, il livello di generalità da cui partiremo ci permetterà di distinguere di volta in volta quali delle ipotesi "classiche" (ad esempio, quelle della costruzione $D+M$) siano effettivamente necessarie.
Il nostro lavoro si sviluppa come segue:

Nel primo capitolo introduciamo gli strumenti topologici necessari per descrivere, sotto opportune ipotesi, lo spettro del prodotto fibrato.
Innanzitutto, definiamo l'incollamento di spazi topologici:

- Dati due spazi topologici disgiunti X e Y, la loro *unione libera* $X+Y$ è l'insieme $X \sqcup Y$ con la seguente topologia: $U \subset X \sqcup Y$ è aperto se e solo se $U \cap X$ è aperto in X e $U \cap Y$ è aperto in Y.
  Sia Z un chiuso di Y, e $h : Z \to X$ una funzione continua. Sia R la relazione di equivalenza generata, in $X+Y$, da $z \sim h(z)$ per ogni $z \in Z$. Lo spazio quoziente $(X+Y)/R$ è detto X *incollato a* Y *su* Z *da* h, ed è denotato$X \cup_h Y$; h viene detta *mappa di incollamento*.

L'incollamento di spazi topologici verifica la seguente Proprietà Universale:

- Sia W uno spazio topologico, e siano $f : X \to W$, $g : Y \to W$ due funzioni continue, tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}
$$

Allora, esiste un'unica funzione continua $\sigma : X \cup_h Y \to W$ che fa commutare il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
Z \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, hook] & X \cup_h Y \arrow[r, "\sigma"] & W \\
 & Y \arrow[u] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Il prossimo passo consiste nel definire due differenti topologie per lo spettro $X = \operatorname{Spec} A$ di un anello A:

- La topologia *di Zariski*, ottenuta scegliendo, come chiusi di X, gli insiemi $V(I) = \{P \in X \mid P \supseteq I\}$, dove I è un ideale di A. Dotato di questa topologia, X sarà denotato con X^{Zar}.

- La topologia *costruibile*, ottenuta scegliendo, come sottobase degli insiemi chiusi, tutti i chiusi di X^{Zar} e gli aperti quasi-compatti di X^{Zar}. Dotato di questa topologia, X sarà denotato con X^{Const}.

Due definizioni saranno importanti nel seguito:

- Dato un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow B$, la *mappa associata* a f è la mappa f^* che associa a un primo Q di B il primo $P = f^{-1}(Q)$ di A

In particolare, f^* è continua fra spazi di Zariski, ed è continua e chiusa fra spazi costruibili.

- Dati due elementi x, y di X, x si dice *specializzazione* di y se è contenuto nella chiusura di $\{y\}$ secondo Zariski.
  Dato un sottoinsieme Y di X, la sua *specializzazione* è

$$^{sp}Y = \{x \in X \mid x \text{ è una specializzazione di un punto di } Y\}$$

Sebbene la topologia con cui lavoreremo prevalentemente sia quella di Zariski, la topologia costruibile avrà un ruolo cruciale in uno dei lemmi necessari a descrivere lo spettro del prodotto fibrato. In particolare, ci serviremo dei due seguenti risultati:

- Un sottoinsieme Y di X^{Const} è chiuso se e solo se esiste un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow B$ tale che $Y = f^*(\operatorname{Spec} B)$

- Dato un sottoinsieme Y di X, la sua chiusura nella topologia di Zariski coincide con la specializzazione della sua chiusura nella topologia costruibile

Fatte queste premesse, lasciamo l'ambito topologico e introduciamo il prodotto fibrato:

- Siano $u : A \to C$ e $v : B \to C$ due omomorfismi di anelli. Denoteremo con D il *prodotto fibrato* di A e B su C, definito come l'anello $A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid u(a) = v(b)\}$, e con $\bar{u} : D \to B$, $\bar{v} : D \to A$ le restrizioni a D delle proiezioni canoniche. Segue facilmente che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d, "\bar{u}"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B \arrow[r, "v"'] & C \end{tikzcd}$$

Il prodotto fibrato soddisfa la seguente proprietà universale:

- Sia D_1 un anello e siano $f : D_1 \to A$, $g : D_1 \to B$ due omomorfismi tali che $u \circ f = v \circ g$.

  Allora, esiste un unico omomorfismo $s : D_1 \to D$ che fa commutare il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[dr, dashed, "s"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& D \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d, "\bar{u}"] & A \arrow[d, "u"] \\
& B \arrow[r, "v"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Prima di procedere con lo studio dello spettro di D, è necessario imporre una condizione fondamentale:

- D'ora in poi, l'omomorfismo v sarà sempre considerato *suriettivo*.

Una prima, semplice conseguenza di questa condizione è che anche l'omomorfismo $\bar{v}$ è suriettivo.

È il momento di passare agli spettri dei quattro anelli coinvolti: lasciando inalterata la struttura del diagramma del prodotto fibrato, ne otteniamo uno formato dai quattro spettri, le cui frecce sono date dalle mappe associate ai quattro omomorfismi di anelli:

$$
\begin{tikzcd}
W & X \arrow[l, hook', "\bar{\beta}"'] \\
Y \arrow[u, "\bar{\alpha}"] & Z \arrow[l, hook', "\beta"] \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

In particolare, dalla suriettività di v e $\bar{v}$ segue che β e $\bar{\beta}$ sono immersioni chiuse. Dunque, ponendo $I_v = \operatorname{Ker} v \subseteq B$ e $I_{\bar{v}} = \operatorname{Ker} \bar{v}$, possiamo identificare Z con la sua immagine chiusa $V(I_v)$ in Y, e X con la sua immagine chiusa $V(I_{\bar{v}})$ in W.

Gli ideali $I_{\bar{v}}$ e I_v sono isomorfi come D-moduli collegati fra loro, e avranno un ruolo di "discriminanti" nel descrivere lo spettro di D.

Grazie a tutte le nozioni topologiche e algebriche introdotte sinora, siamo in grado di dare il seguente teorema:

- Lo spettro di D è omeomorfo, nella topologia di Zariski, all'incollamento di $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$ sul chiuso $Z = \operatorname{Spec} C$.

In seguito a questo risultato, otteniamo una vasta serie di proprietà per D e il suo spettro. Riassumiamo qui sotto quelle principali:

- Esiste un isomorfismo di ordine (rispetto all'inclusione) fra lo spettro di A e il sottoinsieme dello spettro di D costituito dai primi contenenti $I_{\bar{v}}$.

- Esiste un isomorfismo di ordine (rispetto all'inclusione) fra i primi di B non contenenti I_v e i primi di D non contenenti $I_{\bar{v}}$.

- L'omomorfismo $u : A \to C$ è iniettivo (rispettivamente: suriettivo, di tipo finito, integrale, finito) se e solo se $\bar{u} : D \to B$ è iniettivo (rispettivamente: suriettivo, di tipo finito, integrale, finito).

- Se A' è la chiusura integrale di A in C, allora la chiusura integrale D' di D in B è isomorfa a $A' \times_C B$.

- Se u è iniettivo e B è un dominio integro, allora D è un dominio integro con lo stesso campo dei quozienti. In questo campo, B e D hanno la stessa completa chiusura integrale. In particolare, D non è completamente integralmente chiuso.

- D e C sono anelli Noetheriani, e $\bar{u}$ è un omomorfismo finito, se e solo se A e B sono anelli Noetheriani, e u è un omomorfismo finito.

- Se S è un sottoinsieme moltiplicativo di D, allora

$$D_S \cong A_{S_A} \times_{C_{S_C}} B_{S_B}$$

dove $S_A = \bar{v}(S)$, $S_B = \bar{u}(S)$ e $S_C = u \circ \bar{v}(S) = v \circ \bar{u}(S)$.

Viceversa, se S_A è un sottoinsieme moltiplicativo di A e S_B è un sottoinsieme moltiplicativo di B, tale che $u(S_A) = v(S_B) = S_C$, allora

$$A_{S_A} \times_{C_{S_C}} B_{S_B} \cong D_{(S_A \times_{S_C} S_B)}$$

Concluso questo studio delle proprietà generali del prodotto fibrato (sempre nel caso in cui v sia suriettivo), iniziamo a introdurre nuove ipotesi e condizioni. Il primo caso che affrontiamo è quello del prodotto fibrato $R = D \times_k B$, dove B è un anello locale con ideale massimale M, k il suo campo residuo e D un dominio contenuto in k. Intuitivamente, l'operazione topologica che genera lo spettro di R consiste nell'amalgamare due spazi spettrali, uno con un unico punto minimale (lo spettro di D) e uno con un unico punto massimale (lo spettro di B), incollando proprio questi due punti.

La costruzione ottenuta presenta ora caratteristiche molto più precise rispetto al caso generale:

- Tutti gli ideali primi di R sono confrontabili con l'ideale primo $I_{\bar{v}}$. In particolare, esiste un isomorfismo di ordine fra lo spettro di A e i primi di R contenenti $I_{\bar{v}}$, ed uno fra lo spettro di B e i primi di R contenuti in $I_{\bar{v}}$.

- La dimensione di R è $\dim R = \dim D + \dim B$.

- Se l'inclusione $D \subset k$ è propria, il conduttore di B in R è M.

Vedremo in seguito come queste proprietà siano caratteristiche della costruzione $D + M$.

Concludiamo questo primo capitolo con un'altra costruzione: questa volta supponiamo che A sia un anello locale con massimale M e campo residuo k, e che B sia un anello semi-locale con massimali $M_1 \dots M_r$, tali che ogni campo

$k_i = B/M_i$ sia un'estensione di k. Si ottengono allora i seguenti diagrammi:

$$
\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[r, two heads, "\bar{\bar{v}}"] \arrow[d, "h'"] \arrow[dd, bend right, "\bar{u}"'] & A \arrow[d, "h"'] \arrow[dd, bend left, "u"] \\
D_1 \arrow[r, two heads, "\bar{v}"] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook, "j"'] \\
B \arrow[r, two heads, "v"] & \prod_{i=1}^{r} k_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W_2 & X \arrow[l, "\bar{\bar{\beta}}"'] \\
W_1 \arrow[u, hook] & P \arrow[l, "\bar{\beta}"'] \arrow[u, hook, "\gamma"] \\
Y \arrow[u] \arrow[uu, bend left, "\bar{\alpha}"] & Z \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\delta"] \arrow[uu, bend right, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

dove $D_2 = A \times_{\prod k_i} B$, $D_1 = k \times_{\prod k_i} B$ e ogni omomorfismo è canonico. La funzione di M nel caso precedente corrisponde ora a quella del radicale di Jacobson di B. Sotto opportune ipotesi, è possibile ottenere particolari strutture algebriche:

- D_1 e D_2 sono anelli locali, con massimali, rispettivamente, $N_1 = \operatorname{Ker} \bar{v}$ e N_2.

- Se B è una k-algebra allora lo è anche D_1, che risulta isomorfo a $k + J(B)$.

- Se B domina A, allora sia D_1 che D_2 dominano A. In particolare, identificando A con le sue immagini, $D_1 = A + J(B)$ e $D_2 = A + N_2$.

Con il secondo capitolo ha inizio la nostra trattazione dei pullback. Una semplice proposizione ci permetterà di sfruttare i risultati del primo capitolo:

- Sia D l'anello ottenuto dal pullback del seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, hook] \\
B \arrow[r, two heads, "\pi"'] & C
\end{tikzcd}
$$

  Allora D è isomorfo al corrispondente prodotto fibrato $A \times_C B$.

Grazie a questa relazione, potremo dimostrare molte delle proprietà delle principali costruzioni di pullback riconducendoci a quanto dimostrato per il prodotto fibrato.

La prima costruzione che esaminiamo può essere considerata come un avvicinamento alla costruzione $D+M$; consideriamo il dominio R ottenuto come pullback del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, two heads, "\pi"'] & k \end{tikzcd}$$

dove T è un dominio con un ideale massimale M, k è il campo residuo T/M e D è un dominio contenuto in k.
Di particolare interesse è la possibilità di trasferire diverse proprietà algebriche fra R, T e D:

- R è Noetheriano se e solo se T è Noetheriano e D è un campo tale che $[k : D] < \infty$.

- R è di valutazione se e solo se T e D sono di valutazione, e k è il campo dei quozienti di D.

- R è un DVR se e solo se T è un DVR e $D = k$ (ovvero, $R = T$)

- R è di Prüfer se e solo se T e D sono di Prüfer, e k è il campo dei quozienti di D.

La sola ipotesi aggiuntiva necessaria per ottenere la costruzione $D+M$ è che T contenga il campo residuo k, così da poter scrivere $T = k + M$. È allora semplice mostrare che R coincide con $D + M$.
Nella sua versione classica, quella cioè introdotta da Gilmer in [15], T viene supposto di valutazione. In realtà molte delle sue proprietà si possono ottenere in condizioni più generali:

- La chiusura integrale di R è $D' + M$, dove D' è la chiusura integrale di D in k.

- Gli ideali di R contenenti M sono quelli della forma $J + M$, dove J è un ideale di D. Inoltre, J è massimale, primo o P-primario in D se e solo se $J + M$ è massimale, primo o $(P + M)$-primario in R.
- Se S è un sottoinsieme moltiplicativo di D, allora $R_S = D_S + M$.

Se aggiungiamo l'ipotesi che T sia locale, allora:

- Ogni ideale di R è confrontabile con M.
- $\dim R = \dim D + \dim T = \dim D + \operatorname{ht} M$.

Infine, se T è un dominio di valutazione:

- La dimensione valutativa di R è $\dim_v R = h + \dim V$, dove h è la dimensione massima di un anello di valutazione in k contenente D.

Proseguiamo con lo studio di particolari estensioni di anelli, caratterizzate dall'avere gli stessi ideali primi. Un primo risultato ci dice che, quando tali estensioni sono proprie, entrambi gli anelli devono essere locali. I pullback entrano in gioco nella seguente caratterizzazione:

- Sia (R, M) un dominio con campo dei quozienti K con campo residuo $L = R/M$. Poniamo $A = (M : M)$ e $B = A/M$. Allora c'è una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei domini T contenuti in F e confrontabili con R tali che $\operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} T$ e l'insieme dei campi K contenuti in B e confrontabili con L. Più esplicitamente, T è il pullback del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, two heads] & B = A/M \end{tikzcd}$$

  Infine, T contiene (è contenuto in) R se e solo se K contiene (è contenuto in) L.

La nostra trattazione continua con la caratterizzazione, in termini di pullback, di una particolare classe di domini, i domini di pseudo-valutazione:

- Sia R un dominio con campo dei quozienti K. Un ideale primo di R si dice *fortemente primo* se ogni volta che il prodotto di due elementi di K è in P, allora uno dei due è in P.
  Un dominio R si dice di *pseudo-valutazione* (PVD) se ogni suo ideale primo è fortemente primo.

Ogni dominio di valutazione è anche un PVD, e ogni PVD è un dominio locale. I PVD occupano dunque una posizione intermedia fra queste classi di anelli. La caratterizzazione che ne diamo è la seguente:

- Ogni dominio di pseudo-valutazione è il pullback di un diagramma della forma:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, hook] \\ V \arrow[r, two heads] & k = V/M \end{tikzcd}$$

  dove V è un dominio di valutazione con massimale M e K è un sottocampo del campo residuo di V.

Un'altra famosa costruzione di pullback è la cosiddetta estensione CPI di un dominio D rispetto a un suo ideale I:

- Sia D un dominio, I un suo ideale e π la proiezione canonica di D su D/I. Sia inoltre S il sottoinsieme moltiplicativo di D costituito dagli elementi x tali che $x + I$ è un elemento regolare di D/I. Allora l'*estensione CPI* di D rispetto a I, denotata da D^I, è il pullback del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} D^I \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D/I \arrow[d, hook] \\ D_S \arrow[r, two heads, "\bar{\pi}"'] & C \end{tikzcd}$$

dove C è il campo totale delle frazioni di D/I e $\bar{\pi}$ è l'omomorfismo definito da $\bar{\pi}(d/s) = \pi(d)/\pi(s)$.

Il dominio così ottenuto è un sovranello di D, il cui spettro può essere diviso in due parti, ciascuna isomorfa (come insieme ordinato) a una parte dello spettro di D.
Più interessante è però il caso in cui $I = P$ è un ideale primo: lo spettro di D^P risulta allora essere isomorfo all'insieme dei primi di D confrontabili con D, e inoltre emergono caratteristiche analoghe alla costruzione $D + M$, ad esempio la possibilità di scrivere $D^P = D + PD_P$ e il fatto che tutti gli ideali di D^P siano confrontabili con PD_P.

Il terzo capitolo è dedicato alle costruzioni di pullback che coinvolgono anelli di polinomi. Dopo una serie di risultati generali sugli anelli intermedi fra $D[X]$ e $K[X]$, dove D è un dominio contenuto nel campo K, introduciamo gli anelli composti: la loro forma generale è $A + XB[X]$, dove $A \subset B$ è un'estensione di anelli compresi fra D e K. Essi sono facilmente ottenibili come pullback di A e $B[X]$ sul primo (X). In questo ambito, studiamo gli spettri di due importanti costruzioni: la $D + XD_S[X]$ e un suo caso particolare, la $D + XK[X]$ (dove K coincide con il campo dei quozienti di D):

- Sia $R = D_S + XD_S[X]$. Allora lo spettro di R è divisibile in due parti disgiunte, una isomorfa (come insieme ordinato) all'insieme dei primi di D non disgiunti da S, l'altra isomorfa a $\operatorname{Spec} D_S[X]$.

- Sia $R = D + XK[X]$. Gli ideali primi di R sono quelli della forma $Q + XK[X]$, dove Q è un primo di D, e gli ideali principali $f(X)R$, dove f è un polinomio irriducibile in $K[X]$, tale che $f(0) = 1$.

Il quarto e ultimo capitolo ha lo scopo di raccogliere esempi concreti di anelli con diverse proprietà, tutti ottenibili come pullback, e di mostrare

dunque la versatilità di questo strumento algebrico.
La prima parte è interamente dedicata agli anelli di tipo (n, m), studiati da Seidenberg nel 1954 in [22]:

- Un dominio R si dice *di tipo* (n, m) se ha dimensione n e $R[X]$ ha dimensione m.

Un primo risultato di Seidenberg dimostra che m può assumere solo valori compresi fra $n+1$ e $2n+1$. Utilizzando particolari costruzioni di pullback, e procedendo per induzione su n, è possibile rendere ancora più preciso questo risultato:

- Per ogni coppia (n, m) tale che $n+1 \leq m \leq 2n+1$, esiste un dominio integralmente chiuso di tipo (n, m).

La seconda parte di questo capitolo consiste in una serie di esempi di vario genere: in essa mostriamo anelli polinomiali con coefficienti numerici, domini di valutazione, di pseudo-valutazione, di Jaffard, di Prüfer e della forma $k + J(T)$. Gli ultimi esempi includono rappresentazioni grafiche degli spettri associati, così da trasmettere l'idea intuitiva di un vero e proprio processo di incollamento di spettri differenti.

Bibliografia

[1] David F. Anderson, Alain Bouvier, David E. Dobbs, Marco Fontana, and Salah Kabbaj. On Jaffard domains. *Exposition. Math.*, 6(2):145–175, 1988.

[2] David F. Anderson and David E. Dobbs. Pairs of rings with the same prime ideals. *Canad. J. Math.*, 32(2):362–384, 1980.

[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[4] Eduardo Bastida and Robert Gilmer. Overrings and divisorial ideals of rings of the form $D+M$. *Michigan Math. J.*, 20:79–95, 1973.

[5] Monte B. Boisen, Jr. and Philip B. Sheldon. CPI-extensions: overrings of integral domains with special prime spectrums. *Canad. J. Math.*, 29(4):722–737, 1977.

[6] J. W. Brewer and E. A. Rutter. $D+M$ constructions with general overrings. *Michigan Math. J.*, 23(1):33–42, 1976.

[7] Paul-Jean Cahen. Couples d'anneaux partageant un idéal. *Arch. Math. (Basel)*, 51(6):505–514, 1988.

[8] Douglas Costa, Joe L. Mott, and Muhammad Zafrullah. The construction $D+XD_s[X]$. *J. Algebra*, 53(2):423–439, 1978.

[9] James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1966.

[10] Marco Fontana. Topologically defined classes of commutative rings. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 123:331–355, 1980.

[11] Marco Fontana. Sur quelques classes d'anneaux divisés. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 51:179–200 (1983), 1981.

[12] Marco Fontana and Stefania Gabelli. On the class group and the local class group of a pullback. *J. Algebra*, 181(3):803–835, 1996.

[13] Stefania Gabelli and Evan Houston. Coherentlike conditions in pullbacks. *Michigan Math. J.*, 44(1):99–123, 1997.

[14] Stefania Gabelli and Evan Houston. Ideal theory in pullbacks. In *Non-Noetherian commutative ring theory*, volume 520 of *Math. Appl.*, pages 199–227. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[15] Robert Gilmer. *Multiplicative ideal theory.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Queen's University, Kingston, Ont., 1968.

[16] Robert Gilmer. *Multiplicative ideal theory.* Marcel Dekker Inc., New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[17] John R. Hedstrom and Evan G. Houston. Pseudo-valuation domains. *Pacific J. Math.*, 75(1):137–147, 1978.

[18] Irving Kaplansky. *Commutative rings.* Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1970.

[19] Thomas G. Lucas. Examples built with $D + M$, $A + XB[X]$ and other pullback constructions. In *Non-Noetherian commutative ring theory*, volume 520 of *Math. Appl.*, pages 341–368. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[20] Masayoshi Nagata. *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13. Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London, 1962.

[21] A. Seidenberg. A note on the dimension theory of rings. *Pacific J. Math.*, 3:505–512, 1953.

[22] A. Seidenberg. On the dimension theory of rings. II. *Pacific J. Math.*, 4:603–614, 1954.

[23] Muhammad Zafrullah. Various facets of rings between $D[X]$ and $K[X]$. *Comm. Algebra*, 31(5):2497–2540, 2003.

[24] Muhammad Zafrullah and T. Jackson. Examples in modern algebra with which students can play. *Primus*, 6(4):351–354, 1996.