

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.



Sintesi della  
Tesi di Laurea Magistrale in Matematica  
presentata da  
Emanuela Flammini

# Sulle tassellazioni di Penrose

Relatore  
Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2006 - 2007  
Febbraio 2008

Classificazione AMS : 05B45, 52C23.  
Parole Chiave : Problemi sulle tassellazioni, Tassellazione aperiodica, Tassellazione di Penrose, Quasicristalli.

# Sintesi

Disegnare tassellazioni è da sempre una pratica molto diffusa nella storia dell'arte; basti pensare ai mosaici che ci hanno lasciato i Romani, all'Alhambra (il famoso palazzo di Granada), ad alcune opere di artisti contemporanei, come Escher.

Al contrario, lo studio delle proprietà matematiche delle tassellazioni è relativamente recente e molte parti di tale materia sono ancora inesplorate.

In termini matematici, una *tassellazione* è una partizione del piano in "regioni", chiamate *tasselli*. In un primo momento, i contributi a questa nuova teoria erano focalizzati principalmente sulle tassellazioni periodiche, ossia su tassellazioni che sono invarianti per due date traslazioni aventi direzioni indipendenti.

Una tra le scoperte più interessanti in questo ambito, riguarda l'esistenza di famiglie di tasselli che ammettono solo tassellazioni non periodiche. Un insieme di tasselli verificanti questa proprietà è chiamato *aperiodico*.

Lo studio delle tassellazioni aperiodiche proviene dal confluire di diverse scoperte e linee di ricerca. Da un punto di vista filosofico, l'interesse verso la materia comincia a prendere forma quando Hao Wang si pose il problema sulla decidibilità di una tassellazione: *dato un insieme di tasselli fondamentali, è possibile che tale insieme formi una tassellazione del piano infinita?* Nel 1961, Hao Wang provò l'esistenza di un algoritmo per decidere se un dato insieme di tasselli può tassellare o meno il piano sotto la seguente condizione: ogni insieme di tasselli che tassella il piano, deve poter tassellare il piano anche periodicamente. Cinque anni più tardi, Robert Berger scoprì che nessun algoritmo fissato può determinare se un dato insieme di tasselli arbitrari può tassellare il piano. Pertanto, la dimostrazione di Berger implica che devono esistere insiemi di tasselli che ricoprono il piano soltanto non periodicamente. Il primo esempio di insieme aperiodico è stato scoperto da Berger e consiste di 20426 forme di tasselli; tale insieme successivamente è stato ridotto a 104 tasselli. Nel 1970, Raphael Robinson trovò un insieme aperiodico relativamente semplice, composto da appena sei tasselli di forma quadrata con varie incisioni ed estensioni sui bordi per impedire la disposizione periodica. Nel 1974, Roger Penrose scoprì il più semplice esempio di insieme aperiodico; esso

era composto da appena due tasselli. Le tassellazioni di Penrose appaiono in tanti modi equivalenti tra loro e sotto differenti forme di tasselli (ad esempio, sotto forma di rombi o dei famosi “Kites e Darts”).

Un modo per provare che un insieme di tasselli fondamentali o “prototasselli” è aperiodico consiste nel mostrare che ogni tassellazione formata da tale insieme di prototasselli è “sostituibile”, ossia è una tassellazione gerarchica nel piano che viene generata tramite una legge di composizione. Le tassellazioni di Penrose sono gli esempi più famosi di “tassellazioni sostituibili”. Le tassellazioni di Penrose possono essere generate anche in altre due maniere, e cioè attraverso i metodi della griglia multipla e della proiezione, che si basano sul concetto di reticolo.

Il metodo della griglia multipla (detto anche multigriglia) fu scoperto da De Bruijn nel 1981. In questo metodo vengono sovrapposte cinque griglie di rette per creare una pentagriglia. Ogni pentagriglia è duale rispetto ad una tassellazione di Penrose. Invece nel metodo della proiezione si sceglie un reticolo nello spazio euclideo di dimensione cinque e si proiettano alcuni punti di tale reticolo nel piano, così da formare una tassellazione di Penrose.

Le tassellazioni di Penrose hanno un diverse proprietà interessanti; la maggior parte di queste, sebbene inizialmente osservate soltanto in quelle di Penrose, possono essere trovate anche in altre tassellazioni. Per esempio, esse hanno una particolare forma di “simmetria locale” per cui ogni regione limitata di ogni tassellazione di Penrose si ripete infinitamente spesso in quella tassellazione; esse appartengono ad un’unica classe di isomorfismo locale e, in più, esse mostrano una generica e approssimativa simmetria di ordine cinque.

Come è noto, lo studio delle tassellazioni periodiche non è soltanto un mero gioco intellettuale o un metodo prolifico per creare arte; esso rappresenta anche un utile strumento da utilizzare nell’ambito della fisica. Per esempio, le strutture dei cristalli possiedono un elevato grado d’ordine e anche strutture di tipo periodico. Ciò significa che, come per le tassellazioni del piano con poligoni regolari, soltanto reticoli di forma triangolare, quadrata o esagonale possono soddisfare i requisiti per essere una struttura cristallina.

Sorprendentemente, anche le tassellazioni aperiodiche giocano un ruolo fondamentale nella cristallografia. Nel 1984 Schechtman scoprì una struttura non periodica nei cristalli metallici composti da alluminio e da manganese.

Infatti, il diagramma di diffrazione della lega di alluminio e di manganese indica una simmetria di grado cinque. Queste particolari strutture vengono chiamate quasicristalli; tali oggetti sono dei solidi aventi strutture atomiche quasiperiodiche e simmetrie precluse ai cristalli periodici ordinari. Per questo motivo, le tassellazioni aperiodiche (come appunto le tassellazioni di Penrose), che hanno la giusta combinazione tra aperiodicità e ordine, sono considerate un valido modello matematico.

A conclusione di questo excursus storico, si vuole richiamare l'intrigante tassellazione "girih" (conosciuta ai più come "girih pattern") che rappresenta l'idioma decorativo dal punto di vista artistico e architettonico di tutto il mondo islamico. Le tassellazioni girih sono ottenute dal ripetersi (in modo più o meno sistematico) di differenti motivi includenti pentagoni, decagoni, stelle ed altre figure geometriche aventi simmetria di ordine cinque; esse erano costruite esclusivamente attraverso l'uso della riga e del compasso.

La maggior parte delle tassellazioni girih trovate nelle costruzioni islamiche ricordano le tassellazioni di Penrose: esse, infatti, esibiscono lo stesso tipo di simmetria discussa in precedenza. Peter Lu, uno studente universitario di fisica ad Harvard, scoprì come spezzare tutte le tassellazioni girih in tasselli dello stesso tipo, sebbene non sempre siano immediatamente riconoscibili. Inoltre, Lu capì che le tassellazioni girih potevano essere spezzate nei tasselli Kites e Darts (scoperti da Penrose, come detto precedentemente). Sorprendentemente ciò permise a Lu di identificare una tassellazione di Penrose quasi perfetta tra i motivi ammirati nel santuario Darb-i Imam (Isfahan, Iran). Tale santuario fu costruito nel 1453, circa 500 anni prima le scoperte matematiche sulle tassellazioni di Penrose.

Nel dettaglio il lavoro è organizzato nel seguente modo.

Nel primo capitolo, abbiamo richiamato alcune nozioni principali sulla teoria delle tassellazioni. Innanzitutto abbiamo dato la definizione formale di tassellazione.

**Definizione.** *Sia  $E^2$  il piano euclideo. Si dice tassellazione del piano una famiglia numerabile di insiemi chiusi  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$  che verifica le seguenti proprietà:*

$$1. \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = E^2.$$

$$2. \overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

3. ogni  $T_i$  è un disco topologico chiuso.

$T_1, T_2, \dots$  sono chiamati “tasselli” di  $\mathcal{T}$ .

In particolare, ci siamo concentrati su quelle tassellazioni che possiedono un numero finito di tipologie di tasselli.

Per questo motivo, riteniamo necessario introdurre di seguito un po’ di terminologia. Sia  $\mathcal{S} = \{T_1, \dots, T_n\}$  un insieme finito di dischi topologici chiusi. Diremo che  $\mathcal{S}$  ammette  $\mathcal{T}$  se  $\mathcal{T}$  è una tassellazione del piano tale che ogni tassello di  $\mathcal{T}$  è congruente a un disco  $T_j \in \mathcal{S}$ . In tal caso  $\mathcal{S}$  viene chiamato *l’insieme dei tasselli fondamentali* di  $\mathcal{T}$  e gli elementi di  $\mathcal{S}$  vengono detti *prototasselli* di  $\mathcal{T}$ .

**Definizione.** Sia  $\mathcal{S}$  un insieme dei tasselli fondamentali. Chiameremo “regione tassellata” (o *patch di tasselli*) un insieme finito di tasselli  $\mathcal{A}$  tale che:

- Ogni tassello di  $\mathcal{A}$  è congruente a un prototassello in  $\mathcal{S}$ ;
- l’intersezione di due tasselli di  $\mathcal{A}$  ha area nulla;
- l’unione di tutti i tasselli di  $\mathcal{A}$  è un disco topologico.

Riteniamo molto importante anche il concetto di tassellazione duale.

**Definizione.** Sia  $\mathcal{E}(\mathcal{T})$  l’insieme di tutti gli elementi di  $\mathcal{T}$ , cioè l’insieme di tutti i vertici, bordi e tasselli di  $\mathcal{T}$ . Allora, due tassellazioni  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}^*$  sono dette “duali” se esiste una mappa  $\Psi : \mathcal{E}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{T}^*)$  tale che, per ogni  $e_1, e_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ , si ha  $\Psi(e_1) \supseteq \Psi(e_2)$  se e solo se  $e_2 \supseteq e_1$ .

Successivamente abbiamo imposto diverse restrizioni alle tassellazioni in modo da escludere le tassellazioni che presentano alcune patologie come ad

esempio la presenza di *punti singolari* o *singolarità all'infinito*. In particolare, abbiamo considerato solo tassellazioni *localmente finite* e *normali*:

- Una tassellazione  $\mathcal{T}$  è **localmente finita** se ogni disco incontra solo un finito numero di tasselli.
- Una tassellazione  $\mathcal{T}$  è **normale** se soddisfa le seguenti condizioni:
  1. L'intersezione di due tasselli di  $\mathcal{T}$  è un insieme connesso;
  2. I tasselli di  $\mathcal{T}$  sono uniformemente limitati, ossia esistono due numeri reali positivi  $u$  e  $U$  fissati tali che ogni tassello di  $\mathcal{T}$  contiene un disco di raggio  $u$  ed è contenuto in un disco di raggio  $U$ .

Abbiamo quindi mostrato un importante criterio che ci permette di decidere se un dato insieme di tasselli fondamentali ammette una tassellazione.

**Teorema di estensione.** Sia  $\mathcal{S}$  un insieme di tasselli fondamentali. Se, per ogni disco  $D$  di raggio arbitrariamente grande,  $\mathcal{S}$  ammette un patch  $\mathcal{A}$  contenente  $D$ , allora  $\mathcal{S}$  ammette una tassellazione del piano.

Infine, una volta definito il *gruppo di simmetria*  $\mathcal{S}(\mathcal{T})$  di una tassellazione  $\mathcal{T}$  come il sottogruppo massimale delle isometrie del piano che stabilizzano  $\mathcal{T}$ , abbiamo dato le seguenti definizioni:

1. Una tassellazione  $\mathcal{T}$  è *periodica* se  $\mathcal{S}(\mathcal{T})$  ammette come simmetrie, traslazioni in due direzioni linearmente indipendenti.
2. Una tassellazione  $\mathcal{T}$  è *non periodica* se  $\mathcal{S}(\mathcal{T})$  non ammette traslazioni.
3. Un insieme di tasselli fondamentali  $\mathcal{S}$  è *aperiodico* se ammette solo tassellazioni non periodiche. Le tassellazioni con insieme di tasselli fondamentali aperiodico sono dette tassellazioni *aperiodiche*.

Nel secondo capitolo, abbiamo sviluppato alcuni strumenti che ci permettono di mostrare l'aperiodicità delle tassellazioni di Penrose e alcune loro importanti proprietà. In particolare, abbiamo avuto bisogno delle seguenti definizioni.

**Definizione.** Si definisce “sostituzione” una terna  $(\mathcal{S}, s, \sigma)$ , dove:

- i)  $\mathcal{S}$  è un insieme di tasselli fondamentali;
- ii)  $s : E^2 \longrightarrow E^2$  è una dilatazione tale che  $s(x) = sx, \forall x \in E^2$  e costante d’espansione  $s > 1$ ;
- iii)  $\sigma$  è una mappa che manda ogni tassello  $T \in \mathcal{S}$  in un patch di tasselli di  $\mathcal{S}$  con supporto  $s(T)$ .

Quindi  $\sigma$  può essere vista come un’operazione di “inflazione e suddivisione” o “composizione” sui patch dei tasselli.

**Definizione.** Si dice che  $\mathcal{T}$  è una tassellazione sostituibile se esiste una sostituzione  $(\mathcal{S}, s, \sigma)$  tale che, per ogni configurazione di tasselli  $\Gamma \subset \mathcal{T}$  esiste  $T \in \mathcal{S}$  e  $n \in \mathbb{N}$  con  $\Gamma$  congruente a qualche configurazione contenuta in  $\sigma^n(T)$ .

**Nota.** Data una tassellazione sostituibile  $\mathcal{T}$  con mappa di composizione  $\sigma$ , allora  $\sigma(\mathcal{T})$  è ancora una tassellazione, detta *inflazione di  $\mathcal{T}$* , avente  $\sigma(\mathcal{T})$  come tasselli.

**Nota.** Sia  $\Sigma(\mathcal{S}, \sigma)$  l’insieme di tutte le tassellazioni basate su  $(\mathcal{S}, s, \sigma)$ , allora  $\Sigma(\mathcal{S}, \sigma)$  ha un’unica decomposizione se la mappa  $\sigma : \Sigma(\mathcal{S}, \sigma) \longrightarrow \Sigma(\mathcal{S}, \sigma)$  è iniettiva.

A questo punto è stato possibile mostrare il seguente risultato.

**Teorema.** Se  $\Sigma(\mathcal{S}, \sigma)$  ha un’unica decomposizione allora essa è non periodica.

Pertanto, se ci troviamo nelle ipotesi di questo teorema, ogni tassellazione appartenente a  $\Sigma(\mathcal{S}, \sigma)$  è non periodica; tuttavia, nulla impedisce a  $\mathcal{S}$  di ammettere anche tassellazioni periodiche. Per evitare tale inconveniente, imponiamo alcune condizioni ai tasselli al fine di forzare la non periodicità

di ogni tassellazione ammessa da  $\mathcal{S}$  e quindi l'aperiodicità stessa di  $\mathcal{S}$ .

**Definizione.** Si definisce insieme finito di **regole di composizione**  $\mathcal{M}$  per una tassellazione  $\mathcal{T}$  con insieme di tasselli fondamentali  $\mathcal{S}$ , l'insieme delle restrizioni in base alle quali i tasselli possono essere adiacenti l'uno all'altro.

L'insieme delle tassellazioni ammesse da un insieme di tasselli fondamentali  $\mathcal{S}'$  che soddisfano le regole di composizione  $\mathcal{M}$  sono denotate da  $(\mathcal{M}, \mathcal{S}')$ . Le regole di composizione per un insieme di tasselli fondamentali  $\mathcal{S}'$  possono essere espresse anche come l'insieme delle locali configurazioni che figurano nelle tassellazioni ammesse da  $\mathcal{S}'$ .

Il teorema principale che ci assicura la generazione di tassellazioni aperiodiche è il seguente.

**Teorema.** Le tassellazioni in  $(\mathcal{M}, \mathcal{S}')$  che rafforzano l'insieme di tassellazioni sostituibili  $\Sigma(\mathcal{S}, \sigma)$  sono aperiodiche.

Fatto questo, siamo passati a esaminare le tassellazioni di Penrose. Il più famoso insieme di tasselli fondamentali aperiodico di Penrose con solo due elementi è quello costituito dai Kites e Darts. Entrambi sono equilateri con due lati di lunghezza  $\tau = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$  e due lati di lunghezza 1. La Figura 1 ci mostra l'esatta definizione di questi due prototasselli.

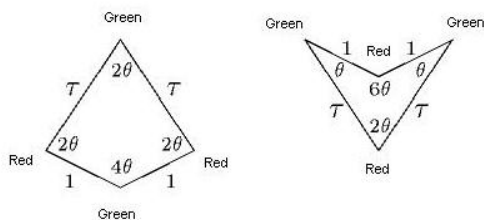


Figura 1: I tasselli Kite e Dart di Penrose.

E' possibile derivare i tasselli Kites and Darts da un secondo insieme di



prototasselli detti *rombi sottili* e *rombi spessi*.

**Definizione.** Siano  $T$  e  $t$  due rombi aventi i bordi di lunghezza unitaria. Supponiamo che la misura degli angoli acuti di  $t$  sia  $\theta$  e la misura degli angoli acuti di  $T$  sia  $2\theta$ , dove  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ . Allora i rombi di Penrose sono ottenuti da  $T$  e  $t$  aggiungendo frecce singole e doppie ai loro bordi come mostrato in Figura 2.

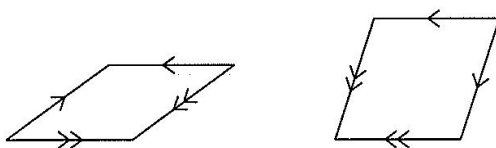


Figura 2: I rombi di Penrose.

**Nota.** Sia  $\mathcal{S}_r$  l'insieme di tasselli fondamentali formato dai due rombi di Penrose. Di seguito si riporta la regole di composizione  $\mathcal{M}_r$  per  $\mathcal{S}_r$ .

Per ogni coppia di tasselli possono presentarsi solo tre casi: i tasselli sono disgiunti; condividono un vertice o condividono un intero bordo. Nel terzo caso è richiesto che, lungo il bordo comune, i tasselli abbiano lo stesso tipo di frecce con la stessa direzione.

In Figura 3 possiamo notare che, senza regole di composizione, i rombi  $T$  e  $t$  ammettono tassellazioni periodiche.

**Definizione.** Una tassellazione  $\mathcal{T}$  si dice *AR-pattern* (o tassellazione con i rombi di Penrose) se è ammessa da  $\mathcal{S}_r$  e se soddisfa  $\mathcal{M}_r$ .

Un AR-pattern può essere derivato da una tassellazione ammessa dai Kites e Darts bisecando i tasselli in triangoli isosceli e ricomponendo i triangoli in rombi e viceversa.

Questa caratteristica si esprime dicendo che le due tassellazioni appartengono alla stessa famiglia MLD (*mutually locally derivable class*). In funzione di questo fatto, abbiamo usato prevalentemente i rombi di Penrose.

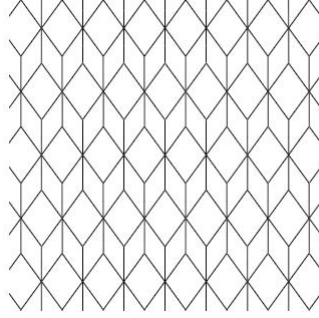


Figura 3: Una tassellazione periodica con i rombi thich e thin.

**Proposizione.** Ogni tassellazione con rombi di Penrose è una tassellazione sostituibile con costante d'espansione  $\tau = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$  e mappa di composizione  $\chi$  definita in Figura 4.

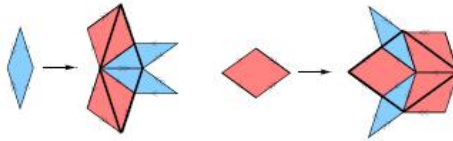


Figura 4: I rombi di Penrose e la loro mappa di composizione.

**Nota.** La mappa di composizione  $\sigma : \Sigma(\mathcal{S}_r, \sigma)$  è una biezione. Ciò significa che è possibile comporre in un'unica modo ogni tassellazione di Penrose al fine di ottenere una nuova tassellazione di Penrose che, rispetto all'originale, ha rombi più larghi di un fattore  $\tau$ .

In Figura 5 viene mostrata l'inflazione di una tassellazione con i rombi di Penrose.

Finalmente, siamo stati in grado di mostrare il seguente risultato fondamentale.

**Proposizione.** Con le regole di composizione  $\mathcal{M}_r$ , l'insieme  $\mathcal{S}_r$  dei rombi di Penrose forma un insieme aperiodico di prototasselli.

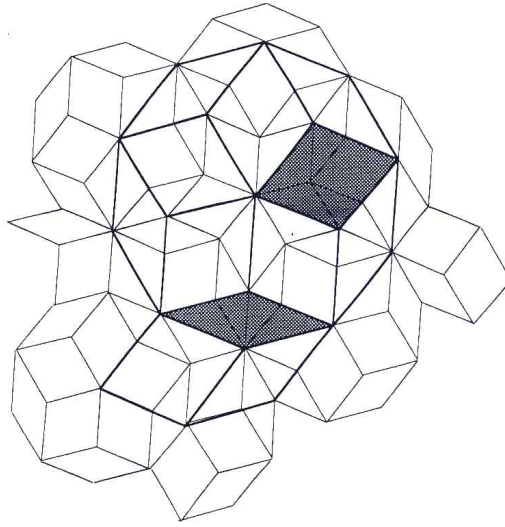


Figura 5: Inflazione di un AR-pattern.

Dal fatto che le tassellazioni di Penrose sono tassellazioni sostituibili, derivano le loro seguenti principali proprietà:

- ogni tassellazione di Penrose  $\mathcal{T}$  è *ripetitiva*, cioè ogni patch  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{T}$  è relativamente denso in  $\mathcal{T}$ ;
- le tassellazioni di Penrose appartengono alla stessa *classe locale di isomorfismo*, cioè ogni patch  $\mathcal{A}$  che appare in una di loro appare anche nelle altre.

Nel terzo e quarto capitolo, abbiamo illustrato altri due metodi che ci permettono di generare le tassellazioni di Penrose: il *metodo delle proiezioni* e il *metodo della multigriglia*.

Per raggiungere il suo scopo, il metodo delle proiezioni si avvale della teoria dei reticoli in alte dimensioni.

**Definizione.** *Un insieme di punti  $\Lambda$  è un “insieme di Delone” se è discreto e relativamente denso, cioè se esiste  $R_0 > 0$  tale che ogni sfera di raggio  $R > R_0$  contiene almeno un punto di  $\Lambda$  nel suo interno.*

**Definizione.** La tassellazione di Voronoï  $\mathcal{V}(\Lambda)$ , indotta da un insieme di Delone  $\Lambda$  di  $E^n$ , è una tassellazione i cui tasselli, chiamati celle di Voronoï, vengono definiti nel seguente modo:

$$V(x) := \{u \in E^n \mid |x - u| \leq |y - u|, \forall y \in \Lambda\}, \forall x \in \Lambda.$$

**Nota.** E' possibile associare a  $\Lambda$  anche un'altra tassellazione (chiamata tassellazione di Delone) definita come la tassellazione ortogonalmente duale a  $\mathcal{V}(\Lambda)$ , con tasselli centrati nei vertici di  $\mathcal{V}(\Lambda)$  e vertici dati dai punti di  $\Lambda$ .

**Definizione.** Un "reticolo"  $\mathcal{L}$  in  $E^n$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo generato da  $n$  vettori linearmente indipendenti.

**Definizione.** Un reticolo "standard" di dimensione  $n$ , denotato da  $\mathcal{I}_n$ , è un reticolo in  $E^n$  generato da  $n$  vettori che formano una base ortonormale di  $E^n$ .

**Nota.** Se  $\mathcal{I}_5$  è il reticolo standard di dimensione 5, allora le celle di Voronoï di  $\mathcal{I}_5$  sono gli ipercubi unitari  $\mathcal{Q}_5$ . Ciò significa che  $\mathcal{V}(\mathcal{I}_5)$  è generato da un prototassello unico che assumiamo essere  $V(0)$ .

**Definizione.** Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo in  $E^n$  e  $\mathcal{E}$  un sottospazio di dimensione  $k$  di  $E^n$ , con  $0 < k < n$ .  $\mathcal{E}$  è "totalmente irrazionale" se  $\mathcal{E} \cap \mathcal{L} = \{0\}$ .

Detto questo, abbiamo preso in considerazione il reticolo standard  $\mathcal{I}_5$  e il piano  $\mathcal{E} \subset E^5$  di equazioni:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^4 x_j = 0 \\ \sum_{j=0}^4 x_j \cos(\frac{4j\pi}{5}) = 0 \\ \sum_{j=0}^4 x_j \sin(\frac{4j\pi}{5}) = 0 \end{cases}$$

**Nota.**  $\mathcal{E}$  è totalmente irrazionale per  $\mathcal{I}_5$ .

Se  $\Pi : E^5 \longrightarrow \mathcal{E}$  è la proiezione ortogonale in  $\mathcal{E}$  e  $\Pi^\perp : E^5 \longrightarrow \mathcal{E}^\perp$  la proiezione ortogonale nel complementare ortogonale di  $\mathcal{E}$ , definendo  $X = C \cap \mathcal{I}_5$  dove  $C = \Pi^\perp(V(0)) \oplus \mathcal{E}$ , è possibile mostrare che  $\Pi(X)$  è un insieme di Delone non periodico. Ora, prendendo la tassellazione di Voronoï  $\mathcal{V}(\mathcal{I}_5)$  indotta

da  $\mathcal{I}_5$ , e un vettore  $\vec{\gamma} \in E^5$  tale che  $\mathcal{E}$  non contenga faccie di dimensione  $j$  di  $\mathcal{V}(\mathcal{I}_5) + \vec{\gamma}$  se  $0 \leq j < 3$ , si ha il seguente enunciato.

**Proposizione.** Consideriamo la tassellazione di Delone indotta da  $\mathcal{I}_5$ . Allora, la proiezione su  $\mathcal{E}$  delle facce di tale tassellazione corrispondente alle facce di  $\mathcal{V}(\mathcal{I}_5) + \vec{\gamma}$  tagliate da  $\mathcal{E}$ , è una tassellazione del piano e, in particolare, è una tassellazione con i rombi di Penrose. Inoltre, i vertici della tassellazione di Penrose sono i punti appartenenti a  $\Pi((\Pi^\perp(V(0) + \vec{\gamma}) \oplus \mathcal{E}) \cap \mathcal{I}_5)$ .

In generale, la tassellazione prodotta con il metodo della multigriglia è il duale di un'altra tassellazione, chiamata *k-griglia*, ed è generata dalla sovrapposizione di un numero finito  $k$  di insiemi di rette parallele.

**Definizione.** Una griglia è una famiglia infinita di rette parallele equidistanti. Un vettore griglia è un vettore di lunghezza  $d$  pari alla distanza di una retta da un'altra, e ortogonale a quelle rette. Una *k-griglia* (o *multigriglia*) è una sovrapposizione di  $k$  griglie. Un insieme di  $k$  vettori griglia  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$  è chiamato la *star della multigriglia*.

Il metodo della multigriglia prevede i seguenti passi:

- Scegliere una star di  $k > 2$  vettori unitari.
- Sovrapporre  $k$  griglie aventi le rette ortogonali ai vettori della star.
- Traslare, se necessario, ogni griglia di una distanza  $\gamma_i$  nella direzione del suo vettore star, in modo tale che ogni punto del piano appartenga al più a due rette della multigriglia. In tal caso, diciamo che il vettore *spostamento*  $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  e la relativa *k-griglia* sono *regolari*. Al contrario, se  $\vec{\gamma}$  permette a un numero di rette maggiore di due di intersecarsi in un punto, allora  $\vec{\gamma}$  e la relativa *k-griglia* sono detti *singolari*.
- Costruire, usando la star, i prototaselli della tassellazione: il prototassello corrispondente a un dato vertice  $P$  della *k-griglia* è un paral-

lelogramma spannato dai vettori star delle rette che si intersecano in  $P$ .

- Costruire il duale della  $k$ -griglia con i prototasselli definiti nel punto precedente.

A questo punto, abbiamo applicato il metodo della griglia multipla a una star costituita dai vettori che puntano ai vertici di un pentagono regolare. Abbiamo scelto il piano complesso per descrivere la 5-griglia prodotta dalla star, e abbiamo posto una specifica condizione sul vettore di spostamento, ossia che la somma delle sue componenti deve essere nulla.

**Definizione.** Siano  $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  numeri reali tale che  $\sum_{j=0}^4 \gamma_j = 0$ . La pentagriglia determinata da  $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  è l'insieme

$$\bigcup_{j=0}^4 \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z\zeta^{-j}) + \gamma_j \in \mathbb{Z}\},$$

dove  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$  e l'insieme  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z\zeta^{-j}) + \gamma_j \in \mathbb{Z}\}$  è la  $j$ -sima griglia,  $\forall j = 0, \dots, 4$ .

**Nota.** I vettori  $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  e  $(\gamma_0^*, \dots, \gamma_4^*)$  definiscono la stessa pentagriglia se  $\gamma_j - \gamma_j^* \in \mathbb{Z}$ .

**Definizione.** Due pentagriglie determinate da  $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  e  $(\gamma_0^*, \dots, \gamma_4^*)$  rispettivamente, si dicono *shift-equivalenti* se e solo se esiste  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re}(z_0\zeta^{-j}) + \gamma_j - \gamma_j^* \in \mathbb{Z}, \forall j = 0, \dots, 4$ .

I parallelogrammi corrispondenti ad ogni vertice della pentagriglia risultano essere due rombi; la conseguente tassellazione è formata da rombi spessi e rombi sottili.

**Teorema.** La tassellazione duale di una pentagriglia forma una tassellazione con rombi spessi  $T$  e rombi sottili  $t$ . L'insieme dei vertici dei rombi è

l'insieme di tutti i punti  $f(z)$ , con

$$f(z) = \sum_{j=0}^4 K_j(z)\zeta^j$$

dove  $z \in \mathbb{C}$  e  $K_j(z) := \lceil \operatorname{Re}(z\zeta^{-j}) + \gamma_j \rceil$ ,  $\forall j = 0, \dots, 4$ .

Un esempio di pentagriglia e della rispettiva tassellazione duale sono mostrate in Figura 6.

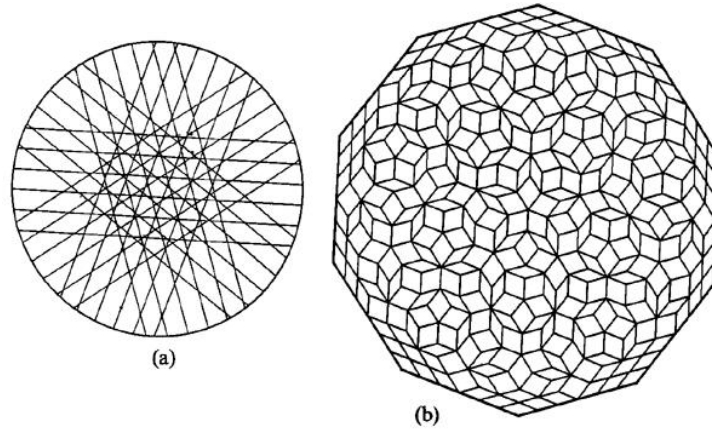


Figura 6: Una pentagriglia e la sua tassellazione duale.

Costruita la tassellazione con i rombi  $T$  e  $t$  come duale alla pentagriglia, al fine di concludere che si tratta effettivamente di una tassellazione di Penrose, è stato necessario verificare che soddisfacesse anche le regole di composizione  $\mathcal{M}_r$ .

**Teorema.** Tutti i tasselli di una tassellazione duale a una pentagriglia possono essere orientati e frecciati in modo da formare una tassellazione con rombi di Penrose.

Inoltre abbiamo anche il seguente risultato.

**Teorema.** E' possibile indicizzare i vertici di una tassellazione con i rombi di Penrose in modo tale da ottenere un AR-pattern con vertici della forma

$$\sum_{j=0}^4 k_j \zeta^j,$$

dove  $(k_0, \dots, k_4) \in W := \left\{ (k_0, \dots, k_4) \in \mathbb{Z}^5 \mid 1 \leq \sum_{j=0}^4 k_j \leq 4 \right\}$ , così come ottenuto per i vertici delle tassellazioni generate dalle pentagriglie.

Siano  $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  numeri reali con  $\sum_{j=0}^4 \gamma_j = 0$  e assumiamo che la pentagriglia definita da  $(\gamma_0, \dots, \gamma_4)$  sia regolare. Allora possiamo associare alla pentagriglia il numero complesso  $\xi = \sum_{j=0}^4 \gamma_j \zeta^{2j}$ .

Possiamo formalizzare questo concetto dicendo che, se  $\mathcal{P}$  indica l'insieme delle pentagriglie regolari, allora esiste un'applicazione iniettiva  $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}[\zeta]$ .

É possibile, quindi, definire la seguente relazione d'equivalenza:

*Due pentagriglie  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$  sono shift-equivalenti*  $\Leftrightarrow \xi_{P_1} - \xi_{P_2} \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ .

Per di più, é possibile estendere la relazione di "shift equivalenza" anche alle tassellazioni prodotte dalle pentagriglie.

**Proposizione.** Se le pentagriglie determinate da  $\xi$  e  $\xi^*$  sono regolari, allora producono la stessa tassellazione con rombi di Penrose se e solo se  $\xi = \xi^*$ . Inoltre, le loro tassellazioni sono shift equivalenti se e solo se  $\xi - \xi^* \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ .

Il parametro  $\xi$  è utile anche per studiare il caso della pentagriglia singolare. In proposito abbiamo mostrato i seguenti risultati.

**Proposizione.** Una pentagriglia è singolare se e soltanto se il suo parametro ha una delle seguenti forme:

$$iu + \alpha, \quad i\zeta u + \alpha, \quad i\zeta^2 u + \alpha, \quad i\zeta^3 u + \alpha, \quad i\zeta^4 u + \alpha$$

dove  $u \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ .



**Definizione.** Una pentagriglia è eccezionalmente singolare se esiste un punto che giace in cinque rette della pentagriglia e quindi se  $\xi \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ .

**Proposizione.** Consideriamo una pentagriglia singolare ma non eccezionalmente singolare. Allora esistono due tassellazioni di Penrose che corrispondono ad essa.

Una di tali tassellazioni è ottenuta prendendo il limite della tassellazione di una pentagriglia perturbata con  $\xi$  tendente al suo limite da destra; l'altra è ottenuta nello stesso modo con  $\xi$  tendente al suo limite da sinistra.

**Proposizione.** A una pentagriglia eccezionalmente singolare corrispondono 10 differenti tassellazioni di Penrose.

Grazie ai risultati relativi alle tassellazioni sostituibili abbiamo potuto mostrare anche il seguente teorema fondamentale.

**Teorema.** Ogni tassellazione di Penrose è prodotta da una pentagriglia regolare o singolare.

Questo teorema è l'ultimo di una serie di risultati che ci permettono di affermare che:

**Teorema.** Esiste una corrispondenza suriettiva tra l'insieme delle tassellazioni di Penrose e i numeri complessi  $\xi \in (1 - \zeta)\mathbb{R}[\zeta]/(1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ . Inoltre, se  $\xi \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ , allora  $\xi$  produce 10 tassellazioni di Penrose, mentre se

$$\xi \in \{iu + \alpha, i\zeta u + \alpha, i\zeta^2 u + \alpha, i\zeta^3 u + \alpha, i\zeta^4 u + \alpha\}$$

con  $u \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$ , allora  $\xi$  produce 2 tassellazioni di Penrose.

Come conseguenza immediata di questo teorema, si ha che l'insieme delle tassellazioni di Penrose è non numerabile.

Nell'ultimo capitolo abbiamo provato a dare una definizione formale di cristallo. I cristalli vengono generalmente studiati attraverso il loro diagramma di diffrazione che rappresenta la dispersione che prende posto quando un'onda incontra un ostacolo. Dal punto di vista matematico il diagramma di diffrazione è essenzialmente la mappa di densità della funzione che specifica l'onda diffrazionata.

Dalla fisica sappiamo che la mappa di densità  $\rho(\vec{x})$  di un'onda è la trasformata inversa di Fourier della funzione ampiezza  $A(\vec{s})$  dell'onda. Invece, la funzione intensità di un'onda è il quadrato del modulo della funzione ampiezza:

$$\hat{\gamma}(\vec{s}) = |A(\vec{s})|^2.$$

Dato un insieme di Delone  $\Lambda$ , possiamo assumere che a ogni punto di  $\Lambda$  sia assegnata una massa unitaria. Allora, la mappa di densità di  $\Lambda$  è:

$$\rho_\Lambda(\vec{x}) := \sum_{d_k \in \Lambda} \delta(\vec{x} - \vec{d}_k),$$

dove  $\delta(\vec{x} - \vec{d}_k)$  è la misura di Dirac al punto  $d_k$ .

È ora possibile calcolare la funzione di intensità  $\hat{\gamma}$ . Può essere mostrato che tale funzione è una misura quindi, può essere decomposta unicamente in due componenti, una discreta e l'altra continua. Otteniamo che

$$\hat{\gamma}(\vec{s}) = \sum_{s^* \in S} c(\vec{s}) \delta(\vec{s} - \vec{s}^*) + \hat{\gamma}_c(\vec{s}).$$

**Definizione.** *Sia  $\Lambda$  un insieme di Delone in  $E^n$ . Lo spettro di  $\Lambda$  è la sua funzione di intensità  $\hat{\gamma}(\vec{s})$ .*

**Definizione.** *Sia  $\Lambda$  un insieme di Delone. Allora  $\Lambda$  è un cristallo se il suo spettro ha una componente discreta infinita e contabile.*

Una volta appresa la definizione di cristallo, abbiamo cercato di capire quando una tassellazione  $\mathcal{T}$  può rappresentare un cristallo. Abbiamo considerato l'insieme dei vertici  $\Lambda$  di  $\mathcal{T}$  e, come per un insieme di Delone generico, abbiamo prodotto il diagramma di diffrazione di  $\mathcal{T}$  rimpiazzando ad ogni

punto di  $\Lambda$  un delta di Dirac. La mappa di densità di  $\mathcal{T}$  è la somma di questi Delta. È possibile, allora, calcolare lo spettro di  $\mathcal{T}$  e accertare se la definizione di cristallo è verificata.

Come ultima cosa, abbiamo cercato di dare un'idea della dimostrazione del seguente risultato.

**Proposizione.** La tassellazione di Penrose è un cristallo.

Il diagramma di diffrazione di una tassellazione di Penrose presenta simmetrie di ordine 5 che sono precluse alle strutture periodiche. Attualmente sono stati trovati, nei laboratori di tutto il mondo, molti cristalli con simmetrie proibite dal teorema di restrizione cristallografica e per questo chiamati quasicristalli. È ragionevole, quindi, assumere che alcune delle proprietà dei materiali reali possano essere modellati dalle tassellazioni aperiodiche.

# Bibliografia

- [1] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, W.H. Freeman and Company, 1989.
- [2] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] V.V. Nikulin, I.R. Shafarevich *Geometries and groups*, Springer-Verlag, 1994.
- [4] N.G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Series A, Vol. 84 (Indagationes Mathematicae, Vol. 43), 38-66 (1981).
- [5] N.G. de Bruijn, *Dualization of multigrids*, Journal de Phisique, Colloque C3, supplement No. 7, Vol. 47, 85-94 (1986).
- [6] N.G. de Bruijn, *Updown generation of Penrose tilings*, Indagationes Mathematicae, New Series, Vol. 1 (2) 201-19 (1990).
- [7] N.G. de Bruijn, *Remarks on Penrose tilings*, to appear in The Mathematics of Paul Erdős, Springer-Verlag (1994).
- [8] W. Fulton, *Algebraic Topology*, Springer, 1997.
- [9] M. Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri, 1998.
- [10] R. Penrose, *Pentaplexity*, Math. Intelligencer, Vol. 2 (1), 32-37 (1979)
- [11] R. Penrose, *The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. Appl. 10, 266-271 (1974).

- [12] C. Goodman-Strauss, *Aperiodic hierarchical tilings*, Foams and emulsions, Nato Adv. Sci. Inst. Ser. E Appl. Sci, Vol. 354 (1999), 481-496.
- [13] C. Goodman-Strauss, *Matching rules and substitution tilings*, Annals of Math. 147 (1998), 181-223.
- [14] C. Goodman-Strauss, *A small aperiodic set of tiles*, European Journal of Combinatorics, Vol. 20 (1999), 375-384.
- [15] M. Berger, *Geometry 1*, Springer-Verlag, (1994).
- [16] B. Praggastis, *Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms*, Ph. D. thesis, University of Washington, (1994).
- [17] M. Gardner, *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American, January, (1977), 110-121.
- [18] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publications, 1973.
- [19] M. Baake, *A Guide to Mathematical Quasicrystals*, arXiv:math-ph/9901014 v1, 20 Jan 1999.
- [20] N.P. Frank, *A primer on substitution tilings of the euclidean plane*, arXiv:0705.1142v1 [math.DS], 8 May 2007.
- [21] P.J. Lu, P.J. Steinhardt, *Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval islamic architecture*, Science 315, 1106 (2007).