SINTESI
della Tesi di Laurea in Matematica
di
Finesi Laura

I due teoremi fondamentali di Bertini

Relatore
Prof. Angelo Felice Lopez
Novembre 2001

In questa tesi analizziamo alcune formulazioni riguardanti i due teoremi fondamentali di Bertini. La nostra analisi parte dallo studio dell'articolo [2] di Steven L. Kleiman pubblicato nell'aprile del 1997. Seguendo le tracce di questo articolo, proponiamo varie formulazioni dei risultati citati cercando di approfondire alcuni aspetti delle loro argomentazioni e di chiarirne alcuni passaggi per una maggiore comprensione.
La tesi si divide in due capitoli, il primo dei quali è interamente dedicato al primo teorema di Bertini. Per la prima dimostrazione del teorema abbiamo introdotto solo alcune nozioni generali riguardo ai sistemi lineari e abbiamo usato alcune proprietà dei polinomi.
Un *sistema lineare* su $\mathbf{P}^n$ è una famiglia di ipersuperfici $U_{\mathbf{t}}$ della forma

$$U_{\mathbf{t}} : t_0 u^{(0)} + \cdots + t_s u^{(s)} = 0,$$

dove $\mathbf{t} := [t_0, \ldots, t_s]$ è un punto dello spazio proiettivo $\mathbf{P}^s$, lo *spazio dei parametri*, e dove $u^{(0)}, \ldots, u^{(s)}$ sono polinomi omogenei linearmente indipendenti dello stesso grado nelle $n+1$ variabili $x_0, \ldots, x_n$. Se tutti i membri $U_{\mathbf{t}}$ contengono una ipersuperficie comune $U : u = 0$, allora U è detta *componente base*, e il sistema definito dai quozienti

$$u^{(0)}/u, \ldots, u^{(s)}/u$$

è detto *sistema residuo*.
Il piú piccolo sistema residuo è quello in cui u è il massimo comun divisore degli $u^{(i)}$. Se tutti i membri di questo sistema residuo minimale contengono un punto comune, allora questi è un *punto base* del sistema originale.
Sia $U : u = 0$ una ipersuperficie, un punto di U in cui tutte le derivate parziali di ordine r - 1,

$$u_{i_1 \ldots i_{r-1}} := \frac{\partial^{r-1} u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{r-1}}} \qquad \textit{dove} \quad 0 \leqslant i_j \leqslant n$$

si annullano è detto di molteplicità r. Un punto è detto multiplo, o singolare, se $r \geqslant 2$, altrimenti è un punto semplice. Per $r = 1$ la definizione data corrisponde alla condizione di appartenenza del punto ad U. Dato r, i vari punti di molteplicità r dei vari membri $U_{\boldsymbol{t}}$ del sistema lineare formano un sottoinsieme chiuso M_r di $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^s$, e un punto di molteplicità r è detto *variabile* se giace su un sottoinsieme chiuso e irriducibile di M_r che domina $\mathbf{P}^s$.
L'enunciato del primo teorema di Bertini è il seguente:

Teorema 0.1. (Su punti variabili di molteplicità r). *Su $\boldsymbol{P}^n$, un punto variabile di molteplicità r di un sistema lineare è un punto di molteplicità r-1 di* *ogni membro.*

Il caso più importante del teorema (0.1) si verifica quando $r = 2$ e non ci sono componenti base. Tale risultato allora viene generalmente espresso nella forma contraria come segue, facendo uso delle definizione di un membro generale, ovvero un membro di un sistema lineare per il quale sia verificata una certa condizione su un aperto che lo contiene.

Teorema 0.2. (Su punti singolari variabili). *Su $\boldsymbol{P}^n$, se un sistema lineare non ha componenti base,allora un membro generale non ha punti singolari fuori dal luogo dei punti base.*

Il passo successivo consiste nell'estendere il primo teorema al caso di una varietà arbitraria. Distinguiamo però il caso generale da quello in cui la molteplicità sia uguale a 2.

Teorema 0.3. (Su punti singolari variabili, esteso). *Su una varietà arbitraria X, se un sistema lineare non ha componenti base, allora il membro generale non ha punti singolari fuori dal luogo dei punti base del sistema e dei punti singolari della varietà .*

La dimostrazione qui proposta dell'estensione per $r = 2$ è essenzialmente uguale a quella del teorema (0.1) ad eccezione del fatto che in questo caso supponiamo che la varietà sia proiettiva e che il punto variabile parametrizzato $\mathbf{x}(t)$ si trovi fuori dal luogo dei punti singolari della varietà ma nel luogo dei punti singolari di $X \cap U_{\boldsymbol{t}}$, dove $U_{\boldsymbol{t}}$ è un'ipersuperficie in $\mathbf{P}^n$.

L'estensione del teorema (0.1) che ora riportiamo riguarda una varietà arbitraria in caratteristica arbitraria p. Ciò è reso possibile grazie all'introduzione della definizione di *punto variabile separabile* che riportiamo di seguito:

Definizione 0.1. *I punti di molteplicità r dei membri di un sistema lineare su* X*, parametrizzati da $\boldsymbol{P}^s$, formano un sottoinsieme M_r di $X \times \boldsymbol{P}^s$.*
Diremo che un dato punto di molteplicità r è variabile separabile se giace in un sottoinsieme M di M_r che è chiuso in $X \times \boldsymbol{P}^s$ e tale che la proiezione in $\boldsymbol{P}^s$ è separabile e dominante.

Ovviamente la richiesta di separabilità sarà automaticamente soddisfatta quando $p = 0$.
L'estensione del primo teorema di Bertini è dunque la seguente:

Teorema 0.4. (Su punti variabili di molteplicità r) *Sia X una varietà su un campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria, e* $\mathbf{x}$ *un punto di X non singolare. Se* $\mathbf{x}$ *è un punto variabile separabile di molteplicità r, allora* $\mathbf{x}$ *è un punto di molteplicità r-1 di ogni membro.*

La dimostrazione del teorema è piuttosto articolata. Vengono richiamati risultati riguardanti moduli di 1-forme e l'espansione di funzioni regolari al fine di ricondursi ad un'argomentazione finale che riprenda quella del teorema (0.1). Proponiamo poi altre due versioni del primo teorema di Bertini che utilizzano strumenti diversi da quelli incontrati finora. Le versioni successive si trovano in [1].

Teorema 0.5. *Sia* X *una sottovarietà chiusa non singolare di $\boldsymbol{P}^n_k$, dove k è un campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria. Allora esiste un iperpiano $H \subseteq \boldsymbol{P}^n_k$ che non contiene* X, *e tale che $H \cap X$ è uno schema regolare in ogni punto. Inoltre, l'insieme degli iperpiani con questa proprietà forma un sottoinsieme aperto denso del sistema lineare completo $|H|$, considerato come uno spazio proiettivo.*

Teorema 0.6. *Sia X una varietà proiettiva non singolare su un campo algebricamente chiuso k di caratteristica zero. Sia δ un sistema lineare senza punti base. Allora l'elemento generale di δ, considerato come un sottoschema chiuso di X, è non singolare.*

Quest'ultimo risultato in realtà è un corollario di un teorema dovuto a Kleiman sugli spazi omogenei. L'idea della dimostrazione è di guardare allo spazio prioiettivo $\mathbf{P}^n_k$ come ad uno spazio omogeneo per l'azione del gruppo PGL(n). Se $f : X \to \mathbf{P}^n$ è la mappa definita dal sistema lineare δ e $\sigma \in PGL(n)$ è generale proviamo che $f^{-1}(H^\sigma)$ è non singolare, con $H \cong \mathbf{P}^{n-1}$ e H^σ la trasformata di H tramite σ. Nel secondo capitolo ci occupiamo esclusivamente del secondo teorema di Bertini. Anche in questo caso abbiamo analizzato prima la versione originaria del teorema nella formulazione prima di Bertini e poi l'estensione a varietà arbitrarie. Il secondo teorema riguarda i sistemi lineari riducibili, ovvero quelli i cui membri sono tutti riducibili. Data una varietà X, definiamo la mappa associata al sistema lineare $\mathcal{P}$ con base $u^{(0)}, \ldots, u^{(s)}$ con

$$\phi_{\mathcal{P}} : X \to \mathcal{P}$$
$$\mathbf{x} \mapsto [u^{(0)}(\mathbf{x}), \ldots, u^{(s)}(\mathbf{x})].$$

Diremo che il sistema lineare $\mathcal{P}$ è composto con un pencil se dim $\phi_{\mathcal{P}}(X) = 1$. Del secondo teorema di Bertini diamo due formulazioni, una di tipo geometrico e una di tipo algebrico come segue:

Teorema 0.7. (Su sistemi lineari riducibili). *Su $\boldsymbol{P}^n$, un sistema lineare riducibile, senza componenti base, è necessariamente composto con un pencil lineare.*

Teorema 0.8. (Versione algebrica). *Siano $u^{(0)}, \ldots, u^{(s)}$ forme dello stesso grado nella variabili $x_0, \ldots, x_n$, e siano $t_0, \ldots, t_s$ parametri indeterminati. Se la forma nelle x_i,*

$$F := t_0 u^{(0)} + \cdots + t_s u^{(s)}$$

è riducibile, allora o le $u^{(i)}$ hanno un fattore in comune, o sono uguali alle forme $v^{(i)}$ dello stesso grado nelle altre due forme w_0 e w_1 dello stesso grado nelle x_i, cioè

$$u^{(i)}(x_0, \ldots, x_n) = v^{(i)}(w_0(x_0, \ldots, x_n), w_1(x_0, \ldots, x_n)).$$

L'idea della dimostrazione del teorema (0.7) parte dall'analisi delle componenti in cui si fattorizzano i membri riducibili del sistema lineare considerato. Facciamo vedere in un primo tempo che ogni fattore irriducibile si muove in un proprio pencil lineare e poi che questi pencil coincidono tutti tra loro. L'argomentazione che conclude la dimostrazione consiste nel provare che esistono due componenti del sistema lineare linearmente indipendenti che determinano il pencil con cui si compone il sistema lineare stesso.
A conclusione del secondo capitolo, presentiamo il secondo teorema di Bertini esteso:

Teorema 0.9. (Su sistemi lineari riducibili).
Su una varietà arbitraria X, un sistema lineare riducibile, senza componenti base, è necessariamente composto con un pencil.

La sua dimostrazione è simile, nella parte iniziale, a quella del teorema (0.7). Si definisce dapprima l'insieme B come l'unione dei punti singolari della varietà X e dei punti base del sistema lineare riducibile. Ci si restringe poi ad un oppurtuno sottosistema di quest'ultimo i cui punti base, lo dimostriamo, sono in B. Si passa infine all'analisi della mappa definita dal sistema lineare iniziale

$$f \colon X \setminus B \to \mathbf{P}^s$$
$$\mathbf{x} \to [u^{(0)}(\mathbf{x}), \ldots, u^{(s)}(\mathbf{x})]$$

le cui proprietà ci permettono di concludere che dim Im $(f) = 1$ e quindi che il sistema $\mathcal{U}$ è composto con un pencil.

Dopo l'analisi dei due teoremi, abbiamo proposto un'appendice in cui è raccolta ed ordinata la maggior parte delle nozioni e dei risultati di cui ci siamo serviti nelle dimostrazioni studiate.
Nonostante non possa essere considerata una trattazione vera e propria, l'appendice proposta contiene però le dimostrazioni di alcuni tra i risultati che presentano argomentazioni simili a quelle del teorema di Bertini nelle varie formulazioni. Crediamo di offrire così la possibilità al lettore, almeno in una prima lettura della tesi, di richiamare e chiarire alcune nozioni senza rimandare ad altri testi.

Bibliografia

[1] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag: New York, 1977

[2] Kleiman S.L., *Bertini And His Two Fundamental Theorems*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II - Supplemento (1997) = alg-geom/9704018