

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica  
di  
Alessandra Fagiolini

# Schemi semi-Lagrangiani per equazioni evolutive degeneri di secondo ordine

Relatore  
Prof. Roberto Ferretti

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001  
FEBBRAIO 2002

Classificazione AMS : 35K65, 65M12, 65M15, 65M25.

Parole Chiave : Equazioni paraboliche degeneri, formule di rappresentazione stocastiche, schemi semi-Lagrangiani, consistenza, stabilità.

Alessandra Fagiolini è nata a Roma il 29 Dicembre del 1978  
ha conseguito il Diploma di Maturità Scientifica  
presso il Liceo Scientifico statale Talete di Roma nel 1997  
si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università Roma Tre  
nell'A.A. 1997-1998

## TESINE ORALI PRESENTATE

1. I polinomi irriducibili in  $\mathbb{Z}_p[x]$  (Algebra)
2. Il metodo di Gauss Seidel (Analisi Numerica)

# Indice

<b>1</b>	<b>Problema del primo ordine: metodo delle caratteristiche</b>	<b>2</b>
1.1	Formula di rappresentazione . . . . .	3
1.2	Stabilità e convergenza . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Problema del secondo ordine: la formula di Feynman-Kac</b>	<b>5</b>
2.1	La formula di Feynman-Kac . . . . .	6
2.2	Convergenza e stima dell'errore . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Test numerici per i problemi lineari del primo e del secondo ordine</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Il moto secondo curvatura media</b>	<b>10</b>
4.1	Level sets . . . . .	10
4.2	Metodi numerici per il moto secondo curvatura media . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Schema a grandi passi in tempo per l'equazione del moto secondo curvatura media</b>	<b>12</b>
5.1	Consistenza . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Test numerici per l'equazione del moto secondo curvatura media</b>	<b>15</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>22</b>

# Capitolo 1

## Problema del primo ordine: metodo delle caratteristiche

In questo capitolo esamineremo una classe di schemi semi-Lagrangiani per l'equazione del trasporto.

L'idea di base dei metodi semi-Lagrangiani è quella di ricostruire la soluzione sopra una griglia integrando numericamente l'equazione lungo le caratteristiche, che partono da ogni nodo della griglia, e ricostruendo la soluzione ai piedi delle caratteristiche. Questo significa che la soluzione in ogni nodo del reticolo sarà calcolata assemblando un metodo numerico per le equazioni differenziali ordinarie (per approssimare i punti up-wind rispetto ai nodi della griglia) con una formula di interpolazione (per ricostruire il valore della soluzione in tali punti).

Malgrado il grande numero di risultati numerici ottenuti attraverso i metodi semi-Lagrangiani non esiste ancora una teoria completa della loro convergenza.

In queste pagine considereremo sempre la soluzione come una soluzione debole in senso viscoso.

Bisogna anche aggiungere che gli schemi semi-Lagrangiani oltre al notevole vantaggio di approssimare soluzioni non regolari ovunque, non sono vincolati dalla condizione CFL (Courant-Friedrichs-Levy) che pone delle limitazioni sul passo temporale affinché gli schemi classici alle differenze convergano.

Quindi la possibilità di scegliere passi più grandi può consentire una velocità di convergenza maggiore, o, in alternativa, una minore complessità

computazionale.

Consideriamo ora il problema evolutivo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(x, t) = \lambda v(x, t) + f(x)\nabla v(x, t) + g(x) & \text{in } \Omega \times [0, T] \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $t \in [0, T]$ . Deriveremo lo schema semi-Lagrangiano dalla formula di rappresentazione della soluzione di (1.1).

Assumiamo che le funzioni  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  siano limitate e Lipschitziane.

## 1.1 Formula di rappresentazione

Attraverso la formula di rappresentazione ed alcuni semplici calcoli otteniamo

$$v(x, t) = \int_0^{\Delta t} e^{\lambda s} g(y(s)) ds + e^{\lambda \Delta t} v(y(\Delta t), t - \Delta t) \quad (1.2)$$

dove  $y(s)$  risolve

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = f(y(s)) \\ y(0) = x \end{cases} \quad (1.3)$$

Consideriamo la discretizzazione del seguente sistema dinamico:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}(s) \\ \dot{\gamma}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y(s)) \\ e^{\lambda s} g(y(s)) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

con le condizioni iniziali  $y(0) = x$ ,  $\gamma(0) = 0$ . Questa forma ci consente di utilizzare lo stesso schema per la discretizzazione sia della EDO sia della rappresentazione integrale.

Più precisamente abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \Phi_f(x) \\ \Phi_g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t \Phi(x) \quad (1.5)$$

dove abbiamo utilizzato una discretizzazione ad un passo in tempo ed abbiamo splittato la funzione  $\Phi$  in accordo con (1.4).

Passando, poi, a discretizzare rispetto alla variabile spaziale otteniamo lo schema totalmente discreto

$$\begin{cases} v_j^{k+1} &= \bar{\gamma}(x_j) + e^{\lambda\Delta t} I[V^k](\bar{y}(x_j)) \\ v_j^0 &= v_0(x_j), \end{cases} \quad (1.6)$$

dove  $I[V]$  è un operatore di ricostruzione polinomiale.

Alcuni esempi di operatori di ricostruzione sono gli elementi finiti e le ricostruzioni ENO e WENO.

## 1.2 Stabilità e convergenza

Il modo classico per provare la stabilità in  $L^2$  è l'analisi di Fourier, utilizzando la condizione di stabilità di Von Neumann. Come è noto, questa tecnica è rigorosa solo per il caso di equazioni a coefficienti costanti in  $\mathbb{R}^1$  con condizioni periodiche.

Il nostro interesse, ora, è quello di calcolare l'ordine di convergenza di  $v_j^k$  in  $L^2$ . Nel seguente teorema indicheremo con  $y_x(\cdot) = y(x, \cdot)$  la soluzione di (1.3) ed identificheremo  $y_j(\cdot) = y(x_j, \cdot)$ .

**Teorema 1.1.** *Assumiamo la consistenza e la Lipschzianità che lo schema (1.5) sia di ordine  $p$ ; inoltre siano  $f, g \in C^p(\mathbb{R}^N)$  e sia  $v_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , siano  $I[U]$  la ricostruzione polinomiale di  $v(t)$  tale che  $\|v(t_n) - I[U]\|_\infty \leq C\Delta x^r$ . Assumiamo, inoltre, che  $|\Psi|_2 \leq 1$  e che  $\|I[V]\|_2 \leq C|V|_2$ . Allora, definendo  $v_\Delta(x, t_n) = I[V^n](x)$ , per qualche costante positiva  $C$ , si ha:*

$$\|v_\Delta(t) - v(t)\|_2 \leq C(t_n) \left( \Delta t^p + \frac{\Delta x^r}{\Delta t} \right). \quad (1.7)$$

**Osservazione 1.1.** Tutti i risultati enunciati precedentemente possono essere estesi al caso più generale in cui il problema è posto in un dominio  $\Omega$  limitato.

## Capitolo 2

# Problema del secondo ordine: la formula di Feynman-Kac

In questo capitolo considereremo i metodi semi-Lagrangiani per risolvere l'equazione di diffusione-trasporto. Lo schema è basato sulla formula di rappresentazione stocastica della soluzione che ci permette di evitare lo splitting tra la parte del trasporto e quella della diffusività. Questo risultato riduce in parte la complessità computazionale ma anche la probabilità di ottenere un alto ordine di consistenza.

L'equazione che prenderemo in considerazione per descrivere la tecnica dei metodi semi-Lagrangiani e per ricavare l'analisi della convergenza è la seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(x, t) + f(x, t) \nabla v(x, t) + \lambda v(x, t) + g(x, t) \\ v(x, t_0) &= v_0(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

con  $A(\cdot, \cdot) = (a_{ij}(\cdot, \cdot))$  matrice simmetrica semidefinita positiva che include, così, il caso di una diffusione degenere.

Anche in questo caso assumiamo che le funzioni  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  siano limitate e Lipschitziane.

## 2.1 La formula di Feynman-Kac

Un approccio per risolvere l'equazione di diffusione trasporto è stato suggerito da Camilli e Falcone ([CF]); tale approccio è basato sulla formula di rappresentazione stocastica (Feynman-Kac) della soluzione di (2.1):

$$v(x, t) = E \left\{ \int_0^{t-t_0} e^{\lambda s} g(y(s), t-s) ds + e^{\lambda(t-t_0)} v_0(y(t-t_0)) \right\} \quad (2.2)$$

dove  $y(t) = y(x, t)$  è ora la soluzione dell'equazione differenziale stocastica (SDE):

$$\begin{cases} dy(s) &= f(y(s), t-s) ds + \sqrt{2} B(y(s), t-s) dW \\ y(0) &= x \end{cases} \quad (2.3)$$

$E\{.\}$  è il valore atteso calcolato rispetto alla misura di Wiener (la misura di probabilità del processo browniano  $W$  in (2.3)) e  $B$  è una matrice  $n \times n$  tale che  $BB^t = A$ .

Seguendo quanto è stato fatto per l'equazione del trasporto è conveniente discretizzare il sistema dinamico formato dall'equazione differenziale stocastica dalla parte integrale, ottenendo

$$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \Phi_f(x, \bar{y}, \Delta W) \\ \Phi_g(x, \bar{y}, \bar{\gamma}, \Delta W) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Discretizzando, poi, in spazio otteniamo lo schema totalmente discreto

$$\begin{cases} v_j^{k+1} = \sum_{i=1}^s \omega_i \{ \bar{\gamma}(x_j, \Delta_i) + e^{\lambda \Delta t} I[V^k](\bar{y}(x_j, \Delta_i)) \} \\ v_j^0 = v_0(x_j), \end{cases} \quad (2.5)$$

dove abbiamo sostituito il valore atteso con una media pesata, facendo affidamento su un "piccolo" numero di determinazioni  $\Delta_i$  alle quali associamo un peso  $\omega_i$  tale che

$$P(\Delta W = \Delta_i) = \omega_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

## 2.2 Convergenza e stima dell'errore

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(x, t) &= \nu\Delta v(x, t) + f(x)\nabla v(x, t) + \lambda v(x, t) + g(x) \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{cases} \quad (2.6)$$

Prima di esaminare la convergenza dello schema totalmente discreto (2.5) dobbiamo ricordare che la teoria della convergenza degli schemi SL, applicata alle equazioni del primo ordine, è incompleta.

Il teorema seguente ci dimostra che lo schema (2.5) è stabile se lo è la sua versione non viscosa.

**Teorema 2.1.** *Sia  $f$  un campo vettoriale regolare,  $g$  una funzione limitata. Assumiamo inoltre che lo schema della versione non viscosa di (2.6) sia  $L^\alpha$ -stabile per ogni funzione regolare  $f$ . Allora*

$$\|I[V^{k+1}]\|_\alpha \leq (1 + C\Delta t)\|I[V^k]\|_\alpha \quad (2.7)$$

con  $V^k$  soluzione di (2.5).

Passiamo, ora, a calcolare l'ordine di convergenza per lo schema (2.5).

**Teorema 2.2.** *Sia  $f$  un campo vettoriale regolare,  $g$  una funzione regolare limitata,  $v(\cdot, \cdot)$  una soluzione regolare di (2.6). Assumiamo, inoltre, che per ogni funzione regolare  $f$  e  $g$  l'equazione differenziale stocastica converga in senso debole e che  $|I[V](x) - v(x)| \leq C\Delta x^r$ . Allora l'errore locale di troncamento soddisfa la relazione*

$$L_{\Delta t, \Delta x}(x_j, t_n) = O\left(\Delta t^p + \frac{\Delta x^r}{\Delta t}\right). \quad (2.8)$$

**Osservazione 2.1.** Finora abbiamo analizzato la stabilità dello schema partendo dall'assunzione che lo schema di puro trasporto è stabile; un altro modo di provare la stabilità è quello di dare una dimostrazione diretta della convergenza attraverso l'analisi di Fourier (sebbene in un contesto semplificato dell'analisi di Von Neumann, di una dimensione in spazio, nel caso di coefficienti costanti e con una griglia in spazio infinita).

**Osservazione 2.2.** Anche in questo caso, tutti i risultati enunciati precedentemente possono essere estesi al caso più generale in cui il problema è posto in un dominio  $\Omega$  limitato.

## Capitolo 3

# Test numerici per i problemi lineari del primo e del secondo ordine

In questo capitolo vedremo un esempio di pura diffusione degenera.

Supponiamo una matrice di diffusione  $A$  non costante. Sia, ad esempio,

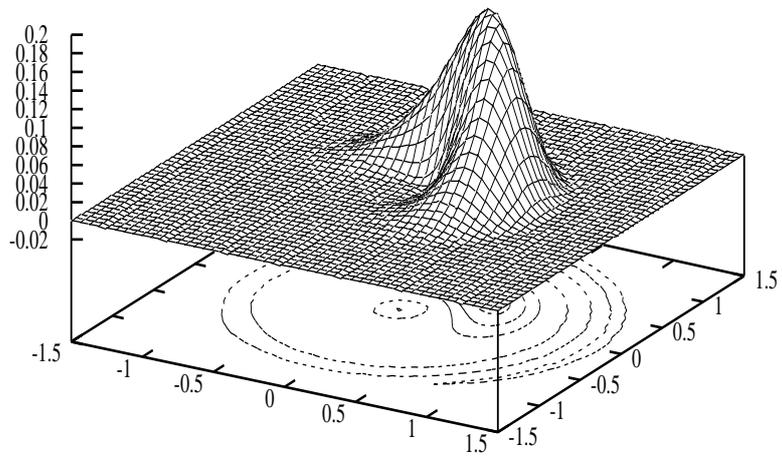
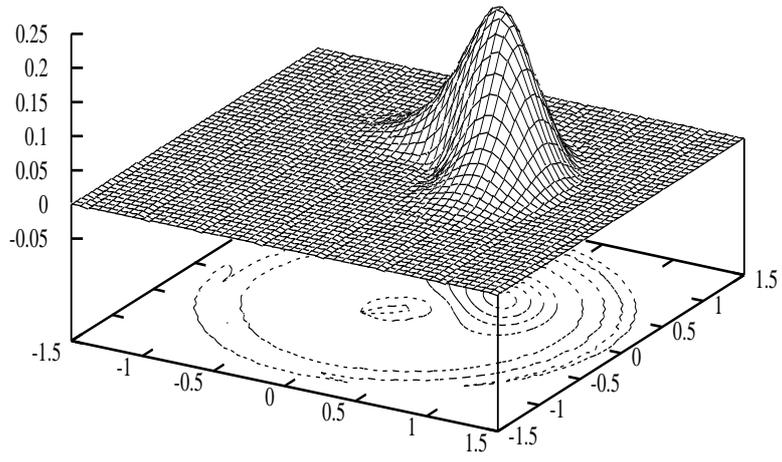
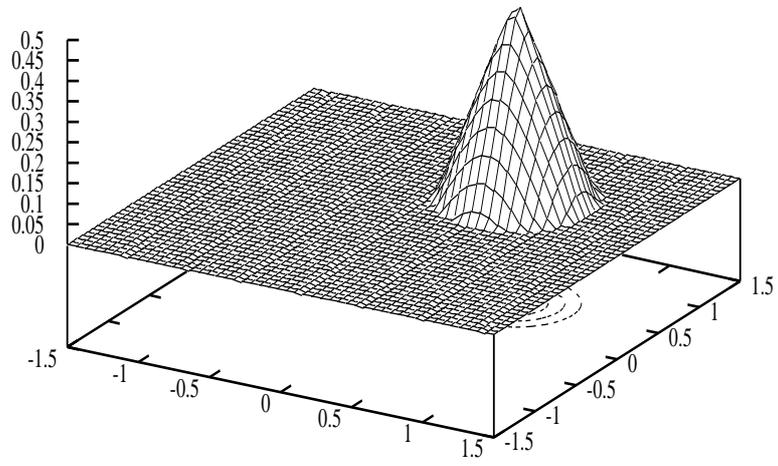
$$A = 0.5 \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix},$$

Per una matrice  $A$  presa in questo modo, ci aspettiamo che la superficie diffonda lungo circonferenze concentriche.

Si può verificare che la matrice  $A$  ha un autovalore nullo  $\lambda_1$  e che lungo l'autovettore corrispondente a  $\lambda_1$  non c'è diffusione.

Consideriamo il cono come funzione iniziale ed applichiamo a questo una diffusione generata dalla matrice  $A$  ed una funzione  $f(x, t) = 0$ .

Scegliamo un passo in tempo  $\Delta t = 0.005$ , un passo in spazio  $\Delta x = 0.06$  su un dominio  $\Omega = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$  (50 nodi) ed effettuando 20 iterazioni. Calcoliamo la soluzione approssimata mediante uno schema del secondo ordine in tempo (Heun) ed una ricostruzione cubica in spazio e otteniamo la soluzione numerica rappresentata nelle figure seguenti rispettivamente all'istante iniziale, dopo 30 iterazioni e dopo 50 iterazioni.



# Capitolo 4

## Il moto secondo curvatura media

### 4.1 Level sets

Data una ipersuperficie  $\Gamma_0$  in  $\mathbb{R}^N$ , scegliamo una funzione continua  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^N \mid g(x) = 0\}.$$

Consideriamo allora il problema parabolico:

$$v_t = \left( \delta_{ij} - \frac{v_{x_i} v_{x_j}}{|\nabla v|^2} \right) v_{x_i x_j} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \quad (4.1)$$

$$v = g \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\} \quad (4.2)$$

nell'incognita  $v = v(x, t)$  con  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $t \geq 0$ . Seguendo l'approccio di Evans e Spruck in [ES], vogliamo mostrare in questo paragrafo che l'equazione (4.1) rappresenta *il moto secondo curvatura media delle curve di livello di  $v$*  almeno in regioni dove  $v$  è regolare e il suo gradiente  $\nabla v$  non si annulla. Conseguentemente, ponendo la nostra attenzione sull'insieme  $\{v = 0\}$ , può sembrare ragionevole in base alle (4.1), (4.2) definire

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N \mid v(x, t) = 0\}$$

per ogni tempo  $t > 0$ .

Le difficoltà di questo approccio risiedono nel fatto che l'equazione dell'evoluzione secondo curvatura media è non lineare, degenera e indefinita

nei punti dove  $\nabla v = 0$ . Inoltre non è chiaro che la definizione (4.2) sia indipendente dalla scelta della funzione  $g$ . Verranno risolti questi problemi introducendo una definizione appropriata di soluzione debole di (4.1), ed a partire da questa verrà mostrato che esiste un'unica soluzione debole di (4.1), (4.2).

## 4.2 Metodi numerici per il moto secondo curvatura media

Alcuni metodi numerici per lo studio dell'evoluzione di superfici secondo curvatura media sono i metodi di reazione diffusione, il metodo di diffusione e quello basato sugli insiemi di livello.

Nei metodi *level sets* il fronte è rappresentato come una curva di livello di una funzione del piano, e questa evolve secondo un'equazione differenziale di tipo Hamilton-Jacobi in cui la velocità del fronte è funzione della curvatura.

In particolare, l'idea suggerita da Osher e Sethian è risolvere l'equazione

$$\phi_t + F_0 |\nabla \phi| = F_1(k) |\nabla \phi|. \quad (4.3)$$

discretizzando il secondo membro usando le differenze centrali e il primo membro usando gli schemi upwind. Gli autori inoltre affermano che è possibile dimostrare la stabilità di questo metodo. L'approssimazione della derivata temporale può essere fatta indifferentemente con una discretizzazione del primo ordine (schema di Eulero) o di ordine più alto (ad esempio Runge-Kutta).

## Capitolo 5

# Schema a grandi passi in tempo per l'equazione del moto secondo curvatura media

Proponiamo, ora, un nuovo schema per l'approssimazione mediante curve di livello del moto secondo curvatura media. Lo schema nasce dalla formula di rappresentazione formulata recentemente da Soner e Touzi, che ci permette di costruire schemi a grandi passi in tempo. Nelle pagine successive presenteremo uno di questi schemi e ne analizzeremo la consistenza.

Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} v_t(x, t) &= |\nabla v| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla v(x, t)}{|\nabla v(x, t)|} \right) \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

la cui soluzione può essere intesa nel senso di viscosità.

Recentemente, Soner e Touzi ([ST]) hanno proposto una formula di rappresentazione stocastica per la soluzione di un'ampia classe di equazioni di Hamilton-Jacobi del secondo ordine, inclusa la (5.1). Sebbene questa formula sia adatta per situazioni più generali, noi ci occuperemo per semplicità dell'evoluzione secondo curvatura media di una curva in  $\mathbb{R}^2$ . Quindi, scritta nel nostro caso, la formula di rappresentazione di Soner e Touzi è della forma

$$v(x, t) = E\{v_0(y(x, t, t))\} \quad (5.2)$$

dove  $y(x, t, t)$  risolve il problema stocastico a valori iniziali

$$\begin{cases} dy(x, t, s) &= \sqrt{2}\sigma(y, t, s)d\hat{W}(s) \\ y(x, t, 0) &= x, \end{cases} \quad (5.3)$$

dove

$$d\hat{W} = \begin{pmatrix} \frac{v_{x_2}}{|\nabla v|}dW_1 & -\frac{v_{x_1}}{|\nabla v|}dW_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

il differenziale di un processo di Wiener standard, e

$$\sigma(y, t, s) = \frac{\sqrt{2}}{|\nabla v(y, t - s)|} \begin{pmatrix} v_{x_2}(y, t - s) \\ -v_{x_1}(y, t - s) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Passiamo, ora, a discretizzare (5.3) in accordo con la teoria della convergenza debole degli schemi numerici per le equazioni differenziali stocastiche. L'equazione (5.3) è discretizzata dallo schema stocastico di Eulero, ed il valore atteso nella (5.2) è calcolato considerando per  $\Delta\hat{W}$  solo due determinazioni, chiamate  $\Delta\hat{W} = \pm\sqrt{\Delta t}$ , ciascuna delle quali con probabilità 1/2. Costruendo una griglia in spazio di passo  $\Delta x$ , otteniamo lo schema (scritto nel nodo  $x_j$  ed all'( $n + 1$ )-esimo passo in tempo):

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left( I[V^n](x_j + \sigma_j^n \sqrt{\Delta t}) + I[V^n](x_j - \sigma_j^n \sqrt{\Delta t}) \right) \quad (5.6)$$

dove  $\sigma_j^n$  è definita da

$$\sigma_j^n = \frac{\sqrt{2}}{|D_j^n|} \begin{pmatrix} D_{2,j}^n \\ -D_{1,j}^n \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

con  $D_{1,j}^n$ ,  $D_{2,j}^n$  e  $D_j^n$  approssimazioni numeriche rispettivamente di  $v_{x_1}(x_j, t_n)$ ,  $v_{x_2}(x_j, t_n)$  e  $|\nabla v(x_j, t_n)|$ . In (5.6) e (5.7) abbiamo sostituito il valore atteso con una media pesata, il calcolo della funzione  $v(x, t_n)$  con un'interpolazione numerica  $I[V^n](x)$ , la soluzione di (5.3) con la sua approssimazione di Eulero e le derivate in  $\sigma$  con le differenze finite.

## 5.1 Consistenza

Per ottenere la consistenza dello schema si devono imporre le condizioni

$$\|I[V^n] - v(t_n)\|_\infty \leq C\Delta x^r \quad (5.8)$$

$$|D_{1,j}^n - v_{x_1}(x_j, t_n)| \leq C\Delta x^q \quad (5.9)$$

$$|D_{2,j}^n - v_{x_2}(x_j, t_n)| \leq C\Delta x^q \quad (5.10)$$

per qualche costante positiva  $C$ . Inoltre, ricordiamo che lo schema stocastico di Eulero è del primo ordine in termini di convergenza debole; nel nostro caso questo significa che per ogni funzione regolare  $g$ :

$$\frac{1}{2}g(x + \sigma(x, \tau, 0)\sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2}g(x - \sigma(x, \tau, 0)\sqrt{\Delta t}) = E\{g(y(x, \tau, \Delta t))\} + O(\Delta t^2). \quad (5.11)$$

Sotto queste ipotesi possiamo enunciare il seguente

**Teorema 5.1.** *Sia  $v$  una soluzione regolare di (5.1), tale che  $|\nabla v| \geq c > 0$ . Assumiamo, inoltre, che siano valide (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) e che la soluzione  $v$  sia regolare rispetto alla variabile temporale e rispetto a quella spaziale. Allora, l'errore di troncamento locale dello schema (5.6)-(5.7) è della forma*

$$L_{\Delta x, \Delta t}(x_j, t_n) = O\left(\Delta t^{1/2} + \frac{\Delta x^r}{\Delta t} + \frac{\Delta x^q}{\Delta t^{1/2}}\right). \quad (5.12)$$

**Osservazione 5.1.** Nello schema precedentemente discusso non abbiamo tenuto conto dell'informazione data al tempo  $n + 1$ . Se applichiamo una correzione allo schema precedente sfruttando il valore della soluzione calcolata al tempo  $n + 1$  per ricalcolare la  $\sigma_j^n$  otteniamo

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left( I[V^n](x_j + \sigma_j^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\Delta t}) + I[V^n](x_j - \sigma_j^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\Delta t}) \right) \quad (5.13)$$

dove  $\sigma_j^{n+\frac{1}{2}}$  indica la matrice di diffusione ricalcolata con il valore della soluzione al tempo  $n + 1$ .

## Capitolo 6

# Test numerici per l'equazione del moto secondo curvatura media

Consideriamo il moto di una curva di livello

$$v_t + F(k)|\nabla v| = 0$$

descritto nel capitolo 4 nel caso in cui la velocità sia data solamente dalla curvatura ( $F(k) = k$ ).

Vediamo ora alcuni confronti tra lo schema di Osher e Sethian e quello da noi implementato nel caso della circonferenza, di cui conosciamo anche la soluzione esatta se prendiamo una funzione iniziale del tipo

$$v_0(x) = \max(-(x^2 + y^2) + R_0^2, 0)$$

la cui soluzione esatta è

$$v(x, t) = \max(-(x^2 + y^2) - 2t + R_0^2, 0).$$

### **Esempio 6.1.** *Circonferenza*

Sia  $\Omega = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ ,  $\Delta t = 0.0004$  e  $\Delta x = 0.09375$  e consideriamo la funzione iniziale descritta sopra. Possiamo quindi confrontare la soluzione numerica con la soluzione esatta (in questo caso il confronto si

effettua su  $v(x, t)$  e non sulle sue curve di livello) e calcolare l'errore di approssimazione (vedi tabelle 6.1-6.5) nel nostro caso ma anche per l'algoritmo proposto da Osher e Sethian.

Consideriamo, ad esempio, la sua curva di livello 0.1 Utilizzando l'algoritmo da noi implementato, con uno schema del primo ordine in tempo (Eulero) ed una ricostruzione cubica in spazio, otteniamo l'evoluzione approssimata della curva di livello secondo curvatura media.

Come possiamo vedere nelle figure seguenti la circonferenza iniziale tende lentamente a restringersi fino ad estinguersi, in pieno accordo con il teorema di Grayson.

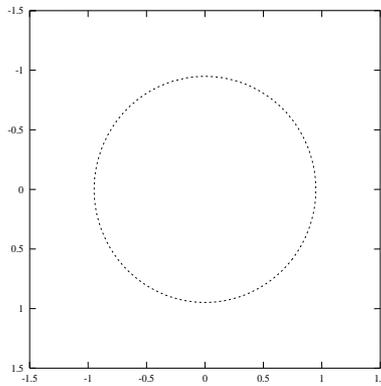


Figura 6.1: Curva di livello iniziale

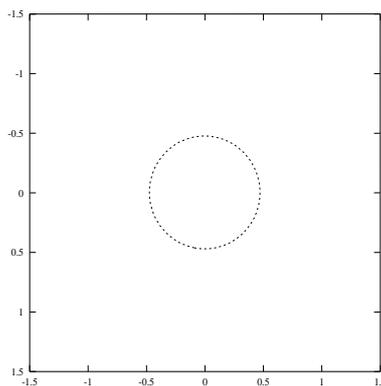


Figura 6.2: Curva di livello dopo 7 iterazioni

Nelle tabelle seguenti confrontiamo lo schema da noi implementato con quello di Osher e Sethian in termini di errore  $L^\infty$  discreto.

Numero totale di punti	$\Delta t$	Errore	Tempo CPU
$50 \times 50 \times 400$	0.001	$5.5175 \cdot 10^{-2}$	0.079s
$90 \times 90 \times 800$	0.0005	$4.0892 \cdot 10^{-2}$	0.260s

Tabella 6.1: Errore e tempo di Cpu per l'algoritmo implementato da Osher e Sethian (ordine di convergenza  $\beta = 0.43$ )

Numero totale di punti	$\Delta t$	Errore	Tempo CPU
$32 \times 32 \times 1000$	0.0004	$7.96227 \cdot 10^{-2}$	0.044s
$54 \times 54 \times 2743$	0.0001458	$6.8578 \cdot 10^{-2}$	0.592s

Tabella 6.2: Errore e tempo di Cpu per l'algoritmo da noi implementato (ordine di convergenza  $\beta = 0.15$ )

Numero totale di punti	$\Delta t$	Errore	Tempo CPU
$50 \times 50 \times 400$	0.001	$5.5173 \cdot 10^{-2}$	0.096s
$90 \times 90 \times 800$	0.0005	$3.92311 \cdot 10^{-2}$	0.733s

Tabella 6.3: Errore e tempo di Cpu per l'algoritmo da noi implementato (ordine di convergenza  $\beta = 0.49$ )

Il confronto tra i due algoritmi è stato effettuato partendo, nel primo caso, da uno stesso numero totale di punti e sfruttando per entrambi il proprio ordine di convergenza migliore, nel secondo caso considerando stesso numero di nodi e stessi passi in tempo e spazio.

Nel caso di Sethian abbiamo considerato  $\Delta x = O(\Delta t)$ , mentre nel nostro caso  $\Delta x = O(\Delta t^{1/2})$  (scelta che secondo l'analisi di consistenza fornisce l'ordine massimo) nella prima tabella e  $\Delta x = O(\Delta t)$  (per il confronto con l'algoritmo di Osher e Sethian) nella seconda tabella.

Inoltre è interessante calcolare l'errore ed il tempo di CPU per lo schema semi-lagrangiano con correzione; vediamo, a questo scopo le seguenti tabelle:

Numero totale di punti	$\Delta t$	Errore	Tempo CPU
$32 \times 32 \times 1000$	0.0004	$1.1771 \cdot 10^{-3}$	0.291s
$54 \times 54 \times 2743$	0.0001458	$3.4387 \cdot 10^{-7}$	1.137s

Tabella 6.4: Errore e tempo di Cpu per l'algoritmo con correzione (primo caso)

Numero totale di punti	$\Delta t$	Errore	Tempo CPU
$50 \times 50 \times 400$	0.001	$3.0595 \cdot 10^{-6}$	0.174s
$90 \times 90 \times 800$	0.0005	$4.0985 \cdot 10^{-6}$	1.132s

Tabella 6.5: Errore e tempo di Cpu per l'algoritmo con correzione (secondo caso)

# Bibliografia

- [AC] S.M. Allen e J.W. Cahn, *A macroscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta Metall. **27** (1979), 1085-1095
- [BG] G. Barles e Ch. Georgelin, *A simple proof of the convergence of an approximation scheme for computing Mean Curvature Motion*, SIAM J. Numer. Anal. **32** (1995), 484-500
- [BMO] J. Bence, B. Merriman e S. Osher, *Motion of multiple functions: a level set approach.*, J. Comput. Phys. **112** (1994), 334-363
- [CF] F. Camilli e M. Falcone, *An approximation scheme for the optimal control of diffusion processes*, RAIRO Model. Math. Anal. Numer. **29** (1995), 97-122
- [CGG] Y.G. Chen, Y. Giga e S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, Journ. Diff. Geom. **33** (1991), 749-786
- [ES] L.C. Evans e J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature*, Journ. Diff. Geom. **33** (1991), 635-681
- [ESS] L.C. Evans, H.M. Soner e P.E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Com. Pa. Math. **45** (1992), 1097-1123
- [FF] M. Falcone e R. Ferretti, *Discrete-time high-order schemes for viscosity solution of Hamilton-Jacoby-Bellman equations*, Num. Math. **67** (1994), 315-344

- [FF2] M. Falcone e R. Ferretti, *Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes*, SIAM J. Numer. Anal. **35** (1998), 909-940
- [G] M.A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, Journ. Diff. Geom. **26** (1987), 285-314
- [GH] M. Gage e R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, Journ. Diff. Geom. **23** (1986), 69-96
- [KP] P.E. Kloeden e E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1992.
- [OS] S. Osher e J.A. Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. **79** (1988), 12-49
- [PB] P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Bologna : U.M.I., 1984.
- [PV] M. Paolini e C. Verdi, *Asymptotic and numerical analyses of the mean curvature flow with a space-dependent relaxation parameter*, Asymptotic Analysis **5** (1992), 553-574
- [S] J.A. Sethian, *Level sets methods : evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences*, - Reprinted. - Cambridge : C.U.P., 1996.
- [S2] J.A. Sethian, *Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equations and conservation laws*, Journ. Diff. Geom. **31** (1990), 131-161
- [SG] P. K. Smolarkiewicz e G. A. Grell, *A class of monotone interpolation schemes*, J. Comput. Phys. **101** (1992), 431-440
- [SH] C.W. Shu, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, in advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*, Lecture Notes in Mathematics (CIME subseries), Springer-Verlag, **1697**, (1998), 325-432

- [ST] H.M. Soner e N. Touzi, *A stochastic representation for mean curvature type geometric flows*, - Preprint -, 2001
- [T] J.A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry.*, - Corrected reprint of the 1979 original- Springer-Verlag, New-York, Heidelberg Berlin, 1994

# Ringraziamenti

I miei ringraziamenti vanno al professore relatore Roberto Ferretti, che mi ha costantemente seguito e guidato nell'elaborazione di questa tesi fino all'esito finale.

Alla mia famiglia che non mi ha mai ostacolato nelle scelte scolastiche e mi ha sempre incoraggiato nei momenti difficili.

A Francesco, compagno di studi per tutti gli anni del liceo e dell'università, che mi ha spronato ad intraprendere lo studio della matematica e che mi è stato accanto nei momenti più difficili.

Ad Alessandra e a tutti coloro che hanno creduto in me in questi anni.