UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della
Tesi di Laurea in Matematica
presentata da

Alice Fabbri

Teoria delle valutazioni e superficie di Riemann astratte

Relatore

Prof. Marco Fontana

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005
Febbraio 2006

Classificazione AMS : 13A18, 13B22, 14A05
Parole Chiave : Valutazioni e loro generalizzazioni, Chiusura integrale di anelli e ideali, Aspetti di algebra commutativa in geometria algebrica.

La teoria delle superficie di Riemann, così come suggerisce il nome, ha avuto origine dalle idee e dal lavoro del matematico Bernhard Riemann, che ne gettò le fondamenta a partire dalla sua tesi di dottorato nel 1851. La motivazione principale, che è alla base di tale costruzione, può essere sintetizzata nel desiderio di studiare funzioni meromorfe, cercando di estenderle al più grande dominio di definizione possibile, in virtù dei risultati di unicità del prolungamento analitico, dovuti a K. Weierstrass. Per ovviare ai problemi legati allo studio di funzioni polidrome (a più valori), Riemann introdusse delle particolari superficie connesse *a più fogli* associate a tali funzioni che possono essere interpretate come un rivestimento del piano complesso $\mathbb{C}$ o della sua compattificazione, la sfera di Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Al di sopra di ogni punto di $\mathbb{C}$ (o di $\widehat{\mathbb{C}}$) distinto dai punti di ramificazione, ovvero i punti in cui più valori della funzione vengono a coincidere, vengono a sovrapporsi tanti fogli quante sono le possibili determinazioni della funzione. Incollando tali fogli in corrispondenza dei punti di ramificazione si ottiene una superficie S su cui la funzione a più valori considerata può essere ben definita come una "vera" funzione (ad un valore) dalla superficie S sul piano complesso $\mathbb{C}$ (o su $\widehat{\mathbb{C}}$).

Nonostante la prematura morte di Riemann, avvenuta nel 1866, fu continuato lo studio di tali superficie e vennero descritte in dettaglio (soprattutto da Hermann Weyl, [W-64]) le superficie associate a funzioni algebriche in una variabile, $z = z(x)$, cioè funzioni complesse definite implicitamente da una funzione polinomiale:

$$F(x,z) := a_0(x) + a_1(x)z + \cdots + a_n(x)z^n,$$

con $F(x,z) \in \mathbb{C}[x,z]$ irriducibile e nonsingolare.
A tale tipo di superficie S è associato un altro concetto fondamentale introdotto da Riemann, quello di campo delle funzioni razionali (o meromorfe) definite su S, $\mathbb{C}(S)$. Precisamente se $F(x,z)$ è la funzione polinomiale che

definisce implicitamente $z(x)$, si ha:

$$\mathbb{C}(S) = \frac{\mathbb{C}(x)[z]}{(F(x,z))},$$

campo dei quozienti dell'anello integro $\frac{\mathbb{C}[x,z]}{(F(x,z))}$.
Uno dei problemi che Riemann aveva sollevato era quello di ricercare su una data superficie di Riemann le funzioni meromorfe che posseggono al più un polo del primo ordine in d punti assegnati ($d \geq 1$) e che, al di fuori di tali punti, siano olomorfe.

Intorno al 1880 numerosi matematici, tra cui Richard Dedekind e Heinrich Weber, si adoperarono per risolvere alcuni problemi legati alle curve algebriche da un punto di vista puramente algebrico; tale periodo della storia della matematica è infatti conosciuto come il periodo dell'approccio aritmetico alle curve algebriche.
Dedekind e Weber si propongono, come prima cosa, di costruire una superficie di Riemann che abbia come campo delle funzioni razionali un campo K assegnato che sia estensione finita di $\mathbb{C}(X)$; a tal fine costruiscono una *superficie di Riemann astratta*, $S(K)$, costituita dalle classi d'equivalenza di valutazioni (discrete) di K che siano banali su $\mathbb{C}$.
I punti (o posti) di $S(K)$ inoltre si determinano abbastanza facilmente; infatti ogni valutazione (discreta) di K banale su $\mathbb{C}$ è proporzionale ad una valutazione discreta di $\mathbb{C}(X)$ banale su $\mathbb{C}$ e il fattore di proporzionalità tra queste valutazioni è un intero, detto *indice di ramificazione*. Dunque per ottenere tutti i punti di $S(K)$ è sufficiente determinare:

- tutte le valutazioni di $\mathbb{C}(X)$ banali su $\mathbb{C}$;

- per ognuna di esse le sue estensioni a K.

Al fine di determinare completamente $S(K)$ è inoltre di grande aiuto il fatto che sia possibile dimostrare che il numero di estensioni a K di una data valutazione discreta di $\mathbb{C}(X)$ è sempre finito quando K è un'estensione finita di $\mathbb{C}(X)$.

È possibile anche dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di $S(\mathbb{C}(X))$ e i punti di $\widehat{\mathbb{C}}$, considerato quindi un punto $Q \in \widehat{\mathbb{C}}$, cioè una valutazione $\mathrm{ord}_Q \in S(\mathbb{C}(X))$, se $\mathrm{ord}_{P_1}, \ldots, \mathrm{ord}_{P_n}$ sono le valutazioni di K che estendono ord_Q, allora diremo che i punti $P_1, \ldots, P_n$ di $S(K)$ sono *al di sopra* del punto Q; i punti al di sopra di ∞ saranno i *punti all'infinito*, gli altri si diranno *a distanza finita*. In questo modo $S(K)$ ha una struttura simile a quella di una superficie di Riemann, in quanto determina un rivestimento a più fogli di $\widehat{\mathbb{C}}$.
Una delle differenze sostanziali di tale costruzione astratta rispetto alla costruzione di Riemann classica risiede nell'assenza su $S(K)$ di una struttura topologica "naturale"; tale mancanza è alquanto penalizzante, considerato l'importante ruolo che nella teoria di Riemann hanno concetti legati a proprietà di continuità come quello di derivata e di differenziale.
Dedekind e Weber colmano tale mancanza definendo su $S(K)$ una topologia che ispirerà poi Zariski, all'introduzione di una topologia ormai di uso comune in geometria algebrica.
È opportuno osservare anche che gli elementi $z \in K$ tali che $\mathrm{ord}_P(z) \geq 0$ per ogni punto $P \in S(K)$ a distanza finita formano un anello, in particolare costituiscono una struttura algebrica oggi conosciuta come *dominio di Dedekind nel campo K*. Anche grazie alle proprietà di tali domini, e all'introduzione della nozione di *divisore*, Dedekind e Weber riuscirono a risolvere il problema che Riemann aveva posto riguardo alla determinazione delle funzioni meromorfe che avessero al più un polo del primo ordine in d punti assegnati.

La costruzione originale di Dedekind e Weber fornisce lo spunto per una trattazione più generale, cioè la costruzione di una superficie di Riemann astratta di un arbitrario campo K visto come D-algebra, dove D è un dominio (integro) contenuto in K. Tale superficie sarà costituita dalle classi d'equivalenza di valutazioni (non banali) di K, il cui anello associato contenga il dominio D assegnato. Chiaramente, in questo caso, non è più assicurato che le valutazioni di K siano tutte discrete e ciò comporta, nella determinazione di punti di $S(K)$, una difficoltà notevolmente maggiore rispetto all'originale teoria.

Anche nel caso generale suddetto è comunque possibile definire una struttura topologica su $S := S(K, D)$, ma sarà molto più complicato, descrivere esplicitamente una tale superficie astratta.
Dopo aver analizzato la costruzione delle superficie di Riemann astratte nel senso di Dedekind e Weber, facendo uso del linguaggio moderno, sarà nostro obiettivo caratterizzare una particolare categoria di superficie di Riemann astratte, in particolare le superficie $S := S(K, D)$, dove D è un dominio integro e K è il suo campo dei quozienti.
Utilizzando la caratterizzazione di M. Hochster (cfr. [H-69]) degli spazi spettrali dimostreremo che una tale superficie astratta è spettrale, ciò vuol dire, in particolare, che esiste un anello R, dipendente da D, tale che $S(K, D)$, dotato della topologia alla Zariski sopra menzionata, è omeomorfo allo spettro primo di R, $\mathrm{Spec}(R)$, dotato della topologia spettrale di Zariski.
Purtroppo l'utilizzo della caratterizzazione di Hochster (non costruttiva), benché porti grande vantaggio per quanto riguarda la dimostrazione del fatto che S è spettrale, non fornisce invece alcun indizio su quale sia l'anello R il cui spettro sia omeomorfo a S. Tale caratterizzazione si basa infatti su criteri esclusivamente topologici, in particolare asserisce che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è spettrale se, e soltanto se, è T_0, quasi-compatto, se i suoi aperti quasi-compatti sono chiusi per intersezioni finite e formano una base e se ogni chiuso irriducibile e non vuoto di X ammette un punto generico. Dunque risulta chiaro che anche verificando per S le suddette proprietà si è ancora lontani dalla determinazione di R con $\mathrm{Spec}(R) \cong S(K, D)$. Esplici-

tare tale anello R sarà l'obiettivo che rappresenterà la conclusione del nostro lavoro e, per fare ciò, avremo bisogno di introdurre nuovi concetti, in particolare avranno un ruolo determinante i domini di Prüfer, le $\star$-operazioni, e gli anelli di funzioni di Kronecker.
Non ci addentreremo in uno studio particolareggiato delle strutture sopra menzionate, limitandoci a dimostrare tra le loro proprietà quelle che ci saranno utili. Nello specifico:

1. se D è un qualsiasi dominio integro con campo dei quozienti K allora $S(K, D) = S(K, D')$, dove D' denota la chiusura integrale (o normalizzazione) di D;

2. su un dominio integralmente chiuso (più precisamente sul semigruppo dei suoi ideali frazionari) è sempre possibile definire la b-operazione, un particolare esempio di $\star$-operazione e.a.b. (acronimo di *endlich arithmetisch brauchbar*) ovvero che gode di buone proprietà aritmetiche;

3. considerando la b-operazione su un dominio integralmente chiuso D resta definito un anello: l'anello di funzioni di Kronecker $\mathrm{Kr}(D, b)$ del dominio D rispetto alla b-operazione;

4. l'anello di funzioni di Kronecker $\mathrm{Kr}(D, b)$ è un dominio di Prüfer e il suo campo dei quozienti è $K(X)$, inoltre la superficie di Riemann astratta $S(K(X), \mathrm{Kr}(D, b))$ è omeomorfa a $S(K, D)$;

5. se R è un dominio di Prüfer allora gli ideali primi di R sono in corrispondenza biunivoca con i sopraanelli di valutazione di R.

Grazie alla dimostrazione di queste proprietà è possibile costruire un omeomorfismo composto ψ_D della superficie di Riemann astratta $S(K, D)$ nello spettro $\mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(D', b))$:

$$\psi_D : S(K, D) \longrightarrow S(K, D') \longrightarrow S\left(K(X), (\mathrm{Kr}(D', b)\right) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(\mathrm{Kr}(D', b)\right).$$

Da tale omeomorfismo in realtà si può giungere fino a dimostrare che c'è un'equivalenza naturale del funtore che associa ad un dominio integro la sua superficie di Riemann $S(K, D)$ con la composizione dei funtori "chiusura normale", "prendere l'anello di funzioni di Kronecker rispetto alla b-operazione" e "prendere lo spettro primo".
In conclusione, benché intuitivamente siano concetti assai differenti, la superficie di Riemann astratta $S(K, D)$ con D dominio integro con campo dei quozienti K, e $\mathrm{Spec}(\mathrm{Kr}(D', b))$ sono oggetti assai simili (omeomorfi!) ed è quindi affascinante pensare che, dato comunque un dominio integro D, questo ammetta un anello associato (ben precisato oltretutto) il cui spettro determini completamente la totalità dei domini di valutazione V di K tali che $D \subseteq V \subseteq K$.
Il fascino di tale proprietà è purtroppo, in un certo senso, offuscato dal fatto che non comporti grande efficacia pratica nel contesto generale; partendo dal presupposto che è compito assai arduo quello di determinare i sopraanelli di valutazione di un arbitrario dominio D, a ciò si aggiunge il problema che determinare esplicitamente lo spettro di un anello può essere molto complicato. Basti pensare che per domini studiati in modo approfondito (e.g. $\mathbb{Z}[X]$) la determinazione dello spettro comporta un discreto lavoro aggiuntivo; è dunque chiaro che nel caso in cui sia già difficile descrivere esplicitamente gli elementi di un anello, come spesso è il caso dell'anello di funzioni di Kronecker, determinare il suo spettro diventa un compito estremamente complesso.

La tesi è articolata su 4 capitoli, di cui diamo una breve descrizione:

1. Il primo capitolo è interamente dedicato alle valutazioni; viene messa in risalto l'analogia tra tale nozione, quella di anello di valutazione e quella di posto, equivalenza che può essere sintetizzata nella tabella

seguente.

Valutazioni con gruppo di valori con notazione moltiplicativa	Valutazioni con gruppo di valori con notazione additiva	Anelli di valutazione	Posti
$v\colon K \longrightarrow \Delta_0$ $v(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$ $v(xy)=v(x)v(y)$ $v(x+y) \leq \max(v(x), v(y))$	$v\colon K \longrightarrow \Gamma_\infty$ $v(x)=\infty \Longleftrightarrow x=0$ $v(xy)=v(x)+v(y)$ $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$	$(A, \mathfrak{m}, k)$ $A \subseteq K = Qz(A)$ $x \in K \setminus A \Rightarrow x^{-1} \in A$	$P\colon K_\infty \longrightarrow k_\infty$ $P(1)=1$ e $P(\infty)=\infty$ $P(xy) \overset{*}{=} P(x)P(y)$ $P(x+y) \overset{*}{=} P(x)+P(y)$ (* se ha senso)
$v(x) \leq 1$ $v(x) \lneq 1$ $v(x)=1$ $v(x) \gneq 1$	$v(x) \geq 0$ $v(x) \gneq 0$ $v(x)=0$ $v(x) \lneq 0$	$x \in A$ $x \in \mathfrak{m}$ $x \in \mathcal{U}(A) = A \setminus \mathfrak{m}$ $x \in K \setminus A$	$P(x) \in k$ $P(x)=0$ $P(x) \neq 0$ $P(x) \neq \infty$ $P(x)=\infty$

Tabella 1: Tabella di conversione

Successivamente verranno studiate le proprietà generali delle estensioni di valutazioni e in particolare le valutazioni discrete e le loro estensioni e, più nello specifico, le estensioni delle valutazioni discrete canoniche dei campi di serie formali. Un' ultima parte del capitolo sarà destinata alla dimensione, non tanto importante quando si lavora con anelli di valutazione discreta (di dimensione 1), ma grazie alla quale sarà possibile comprendere meglio alcuni aspetti topologici delle superficie di Riemann astratte.

2. Nel secondo capitolo costruiremo esplicitamente la superficie di Riemann astratta nel senso di Dedekind e Weber, cioè la superficie di Riemann astratta di K su k con k campo algebricamente chiuso e K estensione finita di $k(X)$. Successivamente ci occuperemo degli aspetti topologici: definiremo cioè su una generica superficie di Riemann

astratta S una topologia alla Zariski e studieremo alcune delle proprietà topologiche di S, principalmente separazione e compattezza. Poi ci dedicheremo alla topologia spettrale di Zariski sullo spettro di un anello e alle sue proprietà.

Dopo aver descritto i criteri su cui si basa il Teorema di Hochster verificheremo, innanzitutto, che lo spettro primo di un anello verifica tali proprietà e mostreremo che in particolare una superficie di Riemann astratta del tipo $S(K, D)$ è spettrale nel senso di Hochster.

3. Il terzo capitolo è interamente dedicato allo studio delle strutture che ci serviranno per costruire l'omeomorfismo di cui siamo alla ricerca. Introdurremo il concetto di ideale frazionario e di ideale invertibile; quindi quello di dominio di Prüfer e di dominio di Bézout. Successivamente ci occuperemo di definire le $\star$-operazioni e, tra queste, studieremo principalmente le $\star$-operazioni e.a.b. e l'anello di funzioni di Kronecker ad esse associato. Tra le proprietà che avranno maggior peso nella trattazione successiva dimostreremo che vi è una corrispondenza biunivoca tra i sopraanelli di valuazione di $\mathrm{Kr}(D, b)$ e quelli di D, da cui seguirà l'omeomorfismo $S(K, D) \cong S(K(X), \mathrm{Kr}(D, b))$.

4. Nel quarto e ultimo capitolo determineremo esplicitamente un anello R tale che la superficie di Riemann astratta $S(K, D)$ sia omeomorfa a $\mathrm{Spec}(R)$. Per costruire tale omeomorfismo utilizzeremo le proprietà dimostrate soprattutto nei capitoli 2 e 3; mostreremo, poi, che chiusura integrale, anello di funzioni di Kronecker e spettro primo si estendono a funtori e mostreremo che la composizione di tali funtori è naturalmente equivalente al funtore "passaggio alla superficie di Riemann astratta $S(K, D)$" della categoria dei domini integri con le inclusioni.

Bibliografia

[A-69] Jimmy T. Arnold. On the ideal theory of the Kronecker function ring and the domain $D(X)$. *Canad. J. Math.*, 21:558-563, 1969.

[AAVV-88a] Autori vari. *Storia della scienza moderna e contemporanea.* Vol. II, *Dall'età romantica alla società industriale.* A cura di Paolo Rossi. UTET, Torino, 1988.

[AAVV-88b] Autori vari. *Storia della scienza moderna e contemporanea.* Vol. III, *Il secolo ventesimo.* A cura di Paolo Rossi. UTET, Torino, 1988.

[AM-69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[B-85a] Nicholas Bourbaki. *Élements de mathématique.* Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4. [Commutative algebra. Chapters 1-4], Reprint. Masson, Paris, 1985.

[B-85b] Nicholas Bourbaki. *Élements de mathématique.* Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7. [Commutative algebra. Chapters 5-7], Reprint. Masson, Paris, 1985.

[DF-86] David E. Dobbs and Marco Fontana. Kronecker function rings and abstract Riemann surfaces. *J. Algebra*, 99(1):263-274, 1986.

[DFF-87] David E. Dobbs, Richard Fedder and Marco Fontana. Abstract Riemann surfaces of integral domains and spectral spaces. *Ann. Mat. Pura Appl (4)*, 148:101-115, 1987.

[E-94] David Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geomtery.* Springer-Verlag, New York, 1994. Graduate Texts in Mathematics, No. 150.

[G-78] Robert Gilmer. *Multiplicative ideal theory.* Marcel Dekker Inc., New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[GP-74] Robert Gilmer and Tom Parker. Divisibility properties in semigroup rings. *Michigan Math. J.*, 21:65-86, 1974.

[H-69] Melvin Hochster. Prime ideal structure of commutative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, N. 142:43-60, 1969.

[K-74] Irving Kaplansky. *Commutative Rings.* The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1974.

[Ka-84] Gregory Karpilovsky. On the isomorphism of commutative group algebras. *Period. Math. Hungar.*, 15(4):259-265, 1984.

[Kl-72] Morris Klein. *Storia del pensiero matematico.* Vol. II. Dal settecento a oggi. Traduzione dall'inglese, *Mathematical thought from ancient to modern times.* Einaudi, Torino, 1991.

[Kr-43] Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VIII. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen. *Math. Z.*, 48:533-552, 1943.

[L-77] Jean Pierre Lafon. *Algèbre commutative.* Hermann, Paris, 1977. Langages géométrique et algébrique, Colection Enseignement des Sciences, No. 24.

[Le-73] William J. Lewis. The spectrum of a ring as a partially ordered set. *J. Algebra*, 25:419-434, 1973.

[O-69] Jack Ohm. Semi-valuations and groups of divisibility. *Canad. J. Math.*, 21:576-591, 1969.

[S-94] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[W-64] Hermann Weyl. *The concept of a Riemann surface*. Translated from the third German edition by Gerald R. MacLane. ADIWES International Series in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Co., In., Reading, Mass.-London, 1964.

[ZS-75a] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative algebra. Vol. 1*. Springer-Verlag, New York, 1975. With the cooperation of I. S. Cohen, Corrected reprinting of the 1958 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 28.

[ZS-75b] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative algebra. Vol. 2*. Springer-Verlag, New York, 1975. Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 29.