ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

PROPRIETÀ MOLTIPLICATIVE DELL'ANELLO DI POLINOMI A VALORI INTERI

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

SINTESI

Relatore:
Prof.ssa
Francesca Tartarone

Candidato:
Daniele Esposito
Matricola: 243707

II Sessione
Anno Accademico 2009/2010

Indice

Introduzione

I *polinomi a valori interi* sull'anello $\mathbb{Z}$ degli interi erano conosciuti da molto tempo ed erano usati frequentemente per calcolare le approssimazioni di funzioni in analisi.

Nella prima metà del XVII secolo, grazie a Pascal, veniva introdotta la nozione di *coefficiente binomiale*. Per come è definito $\binom{x}{n}$ il suo risultato è un numero intero, qualsiasi sia la scelta di x ed n. Se consideriamo allora il polinomio

$$\binom{X}{n} = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!},$$

è facile vedere che questo polinomio è a valori interi su $\mathbb{Z}$, nonostante i suoi coefficienti non appartengano a $\mathbb{Z}$.

Il fatto che tutti i polinomi a valori interi su $\mathbb{Z}$ si ottengano tramite una combinazione lineare, a coefficienti interi, dei polinomi $\binom{X}{n}$, era conosciuto già nel XVII secolo. Questo infatti veniva spesso usato nelle formule di interpolazione e Isaac Newton fu uno dei primi matematici ad usare le differenze finite [1] per approssimare radici quadrate e cubiche. Solo però nel 1919 con G. Polya e A. Ostrowski, grazie ai loro lavori entrambi intitolati "ÜBER GANZWERTIGE POLYNOME IN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPEN" (*Polinomi a valori interi in campi di numeri algebrici*) ([1],[2]), si cominciarono a studiare i polinomi a valori interi nella loro forma quasi più generale. Loro infatti considerarono i polinomi a valori interi su anelli di interi algebrici, ossia l'insieme $\mathrm{Int}(D) := \{f \in K[X]; f(D) \subseteq D\}$, dove D è l'anello degli interi di un campo numerico K (i.e., D è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K). Ad esempio, il polinomio $\frac{X(X-1)}{i+1} \in \mathbb{Q}[i][X]$ è tale che i suoi valori su ogni intero di Gauss sono ancora interi di Gauss, ossia appartengono a $\mathbb{Z}[i]$.

Si verifica facilmente che $\mathrm{Int}(D)$ è un D-modulo con struttura di anello, quindi una D-algebra.

Nel 1951 E. Strauss considerò l'insieme dei polinomi a valori interi le cui

[1]Dato un polinomio $P(X) \in K(X)$, con K campo numerico. Sia $\Delta_k P(a) = [P(a+k) - P(a)]/k$. Allora $\Delta_k^n P(a) := \Delta_k(\Delta_k^{n-1} P(a))$ è la *differenza finita divisa di ordine* n di $P(X)$.

derivate di ogni ordine sono ancora polinomi a valori interi.
Nel 1955 Nicolas G. de Bruijn caratterizzò in maniera simile i polinomi a valori interi in cui tutte le differenze finite divise del primo ordine sono ancora polinomi a valori interi.
Tra in 1971 e il 1977, grazie ai numerosi lavori di Paul-Jean Cahen e Jean Luc Chabert, lo studio sull'anello $\mathrm{Int}(D)$ raggiunge il suo attuale livello di generalità e completezza. Essi analizzarono infatti l'anello dei polinomi a valori interi quando D è un dominio qualsiasi prendendo in considerazione, in particolare, classi di anelli particolarmente interessanti come i domini Neotheriani, i domini di Krull fino e i domini di Prüfer.

In questo lavoro esporremo alcune proprietà moltiplicative degli ideali dell'anello $\mathrm{Int}(D)$ in relazione alle proprietà del dominio D.
Per studiare la struttura di anello di $\mathrm{Int}(D)$ il primo problema che affronteremo sarà quello di *localizzare* $\mathrm{Int}(D)$ in una parte moltiplicativa S di D. Infatti, in generale, si ha il contenimento $S^{-1}\mathrm{Int}(D) \subseteq \mathrm{Int}(S^{-1}D)$, quindi se f appartiene a $\mathrm{Int}(D)$ e S è una parte moltiplicativa di D allora f è un polinomio a valori interi anche nell'anello $S^{-1}D$. Se inoltre D è Noetheriano allora varrà l'uguaglianza $S^{-1}\mathrm{Int}(D) = \mathrm{Int}(S^{-1}D)$. In tal caso si dice che $\mathrm{Int}(D)$ si *comporta bene* rispetto alla localizzazione in S, ma è bene sottolineare che questa condizione non si verifica per un qualsiasi dominio D o per una qualsiasi parte moltiplicativa S di D.

Un'altra questione che analizzeremo è stabilire quando è verificata l'uguaglianza $\mathrm{Int}(D) = D[X]$. Per fare ciò useremo la regola di Cramer nel caso in cui D sia un dominio locale con campo dei residui infinito.

Considereremo successivamente il caso di domini Noetheriani, locali con ideali massimale $\mathfrak{m}$ e dotati della topologia $\mathfrak{m}$-adica. Sfruttando un analogo del teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass, proveremo che i polinomi di $\mathrm{Int}(D)$ sono funzioni uniformemente continue da $\widehat{D}$ a $\widehat{D}$, dove con $\widehat{D}$ indichiamo il completamento di D dotato della topologia $\mathfrak{m}$-adica.

Questi risultati di tipo analitico ci aiuteranno a far luce sulla struttura di $\mathrm{Int}(D)$, nel caso in cui D sia un dominio Noetheriano. Ad esempio, descriveremo gli ideali primi di $\mathrm{Int}(D)$ sopra un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di D (fatto che, in generale, non è noto) e vedremo che questi ideali sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali di $\widehat{D}$ se D è *analiticamente irriducibile*, ossia se $\widehat{D}$ è un dominio integro.

Alcuni risultati saranno più semplici da dimostrare se ci restringiamo al caso in cui D è un dominio di valutazione discreta.

Capitolo 1

Polinomi a valori interi

Supponiamo D un dominio qualsiasi con campo dei quozienti K ed iniziamo introducendo l'anello $\mathrm{Int}(D)$ dei polinomi a valori interi su D:

Definizione 1.1. Sia D un dominio e K il suo campo dei quozienti, definiamo l'*anello dei polinomi a valori interi su* D l'insieme:

$$\mathrm{Int}(D) := \{f \in K[X] \mid f(D) \subseteq D\}. \tag{1.1}$$

Introduciamo più in generale l'anello:

$$\mathrm{Int}(E, D) = \{f \in K[X] \mid f(E) \subseteq D\} \tag{1.2}$$

dei polinomi, a coefficienti in K, che mandano un sottoinsieme E di K in D. Notiamo che se è E è scelto troppo grande allora $\mathrm{Int}(E, D)$ potrebbe contenere solo costanti, cioè sarà $\mathrm{Int}(E, D) = D$.
Dopo queste osservazioni preliminari osserviamo subito che possiamo restringere il campo di studio ai soli sottoinsiemi frazionari E di K:

Proposizione 1.2. *Sia E un sottoinsieme non vuoto del campo dei quozienti K di D. Se* $\mathrm{Int}(E, D)$ *contiene un polinomio non costante allora E è un sottoinsieme frazionario della chiusura integrale D' di D.*

Consideriamo poi il modulo $\langle f(D)\rangle$ generato dai valori del polinomio f su D e osserviamo che, per ogni parte moltiplicativa S di D vale l'uguaglianza: $S^{-1}\langle f(D)\rangle = \langle f(S^{-1}D)\rangle$. Segue che i polinomi a valori interi su un dominio D sono ancora a valori interi nell'anello $S^{-1}D$ e quindi $\mathrm{Int}(D)$ è contenuto in $\mathrm{Int}(S^{-1}D)$. Nel caso in cui D sia un dominio Noetheriano vediamo che vale l'uguaglianza:

Teorema 1.3. *Sia D un dominio Noetheriano e sia S una parte moltiplicativa di D, allora:*

$$S^{-1}\mathrm{Int}(D) = \mathrm{Int}(S^{-1}D).$$

Se consideriamo il caso della localizzazione di $\mathrm{Int}(D)$ in un primo $\mathfrak{p}$ di D allora, se D è Noetheriano, varrà l'uguaglianza: $\mathrm{Int}(D)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Int}(D_{\mathfrak{p}})$.

Analizziamo ora i casi in cui $\mathrm{Int}(D)$ è banale, cioè quando $\mathrm{Int}(D) = D[X]$. È facile vedere che l'uguaglianza è vera se D è un dominio locale con campo dei residui infinito. Se inoltre $\mathfrak{p}$ è un ideale di D con campo dei residui infinito allora varrà l'uguaglianza:

$$\mathrm{Int}(D)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Int}(D_{\mathfrak{p}}) = D_{\mathfrak{p}}[X]. \tag{1.3}$$

Nel caso in cui D sia Noetheriano abbiamo la seguente caratterizzazione completa dei casi banali.

Proposizione 1.4. *Sia D dominio locale, Noetheriano e con campo dei residui finito. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di D. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\mathrm{Int}(D) = D[X]$.

(ii) *Per ogni $a \in D$, $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}_D(D/aD)$.*

(iii) $D = \bigcap_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} D_{\mathfrak{p}}$, *con* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$.

Dove con $\mathrm{Ass}_D(D/aD)$ indichiamo gli ideali primi associati del D-modulo D/aD

Definizione 1.5. Sia D un dominio con K il suo campo dei quozienti; un ideale $\mathfrak{a}$ di D è detto ideale *conduttore* di un elemento $x \in K$ se:

$$\mathfrak{a} = (D :_D x) = \{\alpha \in D \mid \alpha x \in D\}. \tag{1.4}$$

L'insieme degli ideali *primi* conduttori è l'insieme degli *ideali primi associati* del D-modulo K/D. Essi si indicano con: $\mathrm{Ass}_D(K/D)$.

Nel caso in cui D è un dominio di Krull, in modo analogo, avremo che $\mathrm{Int}(D)$ è banale se e solo se il campo dei residui $D/\mathfrak{p}$ è infinito per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di altezza uno di D.
Nello stesso modo analizziamo i casi in cui $\mathrm{Int}(D)$ non è banale.

Proposizione 1.6. *Se esiste un ideale conduttore $\mathfrak{a}$ di D tale che $D/\mathfrak{a}$ è finito allora* $\mathrm{Int}(D)$ *non è banale.*

Nel caso in cui D sia Noetheriano avremo che:

Teorema 1.7. *Sia D un dominio Noetheriano, allora* $\mathrm{Int}(D) \neq D[X]$ *se e solo se esiste un ideale primo conduttore con campo dei residui finito.*

Infine se $D = V$ è un dominio di valutazione allora avremo la seguente caratterizzazione:

Proposizione 1.8. *Sia V un dominio di valutazione.* $\mathrm{Int}(V) \neq V[X]$ *se e solo se l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di V è principale e il suo campo dei residui è finito.*

Capitolo 2

Aspetti topologici dei polinomi a valori interi

Definiamo innanzi tutto la topologia $\mathfrak{a}$-adica su un anello R, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale di R.

Definizione 2.1. Sia v una valutazione discreta su un campo K. Definiamo una distanza sul campo K tramite la funzione $d(x, y) = e^{-v(x-y)}$.

Più in generale:

Definizione 2.2. Sia R un anello e $\mathfrak{a}$ un suo ideale tale che $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{a}^k = (0)$; allora la seguente funzione:

$$\begin{cases} w(x) = \sup\{k \mid x \in \mathfrak{a}^k\}, \text{ se } x \neq 0 \\ w(0) = +\infty \end{cases}$$

è una *funzione aritmetica* su R.

Notiamo subito che w non è in generale una valutazione su R. Con la convenzione che $e^{-\infty} = 0$ allora possiamo scrivere:

$$|x| = e^{-w(x)} \quad \text{e} \quad d(x, y) = |x - y| = e^{-w(x-y)}.$$

È facile vedere che d è una *distanza ultrametrica* su R. Questa ultradistanza definisce, in modo naturale, una topologia su R chiamata topologia $\mathfrak{a}$-*adica.* Consideriamo ora un dominio D Noetheriano e un suo ideale $\mathfrak{a}$ e mostriamo che i polinomi a valori interi sono funzioni continue da D in sé stesso dotato della topologia $\mathfrak{a}$-adica:

Proposizione 2.3. *Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un dominio Noetheriano D. Ogni polinomio a valori interi $f \in \mathrm{Int}(D)$ è uniformemente continuo in D con la topologia $\mathfrak{a}$-adica.*

Inoltre $\mathrm{Int}(D)$ è contenuto nell'anello $\mathcal{C}(\widehat{D}, \widehat{D})$ delle funzioni continue dal completamento $\widehat{D}$ di D in sé stesso, sempre dotato della topologia $\mathfrak{a}$-adica. Ricordiamo un analogo del Teorema di Stone-Weierstrass:

Teorema 2.4. (Stone-Weierstrass). *Sia D un domino e φ una funzione continua, $\forall\, \epsilon > 0$ esiste un polinomio $f \in \mathrm{Int}(D)$ tale che*

$$\|f - \varphi\| < \epsilon,$$

in altre parole: per ogni intero positivo n, φ può essere approssimata con un polinomio a valori interi $f \in \mathrm{Int}(D)$ modulo $\widehat{\mathfrak{a}^n}$:

$$|f(x) - \varphi(x)| \in \widehat{\mathfrak{a}^n},\ \ \forall\, x \in \widehat{D}.$$

Mostriamo ora una condizione necessaria affinché $\mathrm{Int}(D)$ sia denso in $\mathcal{C}(\widehat{D}, \widehat{D})$ nella topologia della convergenza uniforme (*i.e.* D soddisfa un analogo del teorema di Stone-Weierstrass).

Definizione 2.5. Diremo che $\mathrm{Int}(D)$ separa i punti in $\widehat{D}$ dotato della topologia $\mathfrak{a}$-adica se, per $\alpha \neq \beta \in \widehat{D}$, esiste un polinomio $f \in \mathrm{Int}(D)$ tale che

$$\begin{cases} f(\alpha) \equiv 0 \pmod{\widehat{a}} \\ f(\beta) \equiv 1 \pmod{\widehat{a}} \end{cases}$$

Lemma 2.6. *Se $\mathrm{Int}(D)$ è denso in $\mathcal{C}(\widehat{D}, \widehat{D})$ allora $\mathrm{Int}(D)$ separa i punti in $\widehat{D}$ con la topologia $\mathfrak{a}$-adica.*

Notiamo che è possibile sostituire D con un anello locale $D_{\mathfrak{m}}$ dotato della topologia $\mathfrak{m}D_{\mathfrak{m}}$-adica

Proposizione 2.7. *Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale del dominio Noetheriano D. Allora*

(i) *la topologia $\mathfrak{m}$-adica di D è indotta dalla topologia $\mathfrak{m}D_{\mathfrak{m}}$-adica di $D_{\mathfrak{m}}$,*

(ii) *D è denso in $D_{\mathfrak{m}}$ con la topologia $\mathfrak{m}D_{\mathfrak{m}}$-adica,*

(iii) *$\mathrm{Int}(D)$ è denso in $\mathrm{Int}(D_{\mathfrak{m}})$ nella topologia $\mathfrak{m}D_{\mathfrak{m}}$-adica.*

Potremo quindi restringerci al caso di un dominio D di dimensione 1, locale, Noetheriano e con campo dei residui finito.

Abbiamo infine che un dominio D soddisfa il Teorema di Stone-Weierstrass se e solo se esso è analiticamente irriducibile ossia se $\widehat{D}$ è un dominio.

Teorema 2.8. *Sia D un dominio locale, Noetheriano e di dimensione 1 con campo dei residui finito. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) $\mathrm{Int}(D)$ *è denso in* $\mathcal{C}(\widehat{D}, \widehat{D})$ *nella topologia* $\mathfrak{m}$*-adica.*

(ii) $\mathrm{Int}(D)$ *separa i punti in* $\widehat{D}$.

(iii) D *è analiticamente irriducibile.*

Capitolo 3

Spettro primo di Int(D)

In questo capitolo studieremo gli ideali primi di $\mathrm{Int}(D)$. Facciamo prima di tutto un'analisi della dimensione di Krull di $\mathrm{Int}(D)$.
Osserviamo che valgono le seguenti disuguaglianze:

Corollario 3.1. *Sia D dominio Noetheriano allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\dim(\mathrm{Int}(D)) \geqq 1 + \dim(D).$$

Proposizione 3.2. *Sia D un dominio allora*

$$\dim(\mathrm{Int}(D)) \geq \dim(D[X]) - 1.$$

Analizziamo ora la fibra dello spettro primo di $\mathrm{Int}(D)$ sopra un ideale primo $\mathfrak{p}$ di D.

Proposizione 3.3. *Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di D tale che $D/\mathfrak{p}$ sia di cardinalità infinita. Allora gli ideali primi di* $\mathrm{Int}(D)$ *sopra $\mathfrak{p}$ sono del tipo:*

(i) $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}[X] \cap \mathrm{Int}(D)$,

(ii) $(\mathfrak{p}, q)D_{\mathfrak{p}}[X] \cap \mathrm{Int}(D)$ *(che altro non è che l'insieme dei polinomi di* $\mathrm{Int}(D)$ *che sono divisibili per q modulo $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$), per ogni polinomio q di $D_{\mathfrak{p}}[X]$ irriducibile modulo $\mathfrak{p}D_{\mathfrak{p}}$.*

Ricordando che $\mathrm{Int}(D)_{\mathfrak{p}} = D_{\mathfrak{p}}[X]$ se $D/\mathfrak{p}$ è infinito allora possiamo restringerci allo studio delle fibre sopra gli ideali massimali di D con campo dei residui finito. Mostriamo quindi, nel caso in cui D sia un dominio locale, Noetheriano, di dimensione 1 e con campo dei residui finiti, che gli ideali primi di $\mathrm{Int}(D)$ sopra un ideale massimale $\mathfrak{m}$ di D sono massimali e della forma:

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{m},\alpha} = \{f \in \mathrm{Int}(D) \mid f(\alpha) \in \widehat{\mathfrak{m}},\ \alpha \in \widehat{D}\}. \tag{3.1}$$

Usando il teorema di Stone-Weierstrass, se D è un dominio di valutazione discreta con campo dei residui finito (o più in generale se D è analiticamente irriducibile), allora gli ideali in (3.1) sono tutti distinti.
Sempre nel caso in cui $D = V$ è un dominio di valutazione discreta avremo la seguente completa caratterizzazione degli ideali primi di V:

Proposizione 3.4. *Sia V un dominio di valutazione discreta con campo dei residui finito e $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale.*

(i) *Ogni ideale primo di $V[X]$ sopra (0) si solleva in modo unico in $\mathrm{Int}(V)$: se q è un polinomio irriducibile di $K[X]$ allora l'ideale primo $qK[X] \cap V[X]$ si solleva in $\mathfrak{B}_q \in \mathrm{Int}(V)$;*

(ii) *Sopra l'ideale primo $\mathfrak{m}[X] \in V[X]$ non esiste alcun ideale primo di $\mathrm{Int}(V)$;*

(iii) *Per quanto riguarda gli ideali primi di $V[X]$ della forma $(\mathfrak{m}, g)$ di $V[X]$, dove l'immagine $\overline{g}$ di g è irriducibile in $(V/\mathfrak{m})[X]$:*

  (a) *se deg$(\overline{g}) > 1$ allora al primo $(\mathfrak{m}, g)$ non corrisponde a nessun primo in $\mathrm{Int}(V)$,*

  (b) *se $g \equiv X - a \pmod{\mathfrak{m}}$ allora tutti i primi del tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m},\alpha}$ di $\mathrm{Int}(V)$, dove $\alpha \equiv a \pmod{\widehat{\mathfrak{m}}}$, sono sopra $(\mathfrak{m}, g)$.*

Chiudiamo questo capitolo analizzando nel dettaglio lo spettro primo di $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$, uno dei più naturali e classici esempi di anello di polinomi a valori interi.

Proposizione 3.5. (i) *Gli ideali primi di $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ sopra un numero primo p sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del completamento p-adico $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ di $\mathbb{Z}$: ad ogni elemento $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}_p}$ corrisponde l'ideale massimale*

$$\mathfrak{M}_{p,\alpha} = \{f \in \mathrm{Int}(\mathbb{Z}) \mid f(\alpha) \in p\widehat{\mathbb{Z}p}\}.$$

Inoltre questi ideali primi non sono finitamente generati e quindi $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ non è Noetheriano.

(ii) *Gli ideali primi, non nulli, sopra (0) sono in corrispondenza biunivoca con i polinomi irriducibili e monici di $\mathbb{Q}[X]$. Al polinomio irriducibile q corrisponde l'ideale primo*

$$\mathfrak{B}_q = q\mathbb{Q} \cap \mathrm{Int}(\mathbb{Z}).$$

(iii) *Gli ideali* $\mathfrak{M}_{p,\alpha}$ *sono di altezza* 1 *se* $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}_p}$ *è trascendente su* $\mathbb{Q}$, *è di altezza* 2 *altrimenti: in questo caso* $\mathfrak{M}_{p,\alpha}$ *contiene il primo* $\mathfrak{B}_q$, *dove* q *è il polinomio minimo di* α. *In particolare, la dimensione di Krull di* $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ *è uguale a* 2.

(iv) *Gli ideali massimali di* $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ *sono gli ideali* $\mathfrak{M}_{p,\alpha}$.

Capitolo 4

Proprietà Moltiplicative di Int(D)

In questo capitolo analizzeremo in quali casi e sotto quali condizioni alcune proprietà moltiplicative di D passino all'anello Int(D). Ad esempio, vedremo quando Int(D) è un dominio di Prüfer.
Il primo caso che affrontiamo è quello in cui $D = V$ è un anello di valutazione discreta:

Lemma 4.1. *Sia V un dominio di valutazione discreta con campo dei residui finito, allora* Int(V) *è un dominio di Prüfer.*

Nel caso in cui D sia un dominio Noetheriano avremo invece:

Teorema 4.2. *Se D è un dominio Noetheriano e non è un campo allora* Int(D) *è un dominio di Prüfer se e solo se D è un dominio di Dedekind con campi dei residui finiti.*

Se D è un dominio di Dedekind, con campo dei residui finito, allora Int(D) è un dominio di Prüfer. Viceversa, affinché l'anello dei polinomi a valori interi sia di Prüfer, è condizione necessaria, ma non sufficiente che D sia *quasi Dedekind* (quando le localizzazioni di D in tutti i suoi ideali massimali sono un dominio di valutazione discreta) con campo dei residui finito. D'altro canto è sufficiente, ma non necessario, che valga anche l'uguaglianza $\mathrm{Int}(D)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Int}(D_{\mathfrak{m}})$, per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$.

Proposizione 4.3. *Sia D un dominio quasi Dedekind con campi dei residui finiti. Se $\mathrm{Int}(D)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Int}(D_{\mathfrak{m}})$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di D allora* Int(D) *è un dominio di Prüfer.*

Ad esempio, l'anello $\mathbb{Z}$ è un anello a ideali principali (PID), nonostante sia anche Noetheriano, di Krull, dominio a fattorizzazione unica (UFD) e

Dedekind, $\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ non ha nessuna di queste propritá. L'unica proprietà dell'anello di polinomi a valori interi su $\mathbb{Z}$ è che è di Prüfer (ogni ideale finitamente generato è invertibile) di dimensione 2.

Passiamo ora ad analizzare sotto quali ipotesi l'anello $\mathrm{Int}(D)$ è completamente integralmente chiuso.

Proposizione 4.4. *Il dominio* $\mathrm{Int}(D)$ *è completamente integralmente chiuso se e solo se* D *è completamente integralmente chiuso.*

Questo ci darà la possibilità di dare una facile risposta ad una questione originariamente posta da Krull: *è possibile ottenere dei domini completamente integralmente chiusi che non sono intersezione di domini di valutazione di rango* 1? La risposta affermativa a questa domanda era già nota, ma una scelta opportuna di anelli di polinomi a valori interi ci darà la possibilità di trovare un naturale esempio in risposta a questa domanda.

Per concludere mostriamo che $\mathrm{Int}(D)$ non è mai un dominio Noetheriano se D è Noetheriano che sia o integralmente chiuso o di dimensione 1, a meno che esso non sia banale.

Corollario 4.5. *Sia* D *un dominio Noetheriano che sia o integralmente chiuso o di dimensione* 1*. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\mathrm{Int}(D)$ *è Noetheriano,*

(ii) *ogni ideale primo di altezza uno di* D *ha campo dei residui infinito,*

(iii) $\mathrm{Int}(D) = D[X]$.

Nonostante questo, $\mathrm{Int}(D)$ soddisfa la *condizione della catena ascendete sugli ideali principali* (ACCP) se e solo se D soddisfa la stessa condizione.

Corollario 4.6. *Sia* E *un sottoinsieme infinito di* K *allora* $\mathrm{Int}(E, D)$ *soddisfa la ACCP se e solo se* D *soddisfa la ACCP.*

Bibliografia

[B] Nicolas Bourbaki. *Commutative Algebra: Chapters 1-7.* Springer, Berlino (1989)

[G] Robert W. Gilmer. *Multiplicative Ideal Theory.* Marcel Dekker Inc., New York (1972)

[AM] F. Atiyah, I. G. MacDonald. *Introduzione all'algebra commutativa.* Feltrinelli, Milano (1981)

[Ng] Masayoshi Nagata. *Local Rings.* Interscience, New York (1962)

[1] G. Polya *Uber Ganzwertige Polynome In Algebraischen Zahlkörpen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 149, 97-116. (1919).

[2] A. Ostrowski. *Uber Ganzwertige Polynome In Algebraischen Zahlkörpen.* Ebenda, 117-124. (1919).

[3] Jean-Luc Chabert. *Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, t.293/294 (1977), pag. 275-283

[4] J.-L. Chabert, P.-J. Cahen. *Coefficients et valeurs d'un polynôme.* Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 95 (1971), pag. 295-304

[5] J.-L. Chabert, P.-J. Cahen. *Integer-valued Polynomials.* American Mathematical Society, Providence (1997)

[6] R. Gilbert, W. Smith. *Finitely generated ideals of the ring of integer-valued polynomials.* J. Algebra 81, (1983), pag 150-164

[7] David Eisenbud. *Commutative Algebra (with a view toward algebraic geometry).* Springer, New York (1995), pag. 179-186

[8] Irving Kaplansky. *Commutative rings.* Polygonal, Washington (1994)

[9] M. Fontana, J. Huckaba, I. Papick. *Prüfer domains.* M. Dekker Publisher, New York, (1997)

[10] O. Zariski, P. Samuel. *Commutative algebra.* Springer, New York (1975)

[11] Michael Artin. *Algebra.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1991) pag. 28-31

[12] M. Hausner. *Problem.* The American Mathematical Monthly **66**, (1959) pag. 312

[13] R. Gilmer, W. Smith. *Finitely generated ideals of the ring of integer-valued polynomials.* Journal of Algebra **81**, (1983) pag. 150-164

[14] Bertran Walsh. *The Stone-Weierstrass Theorem.* Rutgers University, New Jersey (1999)

[15] Francesca Tartarone. *On the Krull dimension of* $\mathrm{Int}(D)$ *when* D *is a pullback.* Commutative ring theory (Fès, 1995), 457–470, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 185, Dekker, New York, (1997).

[16] J.W. Brewer, P.A. Montgomerry, P.A. Rutter, W.J. Heinzer. *Krull dimension of polynomial rings.* Lecture Notes, vol. 311, Spinger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973), pag. 26-46

[17] J.R. Hedstrom, E.G. Houston. *Pseudo-valuation domains.* Pacific J. Math. Volume 75, Number 1 (1978), pag. 137-147

[18] J. Ohm. *Some counterexamples related to the integral closure in* $D[[X]]$. Trans. Amer. Math. Soc, 122 (1966), pag. 321-333