UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea
presentata da
Filomena Di Berardo

The Tau function: a legacy of Ramanujan in number theory

Relatore
Prof. Francesco Pappalardi

ANNO ACCADEMICO 2008-2009
Ottobre 2009

AMS Classification : 11-02, 11F03, 11F11, 11F20, 11F25, 11F30, 11F33, 11M41, 11Y30

Keywords : Ramanujan's τ function, the Discriminant Δ, modular forms, Hecke operators, Ramanujan conjecture

La *funzione* τ è una funzione aritmetica che, nei primi anni del Novecento, stimolò la curiosità di un grande matematico Indiano: Srinivasa Ramanujan.

Le idee e le intuizioni di questo straordinario personaggio hanno dato un contributo sostanziale nel campo della teoria dei numeri e hanno aperto la strada a nuove ed emozionanti scoperte.

Per questo motivo scegliamo di iniziare il nostro lavoro spendendo qualche parola sulla vita di questo matematico eccezionale.

Ramanujan (22 Dicembre 1887 - 26 Aprile 1920) era un Brahmino che possiamo senza ombra di dubbio definire un genio della matematica. Egli non fu uno studente modello. La sua concentrazione era devota unicamente alla matematica. A dieci anni riscoprì, da autodidatta, i teoremi di Eulero per seno e coseno e rimase profondamente deluso quando capì che, sfortunatamente, erano già noti!

Nel contempo il suo totale disinteresse per le altre materie segnò per sempre la sua carriera: venne più volte bocciato agli esami e perse la sua borsa di studi a Madras.

Il suo genio rimase pressochè incompreso finchè ebbe circa venti anni quando, dapprima alcuni matematici indiani e Hardy poi, si resero conto che in quei quaderni, scritti da Ramanujan in un linguaggio tutto suo e in maniera tutt'altro che rigorosa, si nascondevano risultati eccezionali e straordinarie intuizioni.

Nel 1914 si trasferì a Londra dove ebbe cinque anni di ininterrotta attività. Nel 1917 si ammalò ma continuò a lavorare fino alla sua morte, nel 1920.

La religione ebbe un ruolo fondamentale nella sua vita: egli riteneva che la Dea della sua famiglia, Namagiri, fosse la principale fonte di ispirazione per il suo lavoro. Spesso ripeteva *'Un'equazione per me non ha significato, a meno che non rappresenti un pensiero di Dio.'*

Lo scopo del nostro lavoro è di descrivere, sebbene in maniera parziale, l'impatto che le idee di Ramanujan hanno avuto nel campo della teoria dei numeri. Ci soffermeremo, in particolare, su alcuni sviluppi relativi alla *funzione* τ.

Come Ramanujan, anche noi siamo incuriositi dai coefficienti di Fourier $\tau(n)$ del discriminante Δ. Ramanujan ipotizzò che:

1. la funzione τ è una funzione moltiplicativa, ovvero:
$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad \tau(n)\tau(m) = \tau(nm) \quad \text{se} \quad \gcd(n,m) = 1;$$

2. se p è un numero primo, allora
$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}},$$

disuguaglianza nota come la *congettura di Ramanujan-Petersson;*

3. sempre nel caso in cui p è primo abbiamo

$$\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}.$$

La prima di queste osservazioni fu dimostrata da Mordell nel 1917 e portò alla teoria degli operatori di Hecke nel 1937.

Il secondo fatto, che Ramanujan riteneva 'altamente probabile', fu dimostrato da Deligne nel 1973. Egli vinse la Medaglia Fields per il suo lavoro, che è stato definito 'uno dei più importanti successi della matematica.'

La terza affermazione è l'unica tra queste che fu dimostrata da Ramanujan. Questa ossevazione portò ad una teoria ben più profonda, sviluppata da Serre e Deligne, che gioca un ruolo fondamentale nella dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Nei primi due capitoli ci siamo dedicati in un primo momento allo studio della teoria delle *funzioni modulari* e delle *forme modulari,* e poi ci siamo soffermati sulla 'nostra' forma modulare, il discriminante Δ.

Due strumenti importanti per il nostro lavoro sulle funzioni e forme modulari sono il *gruppo modulare* Γ e *regione fondamentale* $\mathscr{R}_\Gamma$, che introduciamo immediatamente.

Sia $\mathscr{H}$ il semipiano superiore di $\mathbb{C}$, e sia $\tau \in \mathscr{H}$. L'equazione

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

si dice *trasformazione unimodulare* se a, b, c, d sono interi e $ad - bc = 1$.
Essa può essere rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \qquad \text{e} \quad \det A = 1$$

che deve essere identificata con la sua opposta poichè A e $-A$ rappresentano la stessa trasformazione.

L'insieme di tutte le trasformazioni unimodulari forma un gruppo, il *gruppo modulare* Γ*,* generato dalle trasformazioni

$$T\tau = \tau + 1 \qquad \text{ed} \qquad S\tau = -\frac{1}{\tau}.$$

Due punti $\tau, \tau' \in \mathscr{H}$ si dicono equivalenti sotto Γ se $\tau' = A\tau$ per qualche $A \in \Gamma$.
Questa relazione di equivalenza divide $\mathscr{H}$ in classi di equivalenza, dette *orbite.*

Selezioniamo un punto da ogni orbita, l'insieme di questi punti si dice insieme fondamentale di Γ.
Per avere migliori proprietà topologiche, modifichiamo leggermente questo concetto, e definiamo la *regione fondamentale di* Γ come il sottoinsieme aperto $\mathscr{R}_\Gamma$ di $\mathscr{H}$ tale che:

1. se $\tau \in \mathscr{H}$ allora esiste un punto τ' nella chiusura di $\mathscr{R}_\Gamma$ tale che τ' è equivalente a τ sotto Γ;

2. non ci sono due punti distinti in $\mathscr{R}_\Gamma$ che sono equivalenti sotto Γ (selezioniamo un punto da ogni orbita).

La regione fondamentale del gruppo modulare Γ è

$$\mathscr{R}_\Gamma := \{\tau \in \mathscr{H} : |\tau| > 1, |\tau + \bar{\tau}| < 1\}.$$

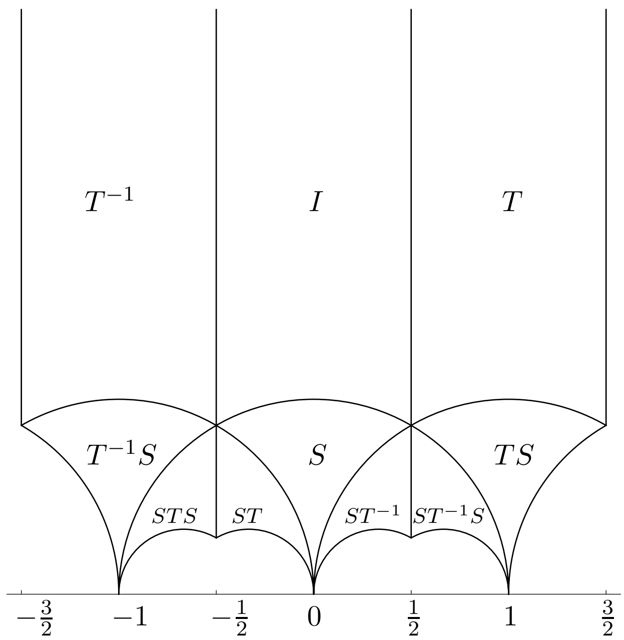

Figura 1: $\mathscr{R}_\Gamma$ e sue trasformazioni sotto gli elementi di Γ

Dunque, siamo pronti a dare la seguente definizione:

Una funzione f si dice una ***funzione modulare*** *se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *f è meromorfa in $\mathscr{H}$;*
2. $f(A\tau) = f(\tau) \qquad \forall A \in \Gamma$;
3. *l'espansione in serie di Fourier di f è*

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

La terza condizione descrive il comportamento di f in $\tau = i\infty$. Consideriamo il cambiamento di coordinate $x = e^{2\pi i \tau}$, in questo modo l'espansione in serie di Fourier di f diventa l'espansione in serie di Laurent di F, dove

$$F(x) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n) x^n.$$

Perciò, il comportamento di F vicino allo 0 descrive il comportamento di f ad $i\infty$:

- se $m > 0$ e $a(-m) \neq 0$, F ha un polo di ordine m a 0, dunque f ha un polo di ordine m ad $i\infty$;
- se $m \leq 0$ allora F è analitica in 0, perciò f è analitica ad $i\infty$.

In altre parole, la condizione 3 afferma che f ha al più un polo di ordine m ad $i\infty$.

Per le funzioni modulari vale il seguente teorema:

Sia f una funzione modulare non identicamente nulla, allora nella chiusura di $\mathscr{R}_\Gamma$ il numero degli zeri di f è uguale al numero dei suoi poli.

Il secondo capitolo inizia con la definizione delle forme modulari:

Una funzione f si dice una ***forma modulare*** *di peso k se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *f è analitica in $\mathscr{H}$*;
2. $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \quad \forall \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$;

3. *l'espansione in serie di Fourier di f è della forma*

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

Inoltre, se $a(0) = 0$, f si dice una ***cuspide*** *e il più piccolo r tale che $a(r) \neq 0$ si dice ordine dello zero di f in $i\infty$.*

In questo caso, ragionando come per le funzioni modulari, dalla terza condizione si evince che f è analitica dappertutto, in $\mathscr{H}$ e ad $i\infty$.

Per le forme modulari, vale:

[Formula del peso] *Sia f una forma modulare di peso k non identicamente nulla. Supponiamo che f abbia N zeri nella chiusura di $\mathscr{R}_\Gamma$, esclusi i vertici. Allora vale la seguente formula:*

$$k = 12N + 6N(i) + 4N(\rho) + 12N(i\infty)$$

dove $N(p)$ denota l'ordine di uno zero di f in p.

La formula del peso ci fornisce interessanti informazioni sulle forme modulari. Si capisce facilmente che le uniche forme modulari di peso $k = 0$ sono le funzioni costanti e che, le uniche forme modulari non costanti hanno peso $k \geq 4$, k pari.
Per quanto riguarda le cuspidi invece, esse hanno peso $k \geq 12$, k pari. L'unica cuspide di peso inferiore a 12 è la funzione identicamente nulla.

Vediamo alcuni esempi.

Sia $\tau \in \mathscr{H}$, le serie, assolutamente convergenti per $k > 2$,

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^k}.$$

si dicono *serie di Eisenstein.* Esse sono forme modulari di peso k per $k \geq 4$ perchè sono funzioni analitiche, soddisfano la proprietà

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$$

per gli elementi di Γ ed hanno una espansione in serie di Fourier data da:

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}$$

dove $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$ per $n \geq 1$ e ζ è la funzione ζ di Riemann.

Le relazioni

$$g_2 = 60G_4 \qquad \text{e} \qquad g_3 = 140G_6$$

definiscono gli invarianti g_2 e g_3. Il *discriminante* Δ è la funzione data da

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau).$$

Osserviamo che, grazie alle relazioni viste in precedenza, Δ è una forma modulare di peso 12. Inoltre, poichè

$$\Delta(i\infty) = g_2^3(i\infty) - 27g_3^2(i\infty) = \left(\frac{4}{3}\pi^4\right)^3 - \left(\frac{8}{27}\pi^6\right)^2 = \frac{64}{27}\pi^{12} - \frac{64}{27}\pi^{12} = 0,$$

possiamo affermare che il discriminante è una forma di tipo *cuspide,* la cui espansione in serie di Fourier è data da

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n\tau}$$

dove i coefficienti $\tau(n)$ sono interi, con

$$\begin{array}{ll} \tau(1) = 1 & \tau(6) = -6048 \\ \tau(2) = -24 & \tau(7) = -16744 \\ \tau(3) = 256 & \tau(8) = 84480 \\ \tau(4) = -1427 & \tau(9) = -113643 \\ \tau(5) = 4830 & \tau(10) = -115920 \end{array}$$

La funzione aritmetica $\tau(n)$ è la ***funzione τ di Ramanujan.***
Infine, la funzione

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}$$

è detta *funzione di Klein* o *invariante J.* Poichè $\Delta(i\infty) = 0$, J ha un polo in $i\infty$. Inoltre, essa è invariante per le trasformazioni di Γ ed ha una espansione in serie di Fourier data da

$$J(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n\tau}.$$

Pertanto J è una funzione modulare.

Nell'ultimo paragrafo del secondo capitolo cominciamo a focalizzare la nostra attenzione sul discriminante e studiamo un'altra espansione di Δ.

Sia $\tau \in \mathscr{H}$, la funzione

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n\tau})$$

si chiama ***funzione eta.***

La funzione eta, introdotta da Dedekind nel 1877, soddisfa:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau),$$

dove

$$\eta^{24}(\tau) = e^{2\pi i\tau}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in\tau})^{24} = x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24}.$$

Pertanto otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n = x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24}, \text{ se } |x| < 1.$$

Il terzo capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione della *moltiplicatività* della funzione τ.

La prima dimostrazione che vediamo è quella dovuta a ***Mordell*** che risale al 1917.

Innanzi tutto, introduciamo la funzione

$$P(\tau) = p^{11}\Delta(p\tau) + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta\left(\frac{\tau + k}{p}\right)$$

e dimostriamo che essa è una forma modulare di peso 12 con espansione in serie di Fourier data da

$$P(\tau) = (2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi pin\tau} + (2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(np)e^{2\pi i\tau n}.$$

A questo punto, consideriamo la funzione

$$Q(\tau) = \frac{P(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

L'espansione in serie di Fourier di Δ inizia con

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}e^{2\pi i\tau},$$

mentre quella di P comincia con

$$P(\tau) = (2\pi)^{12}\tau(p)e^{2\pi i\tau}.$$

Perciò Q è una forma modulare visto che è una funzione analitica dappertutto, in $\mathscr{H}$ e ad $i\infty$. Inoltre, poichè P e Δ sono entrambe forme modulari di

peso 12, allora Q è una forma modulare di peso 0. Quindi Q è una funzione modulare ed è costante perchè è analitica in $\mathscr{H}$ e ad $i\infty$.
Dunque

$$P(\tau) = \tau(p)\Delta(\tau),$$

e, uguagliando le rispettive espansioni in serie di Fourier otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(pn)x^n = \tau(p)\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n - p^{11}\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^{pn}. \tag{1}$$

Ora, per concludere che τ è una funzione moltiplicativa, è sufficiente mostrare che

$$\tau(p^\lambda n) = \tau(p^\lambda)\tau(n) \qquad \forall\lambda \in \mathbb{N},\ p \text{ primo e } \gcd(p,n) = 1.$$

Abbiamo ragionato per induzione e siamo giunti alla conclusione utilizzando l'uguaglianza (1).

La seconda parte del capitolo è dedicata allo studio degli *operatori di Hecke* e si conclude con una seconda dimostrazione della moltiplicatività della funzione tau.

Sia k un intero, denotiamo con M_k il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di tutte le forme modulari di peso k e con $M_{k,0}$ il sottospazio di tutte le cuspidi in M_k.
*L'**operatore di Hecke** su M_k è definito da*

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1}\sum_{d|n} d^{-k}\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right).$$

In particolare, se $n = p$ primo, possiamo scrivere:

$$(T_p f)(\tau) = p^{k-1}f(p\tau) + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau + b}{p}\right).$$

Il primo ed importante risultato sugli operatori di Hecke che abbiamo dimostrato è il seguente:

Se f è una forma modulare di peso k, allora $T_n f$ è una forma modulare di peso k. Se f è una cuspide, $T_n f$ è una cuspide.
In particolare, se l'espansione in serie di Fourier di f è

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)e^{2\pi i m\tau}$$

allora l'espansione di $T_n f$ è

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m)e^{2\pi i m\tau}$$

dove

$$\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{nm}{d^2}\right).$$

Essi godono inoltre delle seguenti proprietà:

1. $T_m T_n = T_{mn}$ *se* m, n *sono coprimi;*

2. *per una potenza di un primo* p

$$T_p T_{p^r} = T_{p^{r+1}} + p^{k-1} T_{p^{r-1}};$$

3. *due operatori di Hecke soddisfano la seguente formula di composizione*

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{\frac{mn}{d^2}}$$

Dalla terza segue che gli operatori di Hecke *commutano* perchè il membro di destra è simmetrico in m ed n.

Abbiamo poi focalizzato la nostra attenzione su determinate forme modulari che si comportano in maniera particolare per gli operatori di Hecke.

Sia f *una forma modulare di peso* k *e* T_n *un operatore di Hecke su* M_k. *Allora* f *si dice un'****autoforma*** *di* T_n *se esiste un numero complesso* $\lambda(n)$ *tale che*

$$T_n f = \lambda(n) f.$$

Lo scalare $\lambda(n)$ *si dice un* ***autovalore*** *di* T_n.

Un'autoforma f *si dice un'****autoforma simultanea*** *se*

$$T_n f = \lambda(n) f \qquad \forall \quad n \geq 1,$$

ovvero se f *è un'autoforma per ogni operatore di Hecke* T_n.

Infine, se l'espansione in serie di Fourier di un'autoforma f *è*

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m \tau}$$

*allora essa si dice un'****autoforma normalizzata*** *se*

$$c(1) = 1.$$

Il teorema grazie al quale abbiamo dimostrato che τ è una funzione moltiplicativa è il seguente:

Sia $f \in M_{k,0}$ $k \geq 12$. Allora f è un'autoforma simultanea e normalizzata se e solo se i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier di f soddisfano la proprietà moltiplicativa

$$c(m)c(n) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{nm}{d^2}\right) \qquad \forall n, m \geq 1. \tag{2}$$

In questo caso $c(n)$ è un autovalore di T_n.

L'espansione in serie di Fourier del discriminante $\Delta \in M_{12,0}$ è

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{2\pi i m \tau}$$

con $\tau(1) = 1$. Perciò $(2\pi)^{-12}\Delta(\tau)$ è un'autoforma simultanea e normalizzata con autovalore $\tau(n)$. Perciò la funzione tau di Ramanujan soddisfa l'equazione (2), in particolare abbiamo ottenuto che

$$\tau(nm) = \tau(n)\tau(m) \qquad \text{se} \quad \gcd(n, m) = 1.$$

La prima parte del quarto capitolo è dedicata allo studio dell'***ordine di grandezza*** della funzione τ.

I primi due risultati che vengono dimostrati sono di carattere generale e riguardano i coefficienti delle forme modulari e delle cuspidi.

Sia f una cuspide di peso k e sia

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n \tau}$$

la sua espansione in serie di Fourier. Allora

$$c(n) = O(n^{\frac{k}{2}}).$$

Sia $f \in M_k$. Se f non è una cuspide, allora:

$$c(n) = O(n^{k-1}).$$

Per quanto riguarda i coefficienti del discriminante Δ, si ottiene

$$\tau(n) = O(n^6).$$

Tuttavia Ramanujan congetturò che

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}.$$

Abbiamo dimostrato che

Sia f una forma modulare. Se i coefficienti $c(n)$ soddisfano la proprietà moltiplicativa

$$c(m)c(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

la serie di Dirichlet

$$\Phi_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$$

ha una rappresentazione come prodotto di Eulero del tipo

$$\Phi_f(s) = \prod_p \frac{1}{1 - c(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}.$$

La rappresentazione della funzione *tau* come prodotto di Eulero è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}} \quad \text{per} \quad \sigma > 7.$$

Posto $p^{-s} = T$ otteniamo:

$$1 - \tau(p)T + p^{11}T^2 = (1 - \alpha_p T)(1 + \alpha'_p T)$$

con

$$\alpha_p + \alpha'_p = \tau(p) \qquad \text{e} \qquad \alpha_p \alpha'_p = p^{11}.$$

La ***congettura di Ramanujan*** è che α_p e α'_p sono *complessi coniugati.* Questo implica che

$$|\alpha_p| = |\alpha'_p| = p^{\frac{11}{2}}$$

ovvero

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}.$$

Questa congettura fu generalizzata da Petersson per una forma di tipo cuspide f di peso k che è un'autoforma simultanea e normalizzata di un operatore di Hecke. In questo caso, possiamo scrivere

$$1 - c(p)T + p^{k-1}T^2 = (1 - \alpha_p T)(1 + \alpha'_p T)$$

La *congettura di Petersson* o la ***congettura di Ramanujan-Petersson*** dice che α_p e α'_p sono *complessi coniugati,* ovvero

$$|\alpha_p| = |\alpha'_p| = p^{\frac{k-1}{2}}$$

cioè

$$|c(p)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}.$$

Queste disuguaglianze furono dimostrate da Deligne nel 1973.

Nella seconda parte del capitolo abbiamo provato la ***congruenza*** più famosa che riguarda τ, quella ***modulo 691:***

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

che, se p è primo diventa

$$\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}.$$

Nel corso degli anni, sono state provate molte altre congruenze per la funzione τ. Tutte queste 'coincidenze' hanno destato il sospetto di molti matematici, in particolare Serre e Deligne, che hanno capito che esse erano tutt'altro che casuali. Il risultato delle loro ricerche è una teoria molto profonda che gioca un ruolo fondamentale nella dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Il nostro lavoro si conclude con una domanda:

Esistono dei primi p per cui $\tau(p) = 0$?

Nel 1947 *Lehmer* congetturò che $\tau(n) \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Al momento, non conosciamo la risposta a questa domanda. Per questo motivo pensiamo che forse il nostro lavoro non sia ancora concluso.

Bibliografia

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill Science Engineering Math, 1979.

[2] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlang, 1976.

[3] Tom M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory.* Second Edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1976.

[4] M. H. Asworth. *Congruence and identical properties of modular forms*, D. Phil. Thesis, Oxford.

[5] R.P Bambah. *Two congruence properties of Ramanujan's function* $\tau(n)$. London Mathematical Society Journal, Vol. 21, pp.91-93, 1946.

[6] F. Beukers. *Modular Forms.* www.math.uu.nl/people/beukers/modularforms/modularformscript.pdf.

[7] D. X. Charles *Computing the Ramanujan Tau Function.* Ramanujan Journal, 11 (2): 221-224, 2006.

[8] P. Deligne. *La conjecture de Weil. I.* Inst. haut. Etud sci., Publ. Math. 43 pp. 273-307 1973, Z. 287, 14001, 1974.

[9] P. Deligne. *Formes modulaires et représentations l-adiques.* Séminaire Bourbaki, 11. Exp. No. 355, 34 p. 1968-1969.

[10] J. Funke. *Modular Forms.* www.maths.dept.shef.ac.uk/magic/course.php?id=48 .

[11] H. Gupta. *A congruence property of* $\tau(n)$. Indian Academy of Sciences, Section A, Vol. 24, pp. 441-442, 1946.

[12] G. H. Hardy. *Ramanujan. Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work.* Third Edition. AMS Chelsea Publishing, 1978.

[13] G. H. Hardy. *Note on Ramanujan's Arithmetic function* $\tau(n)$. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 23 pp. 675-680, 1927.

[14] B. Jordan and B. Kelly. *The Vanishing of the Ramanujan Tau Function.* Preprint, 12 Mar 1999.

[15] R. Kanigel. *L'Uomo Che Vide l'Infinito. La vita breve di Srinivasa Ramanujan, Genio della Matematica.* Rizzoli, 2003.

[16] O. Kolberg. *Congruences for Ramanujan's function* $\tau(n)$. Arbok Univ. Bergen Mat. Natur. Ser., no. 11, pp. 1-8, 1962.

[17] S. Lang. *Complex Analysis.* Fourth Edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1999.

[18] S. Lang. *Introduction to Modular Forms.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlang, 1976.

[19] D. H. Lehmer. *The Primality of Ramanujan's tau-function.* Amer. Math. Monthly, Vol. 72, No. 2, Part 2: Computers and Computing pp. 15-18, 1965.

[20] D. H. Lehmer. *The Vanishing of Ramanujan's function* $\tau(n)$. Duke Math. J., 14, pp. 483-492, 1943.

[21] D. H. Lehmer. *Ramanujan's function* $\tau(n)$. Duke Math. J., 10, pp. 429-433, 1947.

[22] D. H. Lehmer. *Notes on some arithmetical properties of elliptic modular functions.* Unpublished lecture notes.

[23] Yu. I. Manin, A. A. Panchishkin. *Introduction to modern number theory.* Second edition. Springer, 2005.

[24] J. S. Milne. *Modular Functions and Modular Forms.* www.jmilne.org/math/ .

[25] L. J. Mordell *On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 19 pp. 117-124, 1917.

[26] S. Ramanujan. *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson.* AMS Chelsea Publishing, 1927.

[27] S. Ramanujan. *On Certain Arithmetical functions.* Trans. Cambridge Phil. Soc. 22 pp. 159-154 1, 4, 1916.

[28] K. G. Ramanathan. *Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$ II.* J. Indian Math. Soc., 9, 55-59 , 1945.

[29] R. A. Rankin. *Contributions to the Theory of Ramanjan's function $\tau(n)$.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 35 pp. 351-372, 1939 and vol. 36 pp. 150-151, 1940.

[30] J.-P. Serre. *A Course in Arithmetic.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlang, 1973.

[31] J.-P. Serre. *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* New York: Benjamin, 1968.

[32] J.-P. Serre. *Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan.* Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, 9 no. 1. Exposé No. 14, 17 p. 1967-1968.

[33] H. P. F. Swinnerton-Dyer. *On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms.* Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972). Lecture Notes in Math., Vol. 350. Springer, Berlin, 1Ű55, 1973.

[34] R. Vaughan. *Number Theory II.* www.math.psu.edu/rvaughan/568det.html .

[35] G. N. Watson. *A Table of Ramanujan's Function $\tau(n)$.* Proceedings of the London Mathematical Society vol. 51, 1949.

[36] J. R. Wilton. *Congruence properties of Ramanujan's function $\tau(n)$.* Proc. London Math. Soc., 31, pp. 1-10, 1930.