UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE NATURALI

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica
di

Chiara Del Vescovo

Punti razionali su superfici di del Pezzo nonsingolari

Sintesi

Relatore

Prof. Angelo Felice Lopez

La Candidata | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2005 - 2006
23 MAGGIO 2007

Classificazione AMS: primaria 14G05; secondaria 11G50,11D45
Parole Chiave: Geometria algebrica, Problemi aritmetici, Geometria Diofantea, Punti razionali, Superfici di del Pezzo.

Quando ci si riferisce ad un *problema diofanteo* su $\mathbb{Q}$, si intende la risoluzione a valori in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{Z}$ di un sistema finito di equazioni polinomiali

$$F_i(X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (1 \leq i \leq m) \tag{1}$$

in cui ogni F_i ha coefficienti in $\mathbb{Q}$. La parola diofanteo si riferisce al matematico ellenico del III sec. DC, Diofanto di Alessandria d'Egitto, che studiò tali equazioni e fu uno tra i primi matematici ad introdurre il simbolismo nell'algebra.

Nel corso dei secoli i matematici hanno affrontato e risolto alcuni singoli problemi, ma questo tipo di approccio è risultato non essere troppo proficuo. La formulazione di una teoria generale sulle equazioni diofantee avviene soltanto nel ventesimo secolo, quando la teoria dei numeri incontra la nascente geometria algebrica. Sorge così la *geometria diofantea*, in cui non si studiano più singoli sistemi di equazioni, ma classi di problemi aritmetici, definite delle varietà associate ai sistemi. La nozione principale della geometria diofantea è quella di *punto* $\mathbb{K}$*-razionale*, ovvero un vettore a valori in un campo $\mathbb{K}$ non algebricamente chiuso che sia soluzione del sistema di equazioni polinomiali.

La tesi presentata ha come obiettivo la descrizione dello stato dell'arte della geometria diofantea, in particolare riferendosi al caso speciale delle superfici dette di del Pezzo.

Consideriamo un problema diofanteo, come in (1). Senza perdita di generalità, possiamo ovviamente richiedere che i coefficienti dei polinomi siano interi, moltiplicando ogni equazione per il minimo comune multiplo dei denominatori. Alcune tra le domande più ovvie da porsi sono:

1. Esistono delle soluzioni? C'è un algoritmo che possa determinare quando un problema diofanteo abbia delle soluzioni, in $\mathbb{Z}$ o in $\mathbb{Q}$?

2. Il problema ha un numero finito o infinito di soluzioni?

3. Si possono trovare tutte le soluzioni, in teoria? C'è un algoritmo per determinarne almeno una?

4. Possiamo descrivere l'insieme di tutte le soluzioni, o almeno la sua struttura?

Noi non svilupperemo il problema fondamentale dell'esistenza o meno di punti razionali su una varietà; in questa sede osserviamo soltanto che gli strumenti principali per la risoluzione di questo tipo di problemi sono coomologici. Osserviamo però che dato un polinomio $F(x_0, \ldots, x_m)$ a coefficienti razionali, possiamo sempre trovare un campo $\mathbb{K}$ in cui abbia una soluzione: è sufficiente infatti calcolare una soluzione γ del polinomio $F(1, \ldots, 1, x_m)$, e porre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\gamma]$, perciò esiste sempre un campo in cui la varietà definita da F ha supporto non vuoto. Questa è la motivazione che porta alla definizione, nel primo capitolo, della nozione di *altezza di un punto relativa al campo di numeri* $\mathbb{K}$, denotata con il simbolo $h_{\mathbb{K}}$. In ogni caso, noi lavoreremo principalmente con varietà definite su $\mathbb{Q}$ e immerse in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$; in questo caso, l'altezza $h = h_{\mathbb{Q}}$ di un punto razionale $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ può essere illustrata facilmente: $\mathbf{x}$, infatti, può essere scritto in maniera unica nella forma

$$\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n) \text{ con } x_i \in \mathbb{Z} \text{ per ogni } i \text{ e } \mathrm{MCD}(x_0, \ldots, x_n) = 1.$$

Definiamo allora l'*altezza di* $\mathbf{x}$ come la quantità

$$h(\mathbf{x}) = \max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\}.$$

È chiaro che, per ogni $T \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) \, : \, h(\mathbf{x}) \leq T\}$$

è finito, dato che esiste solo un numero finito di interi $x \in \mathbb{Z}$ che soddisfano $|x| \leq T$.

Tale definizione di altezza permette di calcolare quanti punti razionali ci siano nel "cubo" il cui lato misura T; questo sarà il nostro principale strumento di investigazione, dato che ci occuperemo principalmente della seconda domanda, o più precisamente, studieremo come il numero di punti razionali cresce all'aumentare del lato del cubo (cioè quando $T \to \infty$). Definiamo infatti la *funzione di conteggio* $\mathcal{N}$:

Definizione 1: La *funzione di conteggio di* $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è la quantità

$$\mathcal{N}(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), T) = \#\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,:\, h_{\mathbb{K}}(\mathbf{x}) \leq T\}.$$

La locuzione "densità delle soluzioni", frequente in geometria aritmetica, assume perciò un significato in questo senso.

Il problema di studiare questa funzione è stato completamente risolto da Schanuel nel 1979, nel suo articolo *Heights in number fields* [Sch79]; egli infatti ha calcolato molto accuratamente la funzione di conteggio su uno spazio proiettivo. Ricordiamo che la *funzione zeta di Riemann* è:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{Z} \text{ primo}} (1 - p^{-s})^{-1} \qquad \text{per } Re(s) > 1.$$

Nel caso in cui si conti il numero dei punti $\mathbb{Q}$-razionali, il teorema di Schanuel può essere formulato come segue:

Teorema 2: Sia $n \geq 1$ un intero, $T \in \mathbb{R}$, e sia $\mathcal{N}(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}, T))$ la funzione di conteggio su $\mathbb{P}^n$ relativa alla funzione altezza $h : \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}$. Allora:

$$\mathcal{N}(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}), T) = \begin{cases} \frac{6}{\pi^2} T^2 + O(T \log T) & \text{se } n = 1 \\ \frac{2^n}{\zeta(n+1)} T^{n+1} + O(T^n) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel Paragrafo 1.4 enunciamo la versione generale del teorema nel caso di estensioni finite di $\mathbb{Q}$.

Il passo successivo nella geometria diofantea consiste nello studio della funzione di conteggio relativa al numero di punti razionali che giacciono su una varietà:

Definizione 3: Sia $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietà quasi-proiettiva data da un insieme finito di polinomi omogenei $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ ottenuta eliminando la varietà definita dai g_i dalla varietà definita dai polinomi f_i; equivalentemente,

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \,:\, f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_r(\mathbf{x}) = 0 \text{ e almeno uno dei } g_i(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$

Possiamo allora definire l'*insieme dei punti* $\mathbb{K}$*-razionali di* V:

$$V(\mathbb{K}) \quad = \quad \{\mathbf{x} = [x_0, \ldots, x_n] \in V \,:\, x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Posto inoltre $\mathbf{R}$ per l'anello degli interi di $\mathbb{K}$, definiamo l'*insieme dei punti* $\mathbf{R}$*-interi di* V, denotato $V(\mathbf{R})$, come l'insieme

$$V(\mathbf{R}) \quad = \quad \{\mathbf{x} = [x_0, \ldots, x_n] \in V \ : \ x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

Se V è una varietà proiettiva, allora lo stesso $V(\mathbb{K})$ è un insieme di punti interi; dato che non abbiamo g_i, infatti, ogni punto in $V(\mathbb{K})$ può essere scritto in coordinate omogenee a valori in $\mathbf{R}$. Quindi, per varietà proiettive, le nozioni di punto intero e razionale coincidono.

Analogamente a quanto fatto per spazi proiettivi, vogliamo contare i punti razionali che appartengono alla varietà V e si trovano allo stesso tempo all'interno di un cubo di lato T; se V è immerso in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$, o più in generale se abbiamo un morfismo $\phi : V \to \mathbb{P}^n$, possiamo definire la funzione altezza su V:

$$h_\phi : V(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow [1, \infty)\,, \quad \text{tale che} \quad h_\phi(\mathbf{x}) = h(\phi(\mathbf{x})),$$

dove $h : V(\overline{\mathbb{Q}}) \to [1, \infty)$ è la funzione altezza sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$. Quindi, se abbiamo un divisore D privo di punti base, possiamo definire un morfismo $\phi_D : V \to \mathbb{P}^n$, e una funzione altezza associata:

$$h_{V,D}(\mathbf{x}) = h(\phi_D(\mathbf{x})) \qquad\qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in V(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Più in generale, se D è un divisore su V, possiamo scrivere D come differenza di divisori privi di punti base $D = D_1 - D_2$, e quindi definire un morfismo ϕ_{D_i} di V in $\mathbb{P}^n$ per $i = 1, 2$.

Definizione 4: Per ogni divisore D su V, la *funzione altezza di Weil* è

$$h_{V,D}(\mathbf{x}) = h_{V,D_1}(\mathbf{x})/h_{V,D_2}(\mathbf{x}) \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in V(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Le proprietà di tale funzione sono descritte nel teorema della *macchina altezza di Weil*. Infine, possiamo definire una funzione di conteggio per i punti su V:

Definizione 5: Sia V una varietà proiettiva, $V(\mathbb{K})$ l'insieme dei punti $\mathbb{K}$-razionali di V e D un divisore su V. La *funzione di conteggio per* V relativa all'altezza di Weil h_D, denotata $\mathcal{N}_V(D, T)$, è definita da

$$\mathcal{N}_V(D, T) = \#\{\mathbf{x} \in V(\mathbb{K}) \ : \ h_D(\mathbf{x}) \leq T\}.$$

Per curve proiettive $\mathcal{C}$ l'ordine di crescita di $\mathcal{N}$ è stato ampiamente studiato e questo problema totalmente risolto: dipende dal comportamento del divisore canonico $K_{\mathcal{C}}$; c'è infatti una tricotomia che caratterizza la loro classificazione; abbiamo:

- Curve di genere $g = 0$; il divisore anticanonico $-K_{\mathcal{C}}$ di questo tipo di curve è ampio, e tali curve sono isomorfe a $\mathbb{P}^1$; vale quindi un risultato analogo al Teorema di Schanuel **2**, ovvero l'ordine di crescita di $\mathcal{N}$ è quadratico rispetto all'altezza standard.

- Curve di genere $g = 1$, anche dette *curve ellittiche*. Il divisore canonico di tali curve E è linearmente equivalente a 0; il teorema di Mordell-Weil, provato per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ da Mordell nel 1922 e nel caso generale da Weil nel 1928, afferma che se l'insieme $E(\mathbb{K})$ non è vuoto, allora è un gruppo abeliano finitamente generato; il teorema di Néron, invece, dà una precisa descrizione della funzione di conteggio di E:

  Teorema 6: Sia $\mathbb{K}$ un campo di numeri, $E/\mathbb{K}$ una curva ellittica, e sia $\Gamma \subset E(\mathbb{K})$ un gruppo finitamente generato di rango r. Allora, esiste una costante $a > 0$, dipendente da $E/\mathbb{K}$, Γ e dall'altezza usata per contare, tale che
  $$\mathcal{N}_E(T) = a(\log T)^{r/2} + O\Big((\log T)^{(r-1)/2}\Big).$$
  Quindi, l'ordine di crescita di $\mathcal{N}$ è logaritmico.

- Curve di genere $g \geq 2$, il cui divisore canonico $K_{\mathcal{C}}$ è ampio; nel 1983 Faltings provò che $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ è un insieme finito.

Per varietà di dimensione superiore, richiamiamo i seguenti fondamentali risultati:

- Una varietà A si dice *abeliana* se possiede anche una struttura di gruppo abeliano. In effetti, il teorema di Mordell-Weil asserisce che $A(\mathbb{K})$ è finitamente generato, mentre quello di Néron descrive la funzione di conteggio di una varietà abeliana.

- Abbiamo già visto il comportamento della funzione $\mathcal{N}$ per spazi proiettivi; ora, però, vogliamo studiare la funzione $\mathcal{N}$ indotta dall'altezza di Weil relativa al divisore anticanonico $-K_{\mathbb{P}^n}$; tale divisore è linearmente equivalente a $(n+1)H$, con H divisore iperpiano; una delle proprietà delle funzioni di Weil, chiamata *additività*, afferma che $h_{-K}(\mathbf{x}) = h_H(\mathbf{x})^{n+1}$. Il teorema di Schanuel **2** può essere quindi riformulato come segue:

Teorema 7: Si ha:

$$\mathcal{N}_{\mathbb{P}^n}((n+1)H, T) = aT(1 + O(1)).$$

Gli spazi proiettivi sono un caso speciale delle varietà di Fano, definite come varietà con divisore anticanonico ampio. Nel 1989 Manin ha notato che per tali varietà, se l'altezza usata per contare viene indotta da $-K_V$, la relativa funzione di conteggio $\mathcal{N}$ sembra avere una proprietà di crescita lineare, e ha quindi formulato la seguente

Congettura 8: (Manin) Se V è di Fano e $V(\mathbb{Q})$ è denso in V rispetto alla topologia di Zariski, allora esiste un sottoinsieme aperto di Zariski $U \subseteq V$ tale che

$$\mathcal{N}_U(-K_V, T) = cT(1 + O(1)).$$

Sono stati proposti molti raffinamenti di tale congettura: consideriamo ad esempio una varietà nonsingolare V (non necessariamente di Fano); definiamo $\beta_V(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{\log \mathcal{N}_V(T)}{\log T}$ (assumendo che tale limite esista) e $\alpha(D) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : r[D] + [K_V] \in \Lambda_{\mathit{eff}}(V)\}$ (chiamato anche *costante di Nevanlinna di* D). Allora Manin e Batyrev hanno proposto la seguente generalizzazione alla Congettura **8**:

Congettura 9: (Batyrev, Manin) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un aperto di Zariski $U \subseteq V$ tale che $\beta_U \leq \alpha(V) + \varepsilon$.

Questa affermazione è supportata da alcuni risultati; notiamo, infatti, che per curve $\mathcal{C}$ di genere $g \geq 1$ la costante di Nevanlinna $\alpha(\mathcal{C})$ è 0 e l'ordine di crescita di $\mathcal{N}$ è meno che lineare (logaritmico per curve di genere $g = 1$, mentre $\mathcal{N}$ è limitato per curve di genere $g \geq 2$).

Noi ci occuperemo principalmente di varietà di Fano di dimensione 2, dette anche *superfici di del Pezzo*. Nel Capitolo 3 descriviamo accuratamente la costruzione della cubica in $\mathbb{P}^3$, che si rivela essere una superficie di questo tipo. Un risultato classico afferma che ogni superficie di del Pezzo liscia e irriducibile si ottiene o come scoppiamento del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ in r punti in posizione generale per qualche $r = 0, \dots, 8$, oppure è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; inoltre, tale superficie può essere immersa in $\mathbb{P}^d$ come una superficie di grado $d = 9 - r$; la loro proprietà più importante è che ognuna di esse contiene un numero finito di rette.

D'ora in poi studieremo superfici di del Pezzo S_d di grado $d \in \{3, \dots, 8\}$ ottenute come blow-up del piano proiettivo; denotato con $\mathbb{L}$ il campo di spezzamento per le rette (finite) di S_d, definiamo allora il *gruppo di Picard algebrico* come l'insieme

$$\mathrm{Pic}(S_d) = \mathrm{Pic}_{\overline{\mathbb{Q}}}(S_d)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})},$$

contenente l'insieme degli elementi di $\mathrm{Pic}_{\overline{\mathbb{Q}}}(S_d)$ che rimangono fissati tramite l'azione del gruppo di Galois di $\mathbb{L}$ su $\mathbb{Q}$. Il rango di $\mathrm{Pic}(S_d)$ sarà denotato con ρ_d.

Contando punti $\mathbb{K}$-razionali, per un certo campo $\mathbb{K}$, notiamo che quando almeno una retta è definita su $\mathbb{K}$, per il teorema **2** di Schanuel, si ha un ordine di crescita della relativa funzione di conteggio $\mathcal{N}$ quadratico; per evitare il problema del campo di definizione delle rette, perciò, considereremo il sottoinsieme aperto $U_d = S_d \setminus \{L_1^d, \dots, L_{i(d)}^d\}$ dove le L_i^d sono tutte le rette contenute in S_d.

La Congettura di Manin **8** può essere quindi riformulata, per superfici di del Pezzo, come segue:

Congettura 10: (Manin) Supponiamo che $S_d \subset \mathbb{P}^d$ sia una superficie di del Pezzo di grado d come sopra. Allora esiste una costante $a(S_d, H) > 0$ tale che

$$\mathcal{N}_{U_d}(T) = a(S_d, H) T (\log T)^{\rho_d - 1} (1 + o(1)) .$$

Questa congettura è stata verificata in molti casi:

Definizione 11: Una varietà proiettiva liscia V è detta *torica* se contiene un sottoinsieme U isomorfo ad un toro (ovvero, se $U \cong \mathbb{G}_m^s$ su $\overline{\mathbb{K}}$) e con la proprietà che la legge di gruppo $U \times U \to U$ si estenda ad un morfismo $U \times V \to V$.

In altre parole, c'è un'azione di un gruppo algebrico di U su V. Batyrev e Tschinkel hanno provato nell'articolo [BT98] il seguente risultato:

Teorema 12: La Congettura di Manin (analoga a **10**) è verificata per ogni varietà di Fano torica.

Inoltre, Derenthal ha provato ([Der06, Proposition 8]) che:

Teorema 13: Tutte le superfici di del Pezzo di grado $d \geq 6$ sono toriche. Quindi, la congettura di Manin è verificata per superfici di del Pezzo di grado $d \geq 6$.

Per superfici di del Pezzo di grado 5, invece, il risultato più rilevante si deve a de la Bretèche [dlB02], che ha provato la congettura di Manin nel caso di superfici *split*, che si hanno quando tutte le loro rette L_i sono definite su $\mathbb{K}$:

Teorema 14: Per ogni $T \geq 3$ esiste una costante $a_5 > 0$ tale che:

$$\mathcal{N}_{U_5}(T) = a_5 T (\log T)^4 \left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log T}\right)\right).$$

Noi partiremo da questo risultato per studiare, seguendo il secondo paragrafo di [MT93], la funzione di conteggio $\mathcal{N}_{U_d}$ sulle quartiche e sulle cubiche split di del Pezzo, e troveremo induttivamente che:

Teorema 15: Esistono delle costanti positive a_4 e a_3 tali che:

$$\beta_{U_4}(-K_4) \leq \frac{5}{4}\gamma_5 = \frac{5}{4}, \text{ quindi } \mathcal{N}_{U_4}(T) = a_4 T^{\frac{5}{4}+\varepsilon};$$

$$\beta_{U_3}(-K_3) \leq \frac{4}{3}\gamma_4 = \frac{5}{3}, \text{ quindi } \mathcal{N}_{U_3}(T) = a_3 T^{\frac{5}{3}+\varepsilon}.$$

Trovare soluzioni intere di forme del tipo $F_1 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ è comprensibilmente un problema piuttosto famoso, dato che sembra essere il successivo passo logico dopo l'equazione pitagorica $a^2 + b^2 = c^2$. Quindi, per motivi storici i matematici si sono concentrati sulle soluzioni di tale problema. Il miglior risultato finora disponibile, dovuto a Heath-Brown [HB97], è:

Teorema 16: Sia $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ una superficie cubica contenente 3 rette complanari ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 definite su $\mathbb{Q}$. Allora:

$$\mathcal{N}_{U_3}(-K_3, T) \ll T^{\frac{4}{3}}.$$

Con una breve descrizione della prima parte di questa dimostrazione, si conclude la tesi.

Riferimenti bibliografici

[Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to analytic number theory.* Springer-Verlag, New York, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.

[BM90] V. V. Batyrev and Yu. I. Manin. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3):27–43, 1990.

[Bro03] T.D. Browning. Counting rational points on del pezzo surfaces of degree five. In *Session on analytic number theory and Diophantine equations*, volume 360 of *Bonn. Math. Schrift.* 2003.

[Bro05] T.D. Browning. An overview of Manin's conjecture for del Pezzo surfaces. arXiv:math/0511041v2 [math.NT], pages 1–16, 2005.

[Bro07] T.D. Browning. The Manin conjecture in dimension 2. arXiv:0704.1217v1 [math.NT], pages 1–57, 2007.

[BT96] Victor V. Batyrev and Yuri Tschinkel. Rational points on some Fano cubic bundles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(1):41–46, 1996.

[BT98] Victor V. Batyrev and Yuri Tschinkel. Manin's conjecture for toric varieties. *J. Algebraic Geom.*, 7(1):15–53, 1998.

[Der06] Ulrich Derenthal. Singular del pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces. arXiv:math/0604194v1 [math.AG], pages 1–30, 2006.

[dlB02] Régis de la Bretèche. Nombre de points de hauteur bornée sur les surfaces de del Pezzo de degré 5. *Duke Math. J.*, 113(3):421–464, 2002.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HB97] D. R. Heath-Brown. The density of rational points on cubic surfaces. *Acta Arith.*, 79(1):17–30, 1997.

[HB98] Roger Heath-Brown. Counting rational points on cubic surfaces. *Astérisque*, (251):13–30, 1998. Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996).

[Hoo78] C. Hooley. On the representations of a number as the sum of four cubes. *I. Proc. London Math. Soc.*, 36(3):117–140, 1978.

[HS00] Marc Hindry and Joseph H. Silverman. *Diophantine geometry*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.

[Lan83] Serge Lang. *Fundamentals of Diophantine geometry.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[Lan91] Serge Lang. *Number theory. III*, volume 60 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1991. Diophantine geometry.

[Lan94] Serge Lang. *Algebraic number theory*, volume 110 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1994.

[Man86] Yu. I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Algebra, geometry, arithmetic, Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[MT93] Yu. I. Manin and Yu. Tschinkel. Points of bounded height on del Pezzo surfaces. *Compositio Math.*, 85(3):315–332, 1993.

[Nag60] Masayoshi Nagata. On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32:351–370, 1960.

[Ped88] Dan Pedoe. *Geometry*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1988. A comprehensive course.

[Rei97] Miles Reid. Chapters on algebraic surfaces. In *Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993)*, volume 3 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 3–159. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Sch79] Stephen Hoel Schanuel. Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. France*, 107(4):433–449, 1979.

[SD04] Peter Swinnerton-Dyer. Diophantine equations: progress and problems. In *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002)*, volume 226 of *Progr. Math.*, pages 3–35. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.

[Sha95] I. R. Shafarevich, editor. *Number theory. I*, volume 49 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Fundamental problems, ideas and theories, A translation of *Number theory. 1* (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990 [MR1056487

(91j:11001a)], Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich.

[Sil89] Joseph H. Silverman. Integral points on curves and surfaces. In *Number theory (Ulm, 1987)*, volume 1380 of *Lecture Notes in Math.*, pages 202–241. Springer, New York, 1989.

[Woo95] Trevor D. Wooley. Sums of two cubes. *International Mathematics Research Notices*, 1995(4):181–185, 1995.