UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Sulla funzione di partizione

Candidato
Veronica De Blasio
Matr. 277509

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Anno Accademico 2010/2011

Classificazione: 11P82, 11F37
Parole chiave: Teoria Analitica dei Numeri, Partizioni, Cerchi di Ford

Sintesi

Questa tesi si occupa della teoria delle partizioni e, in particolare, della funzione di partizione $p(n)$, ovvero quella funzione che conta il numero di partizioni di n.
Una partizione di un intero positivo n è una rappresentazione di n come somma di interi positivi $\leq n$.
Facciamo un esempio. In quanti modi possiamo scrivere 5 come somma di interi positivi minori o uguali a 5? La risposta è 7. Non sarà difficile accorgersi, infatti, che

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Ma se volessimo calcolare $p(100)$? L'impresa non sarebbe altrettanto semplice. I valori della funzione di partizione crescono, infatti, molto rapidamente. Basti pensare che le partizioni di 10 sono 42, mentre le partizioni di 100 sono ben 190.569.292.

La teoria delle partizioni fa parte di una teoria più generale, la teoria additiva dei numeri. Questa costituisce a sua volta un settore della teoria analitica dei numeri, quella branca della teoria dei numeri che utilizza metodi dell'analisi matematica.

L'attenzione verso alcuni problemi legati alle partizioni risale al Medioevo, tuttavia il primo a parlare di partizioni di numeri interi fu Leibniz in una lettera indirizzata a Bernoulli nel 1674. Colui che pose veramente le basi della teoria delle partizioni fu, però, Eulero nel diciottesimo secolo. A lui si devono le prime significative scoperte sulle partizioni, come la funzione generatrice di $p(n)$. Molti grandi matematici, dopo di lui, svilupparono questa teoria: Lagrange, Legendre, Sylvester, Cayley, Franklin, MacMahon, Rogers, Schur, Hardy, Ramanujan, Littlewood, Rademacher, Lehmer, per nominarne alcuni. L'interesse verso questi argomenti, che persiste ancora oggi, è dovuto anche a diverse applicazioni della teoria delle partizioni ad altri ambiti della matematica ma anche alla statistica e alla fisica.

Sebbene il concetto di partizione di un numero intero sia un concetto elementare e

intuitivo, la ricerca di una formula esatta per la funzione di partizione fu un problema tutt'altro che banale.
Ad Eulero si deve la scoperta di una formula ricorsiva per la funzione di partizione. MacMahon utilizzò questa formula per calcolare $p(n)$ fino ad $n = 200$ e in seguito Gupta, Gwyther e Miller estesero il calcolo fino ad $n = 1000$. Il metodo, però, risultava molto lento e impraticabile per numeri grandi.
Nel 1918 Hardy e Ramanujan trovarono una relazione asintotica per la funzione di partizione. Essi furono i primi ad occuparsi del comportamento asintotico della funzione di partizione. Fino a quel momento, infatti, la teoria delle partizioni era stata sviluppata essenzialmente da un punto di vista algebrico. Hardy e Ramanujan giunsero alla loro formula introducendo il cosiddetto *metodo del cerchio*. Questo metodo ebbe un grande successo in molti problemi asintotici di teoria additiva dei numeri perché consente di trasformare un problema additivo in un problema che può essere risolto attraverso gli strumenti dell'analisi complessa. Viene spesso chiamato anche *metodo di Hardy, Ramanujan e Littlewood* in quanto essi lo utilizzarono per trattare diversi problemi additivi come il problema di Waring e la congettura di Goldbach.
Nel 1937 Hans Rademacher, mentre preparava delle note sul lavoro di Hardy e Ramanujan, fece un piccolo cambiamento nell'analisi che lo portò alla scoperta di una serie convergente e quindi di una formula esatta per $p(n)$. Il teorema di Rademacher rappresenta il coronamento del metodo del cerchio e il cammino d'integrazione utilizzato nella sua dimostrazione è legato ai *cerchi di Ford* e alle *frazioni di Farey.* La dimostrazione di Rademacher, inoltre, costituisce anche una meravigliosa applicazione della funzione eta di Dedekind.
La formula trovata da Rademacher, sebbene sia costituita da una serie infinita, rappresentava un notevole miglioramento rispetto all formula ricorsiva di Eulero e costituisce, quindi, un risultato fondamentale nella teoria delle partizioni.

Solo recentemente, una squadra di ricercatori americani guidata dal Prof. Ken Ono ha scoperto una formula algebrica finita per la funzione di partizione. Partendo da una riformulazione aritmetica della formula di Rademacher questi matematici sono riusciti ad esprimere $p(n)$ come una somma finita di numeri algebrici.

Nel dettaglio la tesi è così strutturata.

Nel **primo capitolo** viene introdotto il concetto di partizione di un numero intero e di funzione di partizione e vengono dimostrate, inoltre, alcune importanti identità. Tra i principali risultati vi sono: la funzione generatrice di $p(n)$, la formula ricorsiva di Eulero per la funzione di partizione e le identità di Rogers-Ramanujan, che hanno avuto, tra l'altro, delle applicazioni in fisica.

Definizione 1. *Una **partizione** di un intero positivo n è una sequenza finita non crescente di interi positivi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ tali che $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = n$. I λ_i sono detti **parti** della partizione.*

Definizione 2. *Sia $n \geq 0$. Definiamo la **funzione di partizione $p(n)$** come la funzione che conta il numero di partizioni di n, ovvero il numero di modi in cui n può essere espresso come somma di interi positivi $\leq n$ (viene fissato $p(0) = 1$).*

Uno dei risultati più importanti contenuti nel primo capitolo è la funzione generatrice di $p(n)$, trovata da Eulero in seguito ad un quesito postogli da Philip Naudé. Il 4 Settembre 1740 Naudé scrisse una lettera ad Eulero chiedendogli: "In quanti modi il numero 50 può essere scritto come somma di 7 interi positivi differenti?". Questo problema catturò l'attenzione di Eulero che formulò il seguente teorema.

Teorema 1 (**Funzione generatrice di $p(n)$**).
Per $|x| < 1$ vale la seguente identità:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n,$$

dove $p(0) = 1$.

Come già accennato, un altro risultato fondamentale dovuto ad Eulero fu la scoperta di una formula ricorsiva per la funzione di partizione. Questa formula può essere vista come un corollario del teorema dei numeri pentagonali.

Teorema 2 (**Teorema dei numeri pentagonali di Eulero**).
Se $|x| < 1$ si ha:

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\omega(n)},$$

dove $\omega(n) = \frac{1}{2}n(3n-1)$ *e* $\omega(-n) = \frac{1}{2}n(3n+1)$

Corollario 3 (**Formula ricorsiva di Eulero per $p(n)$**).
Sia $p(0) = 1$*. Allora per* $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + \cdots \\ + (-1)^k p(n - \frac{1}{2}k(3k-1)) + (-1)^k p(n - \frac{1}{2}k(3k+1)) + \cdots = 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \{p(n-\omega(k)) + p(n-\omega(-k))\}.$$

Un'altra scoperta affascinante nella teoria delle partizioni sono le identità di Rogers-Ramanujan. Queste identità hanno una storia molto interessante. Sono menzionate, senza dimostrazione, in una lettera di S. Ramanujan scritta dall'India nel febbraio 1913 e indirizzata a G. H. Hardy, professore a Cambridge. In realtà esse erano già state trovate, dimostrate e pubblicate da G. L. Rogers nel 1894 [24]. Tuttavia furono trascurate a quel tempo perché corollari di alcune formule più generali. Nel 1917 Ramanujan, sfogliando vecchi numeri dei *Proceedings of The London Mathematical Society*, trovò la dimostrazione di Rogers.

Teorema 4.

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5m+1})(1-x^{5m+4})}. \tag{1}$$

Teorema 5.

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5m+2})(1-x^{5m+3})}. \tag{2}$$

Queste due identità hanno una interessante interpretazione combinatoria. Esse sono rispettivamente equivalenti a:

Teorema 6. *Il numero di partizioni di n in parti con differenza minima uguale a 2 è uguale al numero delle partizioni di n in parti della forma* $5m+1$ *e* $5m+4$*.*

Teorema 7. *Il numero di partizioni di n in parti non minori di 2 e con differenza minima uguale a 2 è uguale al numero di partizioni di n in parti della forma* $5m+2$ *e* $5m+3$*.*

Nel primo capitolo viene descritto, inoltre, un modo per rappresentare graficamente le partizioni. Possiamo rappresentare una partizione attraverso un array di punti detto ***grafico di Ferrers***. Per esempio la partizione di 15 data da

$$6 + 3 + 3 + 2 + 1$$

può essere rappresentata come in Figura 1.

$$\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & & & & &
\end{array}$$

Figura 1: Grafico di Ferrers

In sostanza, se $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ è una partizione di n in m parti, il grafico di Ferrers relativo a questa partizione è costituito da m righe di punti tali che la prima contiene λ_1 punti, la seconda λ_2, e così via.
Diremo che il grafico è in *forma standard* se le righe sono disposte in ordine decrescente.
Ad introdurre questa rappresentazione geometrica delle partizioni fu Sylvester nella sua opera più importante, *A Constructive theory of Partitions, arranged in three Acts, an Interact and an Exodion* [27] del 1884.
L'idea di Sylvester risultò estremamente innovativa per lo studio delle partizioni. Un esempio significativo che mostra l'importanza di questo nuovo approccio alla teoria delle partizioni è costituito dalla dimostrazione di Franklin del teorema dei numeri pentagonali di Eulero.
Se leggiamo un grafico di Ferrers per colonne, anziché per righe, otteniamo un'altra partizione del numero rappresentato nel grafico. Ad esempio, se osserviamo il grafico in Figura 1, otteniamo la partizione di 15

$$5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1.$$

Due partizioni legate in questo modo sono dette ***coniugate***.

Definizione 3. *Se $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ è una partizione di n possiamo definire una nuova partizione $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$, in cui $s = \lambda_1$, scegliendo λ'_i come il numero di parti di $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ che sono $\geq i$. La partizione $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ è la **coniugata** di $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.*

Possiamo dire, allora, che un grafico di Ferrers con m righe letto orizzontalmente rappresenta una partizione di n in m parti; letto verticalmente rappresenta una partizione di n in parti di cui la più grande è m. Abbiamo, quindi, una corrispondenza biunivoca tra il numero di partizioni di n in m parti e il numero di partizioni di n in parti di cui la più grande è m.
Valgono, allora, i seguenti teoremi.

Teorema 8. *Il numero di partizioni di n in m parti è uguale al numero di partizioni di n in parti di cui la più grande è m.*

O equivalentemente

Teorema 9. *Il numero di partizioni di n in al più m parti è uguale al numero di partizioni di n in parti non più grandi di m.*

Nel **secondo capitolo** vengono presentati gli elementi principali della teoria delle forme modulari. La funzione di partizione è infatti, strettamente legata a questa particolare classe di funzioni di variabile complessa. Dopo aver introdotto le funzioni ellittiche, il gruppo modulare e le forme modulari viene trattata la funzione eta di Dedekind e, in particolare, l'equazione funzionale di Dedekind che risulta fondamentale nella dimostrazione del teorema di Rademacher.

Definizione 4. *Una **trasformazione lineare fratta** o **trasformazione di Möbius** è la funzione definita da*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3}$$

con a, b, c, d numeri complessi arbitrari e $ad - bc \neq 0$.

La (3) definisce $f(z)$ per ogni z in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eccetto $z = -d/c$ e $z = \infty$. Estendiamo la definizione a tutto $\widehat{\mathbb{C}}$ ponendo

$$f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \text{ e } f(\infty) = \frac{a}{c},$$

con l'usuale convenzione che $z/0 = \infty$ se $z \neq 0$.
L'insieme delle trasformazioni lineari fratte forma un gruppo in cui l'elemento neutro è dato dall'identità $f(z) = z$.
Possiamo rappresentare le trasformazioni di Möbius in forma matriciale. Ad ogni trasformazione della forma (3), con $ad - bc = 1$, associamo la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $\det A = ad - bc = 1$. Possiamo, allora, associare al gruppo delle trasformazioni di Möbius il gruppo $PSL_2(\mathbb{C})$, ovvero il gruppo delle matrici 2×2 a elementi in $\mathbb{C}$ con determinante 1 ($SL_2(\mathbb{C})$), in cui ogni matrice viene identificata con la sua opposta, in quanto rappresentano la stessa trasformazione.

Il *gruppo modulare* Γ è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni lineari fratte.

Definizione 5. *Le trasformazioni di Möbius della forma*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

*dove a, b, c, d sono interi con $ad - bc = 1$, vengono dette **trasformazioni unimodulari**.*
*L'insieme di queste trasformazioni è detto **gruppo modulare** e viene denotato con $\boldsymbol{\Gamma}$.*

Il gruppo modulare può essere rappresentato da matrici 2×2 a elementi interi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } \det A = 1,$$

in cui ogni matrice A viene identificata con la sua opposta $-A$.
In sostanza $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\pm I$[1].
Vi sono alcuni sottogruppi del gruppo modulare di particolare interesse, i cosiddetti ***sottogruppi di congruenza***. Un esempio è il sottogruppo

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

[1] In alcune trattazioni il gruppo modulare Γ viene identificato semplicemente con $SL_2(\mathbb{Z})$.

Dopo aver descritto il gruppo modulare è possibile definire il concetto di forma modulare. Indichiamo con H il semipiano superiore del piano complesso.

Definizione 6. *Sia k un intero. Una funzione $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice **forma modulare di peso k** se soddisfa le seguenti condizioni:*

(a) f è olomorfa nel semipiano superiore H.

(b) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ per $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

(c) L'espansione in serie di Fourier di f ha la forma

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

La serie di Forurier ci da informazioni sul comportamento di f nel punto $\tau = i\infty$. Rappresenta la sua espansione in serie di Laurent intorno all'origine $q = 0$, per $q = e^{2\pi i\tau}$. Quindi il comportamento di f in $i\infty$ è descritto dalla natura della serie

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n, \quad dove\, q = e^{2\pi i \tau}$$

intorno a 0. Da questa serie, detta *q-espansione* di f, si deduce che $f(\tau)$ è analitica in $i\infty$. Si dice, allora, che f è *olomorfa all'infinito*.
Il termine costante $c(0)$ rappresenta il valore di f in $i\infty$ che denotiamo con $f(i\infty)$. Se $c(0) = 0$ f viene detta ***forma cuspidale*** e il più piccolo r tale che $c(r) \neq 0$ è l'ordine dello zero di f in $i\infty$.
Esempi di forme modulari sono le serie di Eisenstein e il discriminante modulare.

Definizione 7. *Se $k \geq 2$ la serie*

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$

*è detta **serie di Eisenstein di ordine 2k**.*

Le serie di Eisestein di ordine $2k$ sono forme modulari di peso $2k$.
Il discriminante modulare, invece, è definito come $\Delta(\tau) = {g_2}^3(\tau) - 27{g_3}^2(\tau)$, dove $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$ e $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$. Esso è una forma cuspidale di peso 12.

Il secondo capitolo si conclude con un paragrafo dedicato alla funzione eta di Dedekind. La funzione eta fu introdotta da Dedekind nel 1877 ed è definita nel semipiano superiore H dall'equazione

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in\tau}).$$

Il prodotto infinito ha la forma $\prod(1 - q^n)$, dove $q = e^{2\pi i\tau}$. Ovviamente, se $\tau \in H$ allora $|q| < 1$, quindi il prodotto converge assolutamente e non è nullo. Inoltre, poiché la convergenza è uniforme su un sottoinsieme compatto di H, $\eta(\tau)$ è analitica in H. La funzione eta soddisfa la cosiddetta equazione funzionale di Dedekind.

Teorema 10 (**Equazione funzionale di Dedekind**). *Se* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $c > 0$ *e* $\tau \in H$, *si ha*

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(a, b, c, d)\left\{-i(c\tau + d)\right\}^{1/2}\eta(\tau) \tag{4}$$

dove

$$\varepsilon(a, b, c, d) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a + d}{12c} + s(-d, c)\right)\right\}$$

e

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1}\frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

sono le somme di Dedekind.

La funzione eta di Dedekind, inoltre, è una forma modulare. In una trattazione più generale sulle forme modulari, infatti, si considerano forme modulari di peso k, con k un qualsiasi numero reale ed è consentita la presenza di un fattore ε, con $|\varepsilon| = 1$, nell'equazione funzionale

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(c\tau + d)^k f(\tau) \quad \text{per ogni} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Grazie all'equazione funzionale di Dedekind, $\eta(\tau)$ può essere considerata, allora, una forma modulare di peso $1/2$.

Il **terzo** ed ultimo **capitolo** è dedicato alla formula di Rademacher per la funzione di partizione. Dopo aver introdotto alcuni concetti come le frazioni di Farey, i cerchi di Ford e le funzioni di Bessel viene dimostrato il teorema di Rademacher. Viene, inoltre, trattato il problema della stima dell'errore nel caso in cui la serie venga troncata dopo N termini. Infine viene illustrata la recente formula di Ken Ono.

Come accennato, nel 1918 Hardy e Ramanujan introdussero il metodo del cerchio e trovarono una relazione asintotica per la funzione di partizione. Essi scoprirono che $p(n)$ soddisfa

$$p(n) \sim \frac{e^{C\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}} \text{ per } n \to \infty,$$

dove $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. Questa relazione fu trovata indipendentemente anche da Uspensky [28] nel 1920. Ma Hardy e Ramanujan provarono di più. Essi ottennero una formula asintotica della forma

$$p(n) = \sum_{k=1}^{[\alpha\sqrt{n}]} P_k(n) + O(n^{-1/4}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{[\alpha\sqrt{n}]} A_k(n) k^{1/2} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp\left\{ \frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)} \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) + O(n^{-1/4}),$$ [2]

dove $\alpha > 0$ è una costante e il termine dominante $P_1(n)$, è asintotico a $e^{C\sqrt{n}}/4n\sqrt{3}$. I termini successivi sono dello stesso tipo, ma con una costante più piccola di C all'esponenziale. Visto che $p(n)$ è un intero, la somma finita fornisce $p(n)$ esattamente quando n è abbastanza grande da garantire che l'errore sia minore di $1/2$. Questo è un raro esempio di formula che è sia asintotica che esatta. Come spesso accade con formule asintotiche di questo tipo, la somma infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(n)$$

diverge per ogni n. La divergenza fu dimostrata da Lehmer [20] nel 1937.

Nel 1937 Rademacher giunse, invece, ad una serie convergente per la funzione di partizione.

[2] Il termine $A_k(n)$ è presente anche nella formula di Rademacher ed è definito da $A_k(n) = \sum_{\substack{0 \le h < k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}$ (Teorema 11).

Teorema 11. *Se $n \geq 1$ la funzione di partizione $p(n)$ è rappresentata dalla serie convergente*

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left\{ \frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)} \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right),$$

dove

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}.$$

Il punto di partenza nella dimostrazione di Rademacher è la formula di Eulero sulla funzione generatrice di $p(n)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n, \quad \text{per}|x| < 1,$$

dove $F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m}$. Questa formula implica

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(k)x^k}{x^{n+1}} \quad \text{se } 0 < |x| < 1,$$

per ogni $n \geq 0$. La serie a destra dell'uguaglianza è l'espansione in serie di Laurent di $F(x)/x^{n+1}$ nel disco unitario bucato $0 < |x| < 1$. Questa funzione ha un polo in $x = 0$ con residuo $p(n)$, quindi, per il teorema dei residui,

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx,$$

dove C è una qualsiasi curva chiusa semplice orientata positivamente che circonda l'origine ed è contenuta all'interno del cerchio unitario. L'idea base del metodo del cerchio è scegliere una curva C che giace vicino alle singolarità della funzione $F(x)$. I fattori nel prodotto che definisce $F(x)$ si annullano per $x = 1$, $x^2 = 1$, $x^3 = 1$, etc., quindi ogni radice dell'unità è una singolarità per $F(x)$. Nel metodo del cerchio si sceglie una curva circolare C di raggio quasi 1 e si divide C in archi $C_{h,k}$ che giacciono "intorno" alle radici dell'unità $e^{2\pi i h/k}$, dove $0 \leq h < k, (h,k) = 1$, e $k = 1, 2, \cdots, N$.

L'integrale lungo C può essere scritto, allora, come una somma finita di integrali lungo questi archi,

$$\int_C = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{h=0 \\ (h,k)=1}}^{k-1} \int_{C_{h,k}}.$$

Su ogni arco $C_{h,k}$ la funzione $F(x)$ all'integranda viene sostituita da una funzione elementare $\psi_{h,k}(x)$ che ha essenzialmente lo stesso comportamento di F vicino alle singolarità $e^{2\pi ih/k}$. La funzione $\psi_{h,k}$ viene fuori in modo naturale dall'equazione funzionale soddisfatta dalla funzione di Dedekind $\eta(\tau)$. Le funzioni F e η sono legate dall'equazione

$$F(e^{2\pi i\tau}) = e^{\pi i\tau/12}/\eta(\tau),$$

e l'equazione funzionale per η fornisce una formula che descrive il comportamento di F vicino ogni singolarità $e^{2\pi ih/k}$. La sostituzione di F con $\psi_{h,k}$ introduce un errore che deve essere stimato. Gli integrali di $\psi_{h,k}$ lungo $C_{h,k}$ vengono valutati e la loro somma su h produce il termine k-esimo nella serie di Rademacher.
Nel 1943 Rademacher modificò il metodo del cerchio sostituendo alla curva circolare C un nuovo cammino nel piano τ, con $x = e^{2\pi i\tau}$, che semplifica notevolmente le stime da fare.
Questo nuovo cammino è legato alle frazioni di Farey e ai cerchi di Ford.

Definizione 8. *L'insieme delle* ***frazioni di Farey*** *di ordine n, che denotiamo con F_n, è l'insieme delle frazioni ridotte ai minimi termini nell'intervallo chiuso $[0,1]$ con denominatore $\leq n$, elencate in ordine crescente di grandezza.*

Definizione 9. *Consideriamo un numero razionale h/k con $(h,k) = 1$. Il* ***cerchio di Ford*** *associato a questa frazione viene denotato con $C(h,k)$ ed è il cerchio nel piano complesso di raggio $1/(2k^2)$ e centro nel nel punto $(h/k) + i/(2k^2)$.*

I cerchi di Ford devono il loro nome a L. R. Ford [12] che per primo studiò le loro proprietà nel 1938.

Teorema 12. *Due cerchi di Ford $C(a,b)$ e $C(c,d)$ o sono tangenti o non si intersecano. Sono tangenti se e solo se $bc - ad = \pm 1$. In particolare cerchi di Ford associati a due frazioni di Farey consecutive sono tangenti.*

Per ogni intero N Rademacher costruisce un cammino d'integrazione $P(N)$ dal punto i al punto $i+1$ nel piano complesso nel seguente modo. Si considerano i cerchi di Ford associati alle frazioni di Farey in F_N. Se $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ sono consecutive in F_N i punti di tangenza di $C(h_1,k_1)$, $C(h,k)$ e $C(h_2,k_2)$ dividono $C(h,k)$ in due archi, un arco superiore e un arco inferiore. Come cammino $P(N)$ si prende l'unione degli archi superiori così ottenuti. Per le frazioni $0/1$ e $1/1$ viene considerata solo la parte dell'arco superiore che giace nell'intervallo $[0,1]$.

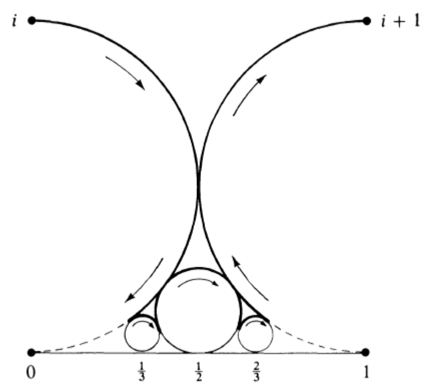

Figura 2: Cammino $P(3)$

Ovviamente La formula di Rademacher costituisce una formula esatta per $p(n)$ ma è una somma infinita. Per calcolare la funzione di partizione bisogna, allora, troncare la serie dopo N termini e arrotondare il risultato ottenuto. Dato che $p(n)$ è un intero, se il resto è minore di $1/2$, $p(n)$ sarà l'intero più vicino a $\sum_{k=1}^{N}$. Limitare l'errore che deriva dal troncamento della serie è un difficile problema ben noto.
Rademacher ha mostrato che se si sceglie, come fecero Hardy e Ramanujan, $N = \left[\alpha\, n^{1/2}\right]$, con $\alpha > 0$ fissato, si ricava proprio la formula asintotica di Hardy e Ramanujan con un resto $O(n^{-1/4})$. Migliorando le stima per $A_k(n)$ Rademacher ha poi ottenuto, troncando la serie sempre ad $N = \left[\alpha\, n^{1/2}\right]$, un errore $O(n^{-3/8})$. Successivamente Lemher [21] è giunto ad un errore $O(\log(n)n^{-1/2})$. Un recente lavoro di Amanda Folsom e Riad Masri [11] ha fornito la migliore stima finora conosciuta per il termine d'errore. I due matematici statunitensi hanno trovato una nuova formula asintotica per $p(n)$ con un termine d'errore $O(n^{-(1/2+\delta)})$, per qualche $\delta > 0$.

Il nostro lavoro si conclude con la formula scoperta nel 2011 dal Prof. Ken Ono. Sia $q = e^{2\pi i\tau}$ e consideriamo la funzione eta di Dedekind $\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$

e la serie di Eisenstein normalizzata di ordine 2, $E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l|n} lq^n$ [3]. Definiamo la funzione $F(\tau)$ come

$$F(\tau) := \frac{1}{2}\frac{E_2(\tau) - 2E_2(2\tau) - 3E_2(3\tau) + 6E_2(6\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)^2\eta(6\tau)^2} = q^{-1} - 10 - 29q - \cdots .$$

Con la convenzione che $\tau = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo

$$P(\tau) := -\left(\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2\pi y}\right)F(\tau) = \left(1 - \frac{1}{2\pi y}\right)q^{-1} + \frac{5}{\pi y} + \left(29 + \frac{29}{2\pi y}\right)q + \cdots .$$

Consideriamo ora le forme quadratiche binarie intere definite positive $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ con discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = -24n + 1$ tali che $6|a$ e $b \equiv 1 \pmod{12}$. Sia $\mathscr{Q}_n$ un insieme di rappresentanti delle classi di equivalenza di queste forme quadratiche sotto l'azione di $\Gamma_0(6)$.[4] Per ogni $Q(x, y) \in \mathscr{Q}_n$ sia α_Q il punto nel semipiano superiore H tale che $Q(\alpha_Q, 1) = 0$. Allora definiamo la "traccia"

$$Tr(n) := \sum_{Q\in\mathscr{Q}_n} P(\alpha_Q).$$

La formula algebrica finita per la funzione di partizione trovata da Ono è la seguente

$$p(n) = \frac{1}{24n - 1}\cdot Tr(n).$$

I numeri $P(\alpha_Q)$, inoltre, sono numeri algebrici. Essi sono le radici del polinomio

$$H_n(x) = x^{h(-24n+1)} - (24n - 1)p(n)x^{h(-24n+1)-1} + \cdots := \prod_{Q\in\mathscr{Q}_n}(x - P(\alpha_Q)) \in \mathbb{Q}[x],$$

dove $h(-24n - 1)$ è il numero di classi d'equivalenza.

[3] $E_2(\tau) = G_2(\tau)/2\zeta(2)$. $G_2(\tau)$ non è una forma modulare perché non verifica la condizione $G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau)$. Viene detta *forma quasi modulare*.

[4] Gross, Kohnen e Zagier hanno stabilito una corrispondenza biunivoca tra i rappresentanti di queste forme quadratiche e le forme quadratiche binarie intere definite positive con discriminante $-24n + 1$ sotto l'azione di Γ [13]. Per determinare dei rappresentanti è allora sufficiente trovare dei rappresentanti per le classi di equivalenza sotto l'azione di Γ, che sono in numero finito, attraverso la *Teoria delle forme ridotte* [22] [9] e applicare questa corrispondenza.

Bibliografia

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw - Hill Book Company, terza edizione, 1979.

[2] G. E. Andrews. Partitions. http://www.math.psu.edu/vstein/alg/antheory/preprint/andrews/chapter.pdf.

[3] G. E. Andrews. *The theory of partitions.* Cambridge University Press, 1976.

[4] T. M. Apostol. *Introduction to analytic number theory.* Springer - Verlag, 1976.

[5] T. M. Apostol. *Modular Functions and Dirichelet Series in Number Theory.* Springer, seconda edizione, 1989.

[6] S. Bonaccorso. Modular forms, Eisenstein Series and a short introduction to elliptic functions, 2006. http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/ws0607/modular-forms.

[7] K. Bringmann e K. Ono. An arithmetic formula for the partition function. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135:3507 – 3514, 2007. http://mathcs.emory.edu/~ono/publications-cv/pdfs/097.pdf.

[8] J. H. Brunier e K. Ono. Algebraic formulas for the coefficients of half - integral weight harmonic weak maass forms. http://www.aimath.org/news/partition/brunier-ono.

[9] D. A. Cox. *Primes of the form* $x^2 + ny^2$. Wiley and Sons, 1989.

[10] F. Diamond e J. Shurman. *A First Course in Modular Forms.* Springer, 2004.

[11] A. Folsom e R. Masri. Equidistribution of heegner points and the partition function. *Mathematische Annalen*, 2010.

[12] L. R. Ford. Fractions. *American Mathematical Monthly*, 45:586 – 601, 1938.

[13] B. Gross, W. Kohnen, e D. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. *Mathematische Annalen*, 278:497 – 592, 1987.

[14] G. H. Hardy. *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*. Cambridge University Press, 1940.

[15] G. H. Hardy e S. Ramanujan. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 17(2):75 – 115, 1918. (ristampato: Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge University Press, 1927, pp. 276 - 309).

[16] B. Hopkins e R. Wilson. Euler's Science of Combinatorics, 2007. `http://www.gss.ucsb.edu/Hopkins2.pdf`.

[17] N. Koblitz. *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Springer, seconda edizione, 1993.

[18] G. Köhler. *Eta Products and Theta Series Identities*. Springer, 2010.

[19] S. Lang. *Complex Analysis*. Springer, quarta edizione, 1998.

[20] D. H. Lehmer. On the Hardy - Ramanujan series for the partition function. *Journal of the London Mathematical Society*, 12:171 – 176, 1937.

[21] D. H. Lehmer. On the remainders and convergence of the series for the partition functions. *Transaction of the American Mathematical Society*, 46:362 – 373, 1939.

[22] F. Lemmermeyer. Binary quadratic forms, 2010. `http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/publ/bf.pdf`.

[23] H. Rademacher. *Topics in Analytic Number Theory*. Springer - Verlag New York Heidelberg Berlin, 1973.

[24] L. J. Rogers. Second memoir on the expansion of certain infinite products. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 25:318 – 343, 1894.

[25] L. J. Rogers e S. Ramanujan. Proof of certain identities in combinatory analysis. *Proceedings of the Cambridge Mathematical Society*, 19:211 – 214, 1919.

[26] C. E. Sandifer. *How Euler did it.* The Mathematical Association of America, 2007.

[27] J. J. Sylvester. A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion. *American Journal of Mathematics*, 5:251 – 330, 1884-86. (ristampato: Collected Papers, Vol. IV, Cambridge University Press, 1912, pp. 1 - 83).

[28] J. V. Uspensky. Asymptotic formulae for numerical functions wich occur in the theory of partitions. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences*, 14(6):199 – 218, 1920.

[29] E. M. Wright e G. H. Hardy. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, quinta edizione, 1979.