



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale
presentata da
Livia Corsi

**Teoria di Melnikov a ogni ordine
e serie di Puiseux per soluzioni subarmoniche**

Relatore
Prof. Guido Gentile

Il Candidato

Il Relatore

Anno Accademico 2006-2007
21 Maggio 2008

1 Introduzione

Le biforcazioni subarmoniche sono state lungamente studiate in letteratura, e ormai sono un argomento standard di molti testi classici [3, 5].

Una formulazione intuitiva del problema può essere la seguente. Immaginiamo il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ nello spazio euclideo tridimensionale, e immaginiamo un punto che si muova su \mathcal{C} lungo la curva $\gamma(t) = (\cos(\omega(A_0)(t + t_0)), \sin(\omega(A_0)(t + t_0)), A_0)$ ad altezza A_0 e tempo iniziale t_0 fissati. Supponiamo che la velocità angolare cambi in modo monotono al variare dell'altezza, e chiamiamo $\alpha_0(t) = \omega(A_0)t$ l'angolo descritto da $\gamma(t)$. Il campo di velocità sul cilindro è costante ad altezza fissata, ossia è dato dal sistema

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_0 = \omega(A), \\ \dot{A} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

rispetto all'angolo e all'altezza, e supponiamo che $\omega(A)$ sia analitica. Chiamiamo $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(\omega(A_0)(t + t_0)), \sin(\omega(A_0)(t + t_0)))$, ovvero la proiezione di γ sul piano x, y , e consideriamo il cilindro $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{\gamma}\} \times \mathbb{R}$.

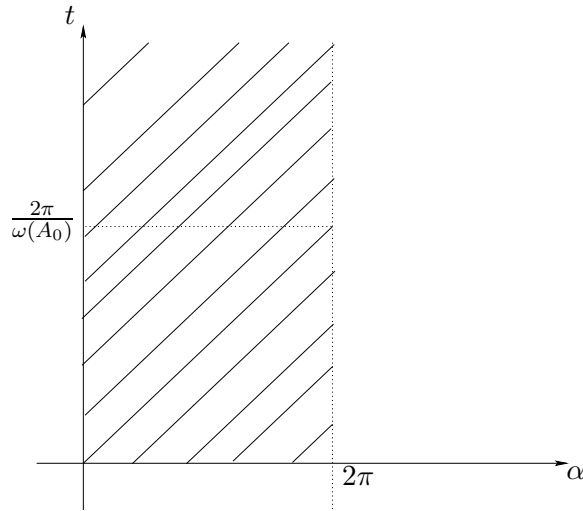


Figura 1: Traiettorie nel piano α, t al variare del dato iniziale.

Immaginiamo quindi di tagliare $\tilde{\mathcal{C}}$ ad altezza zero e $T = T(A_0) = 2\pi/\omega(A_0)$, e di incollarne

gli estremi ottenendo un toro come quello riportato in Figura 2. Quest'operazione è nota come *quoziente topologico* del cilindro $\tilde{\mathcal{C}}$, e denoteremo il toro ottenuto, con $\{\tilde{\gamma}\} \times \mathbb{R}/T(A_0)\mathbb{Z}$.

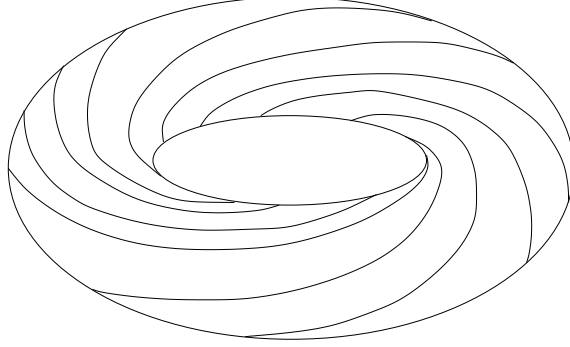


Figura 2: Toro ottenuto quozientando l'asse temporale rispetto a $T(A_0)\mathbb{Z}$.

Se invece consideriamo il toro $\{\tilde{\gamma}\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, al variare di A_0 alcune curve si richiudono e altre riempiono densamente il toro: più precisamente, le curve con $\omega(A_0) = p/q \in \mathbb{Q}$, *i.e.* quelle che nel piano α, t hanno coefficiente angolare razionale, nel toro $\{\tilde{\gamma}\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sono ancora chiuse.

Torniamo al cilindro \mathcal{C} e consideriamo una perturbazione nel campo di velocità (1), sia nella direzione angolare sia in quella verticale, periodica di periodo 2π sia rispetto all'angolo che rispetto al tempo. Scriviamo quindi

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega(A) + \varepsilon F(\alpha, A, t + t_0), \\ \dot{A} = \varepsilon G(\alpha, A, t + t_0), \end{cases} \quad (2)$$

dove le funzioni F, G sono analitiche nei loro argomenti e 2π -periodiche in α e t

Chiaramente, senza ulteriori ipotesi sulla perturbazione, in generale le traiettorie corrispondenti alle curve che riempivano densamente $\{\tilde{\gamma}\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ nel sistema imperturbato, non sopravvivono alla perturbazione, mentre alcune¹ delle altre persistono. Le traiettorie di periodo $T = 2\pi q/p$ che sopravvivono alla perturbazione sono dette *soluzioni subarmoniche di ordine q/p* .

Osserviamo che le tecniche usate consentono di studiare anche sistemi della forma

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega(A) + \varepsilon F(\alpha, A, \varepsilon, t + t_0), \\ \dot{A} = \varepsilon G(\alpha, A, \varepsilon, t + t_0), \end{cases} \quad (3)$$

¹La sopravvivenza di orbite periodiche su \mathcal{C} dipende dal dato iniziale t_0 scelto.

dove la perturbazione dipende analiticamente anche da ε . Un simile problema emerge naturalmente nello studio di sistemi unidimensionali, dissipativi, periodicamente forzati. In questo caso si studia un'equazione a due parametri della forma

$$\ddot{x} + g(x) + \gamma\dot{x} = \varepsilon f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Quindi può essere interessante studiare la regione dello spazio dei parametri ε, γ in cui possono comparire soluzioni subarmoniche, e determinare le *curve di biforcazione* che separano la regione di esistenza da quella di non-esistenza (si veda la Figura 3) di tali soluzioni.

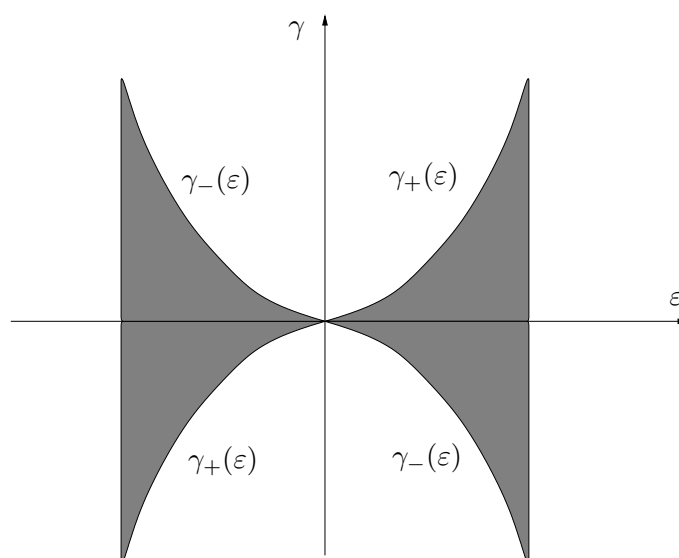


Figura 3: Insieme di esistenza (regione grigia) di soluzioni subarmoniche nel piano ε, γ .

Poiché i calcoli per il sistema (3) sono molto simili a quelli fatti per il sistema (2), restringeremo l'analisi solo a quest'ultimo caso per semplicità.

Ci domandiamo, quindi: quali sono le condizioni più generali possibili affinché sopravviva almeno una traiettoria periodica? E come determinare tale traiettoria?

Nel 1963 Melnikov [6] dimostrò che la sopravvivenza di orbite periodiche è legata agli zeri di una funzione $M(t_0)$, oggi nota come *funzione subarmonica di Melnikov*. In particolare dimostrò che ad ogni zero semplice di $M(t_0)$ corrisponde una soluzione subarmonica: in questo caso il problema si riduce a un problema di funzione implicita. D'altra parte, in linea di principio può accadere che la funzione di Melnikov sia identicamente nulla o abbia uno zero di ordine $n > 1$.

Nel primo caso si possono risolvere le equazioni del moto fino al primo ordine in ε e la soluzione - fino al prim'ordine - non dipende dalla scelta di t_0 . Definita un'opportuna generalizzazione

$M_1(t_0)$ della funzione di Melnikov, se anche $M_1(t_0)$ si annulla identicamente, si può sviluppare la soluzione fino al second'ordine e così via. Se $M_k(t_0) \equiv 0$, avremo una soluzione subarmonica per ogni t_0 piccolo, mentre se ad un certo passo \bar{k} si ha uno zero semplice, si può procedere in modo molto simile al caso classico per determinare soluzioni subarmoniche analitiche in ε . Gran parte della letteratura sulla teoria di Melnikov considera questo tipo di generalizzazione.

Il caso in cui la funzione di Melnikov - o una sua generalizzazione a ordini alti - ha uno zero (non semplice) di ordine finito è più complicato. Il problema può ancora essere ridotto a un problema di funzione implicita, ma il fatto che gli zeri non sono semplici ci impedisce di applicare il teorema della funzione implicita. Si dovranno usare, pertanto, argomenti diversi, basati sul teorema di preparazione di Weierstrass [2, 3] e sulle *serie di Puiseux* [1, 2, 3, 7].

La difficoltà principale di un approccio costruttivo sta nel fatto che la soluzione dell'equazione implicita va cercata per approssimazioni successive: ad ogni passo d'iterazione è necessario risolvere una nuova equazione implicita che, in linea di principio, potrebbe ancora avere radici multiple.

Il problema delle soluzioni subarmoniche nel caso di zeri multipli per la funzione di Melnikov è considerato in [8], dove il seguente risultato è enunciato (senza darne una dimostrazione) per sistemi di classe C^r : se la funzione subarmonica di Melnikov ha uno zero di ordine dispari $n \leq r$, esiste almeno una soluzione subarmonica. In particolare, la soluzione viene trovata in termini del parametro perturbativo e della fase iniziale, ma non viene discussa la relazione tra i due parametri: come vedremo, è proprio questa relazione che produce la perdita di analiticità nel parametro perturbativo. Inoltre in [8] non viene considerato il caso in cui lo zero ha ordine pari. In questo caso, come vedremo, l'esistenza di soluzioni subarmoniche non può essere provata in generale, ma si ottiene sotto ipotesi aggiuntive.

2 Descrizione del problema e risultati principali

Consideriamo il sistema (2). Supponiamo innanzitutto di fissare il valore di A_0 in modo tale che $\omega(A_0) = p/q \in \mathbb{Q}$, e che inoltre valga

Ipotesi 1. $d\omega(A_0)/dA = \omega'(A_0) \neq 0$.

Definiamo $\tilde{U}(t) = U(A(t)) = \omega(A(t)) - \omega(A_0) - \omega'(A_0)(A(t) - A_0)$ e

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \Phi(\alpha(t), A(t), t + t_0) = \varepsilon F(\alpha(t), A(t), t + t_0) + \tilde{U}(t), \\ \Gamma(t) &= \Gamma(\alpha(t), A(t), t + t_0) = \varepsilon G(\alpha(t), A(t), t + t_0).\end{aligned}\tag{5}$$

Affinché esista una soluzione periodica di periodo T deve valere $\langle \Gamma(\cdot) \rangle = 0$ e

$$\omega'(A_0)A(0) + \langle \Phi \rangle + \omega'(A_0)\langle \mathcal{G} \rangle = 0, \quad \mathcal{G}(t) = \int_0^t d\tau (\Gamma(\tau) - \langle \Gamma \rangle).\tag{6}$$

Considerato lo sviluppo di Fourier

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0(t) + \beta(t), & \beta(t) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\omega\nu t} \beta_\nu, \\ A(t) &= A_0(t) + B(t), & B(t) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\omega\nu t} B_\nu,\end{aligned}\tag{7}$$

dove $\omega = 1/q$, e usando β_0 come parametro di fase iniziale, il sistema di equazioni che dev'essere soddisfatto dalla soluzione subarmonica cercata è

$$\begin{cases} \beta_\nu = \frac{\Phi_\nu}{i\omega\nu} + \omega'(A_0) \frac{\Gamma_\nu}{(i\omega\nu)^2}, & \nu \neq 0 \\ B_\nu = \frac{\Gamma_\nu}{i\omega\nu}, & \nu \neq 0 \\ B_0 = -\frac{\Phi_0}{\omega'(A_0)}, \\ \Gamma_0 = 0,\end{cases}\tag{8}$$

dove

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu &= \varepsilon \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{r+s=m \\ r,s \in \mathbb{Z}_+}} \sum_{p\sigma_0 + q\sigma'_0 + \nu_1 + \dots + \nu_m = \nu} \frac{1}{r!s!} (i\sigma_0)^r \partial_A^s G_{\sigma_0, \sigma'_0}(A_0, t_0) \beta_{\nu_1} \dots \beta_{\nu_r} B_{\nu_{r+1}} \dots B_{\nu_m}, \\ \Phi_\nu &= \varepsilon \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{r+s=m \\ r,s \in \mathbb{Z}_+}} \sum_{p\sigma_0 + q\sigma'_0 + \nu_1 + \dots + \nu_m = \nu} \frac{1}{r!s!} (i\sigma_0)^r \partial_A^s F_{\sigma_0, \sigma'_0}(A_0, t_0) \beta_{\nu_1} \dots \beta_{\nu_r} B_{\nu_{r+1}} \dots B_{\nu_m} \\ &+ \sum_{s \geq 2} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_s = \nu} \frac{1}{s!} \partial_A^s \omega(A_0) B_{\nu_1} \dots B_{\nu_s}.\end{aligned}\tag{9}$$

Considerato uno sviluppo formale di Taylor nelle variabili ε e β_0 , ossia

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha(t; \varepsilon, \beta_0) = \alpha_0(t) + \beta_0 + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ j \geq 0}} \varepsilon^k \beta_0^j \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} e^{i\omega\nu t} \bar{\beta}_\nu^{(k,j)} \\ A(t) &= A(t; \varepsilon, \beta_0) = A_0 + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ j \geq 0}} \varepsilon^k \beta_0^j \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\omega\nu t} \bar{B}_\nu^{(k,j)},\end{aligned}\tag{10}$$

le prime tre equazioni in (8) si riscrivono, a ogni ordine $\varepsilon^k \beta_0^j$ come

$$\begin{cases} \bar{\beta}_\nu^{(k,j)} = \frac{\bar{\Phi}_\nu^{(k,j)}}{i\omega\nu} + \omega'(A_0) \frac{\bar{\Gamma}_\nu^{(k,j)}}{(i\omega\nu)^2}, & \nu \neq 0 \\ \bar{B}_\nu^{(k,j)} = \frac{\bar{\Gamma}_\nu^{(k,j)}}{i\omega\nu}, & \nu \neq 0 \\ \bar{B}_0^{(k,j)} = -\frac{\bar{\Phi}_0^{(k,j)}}{\omega'(A_0)}, \end{cases} \quad (11)$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_\nu^{(k,j)} = & \sum_{\substack{r' \geq 0 \\ s \geq 0}} \sum_{r+j_0=r'} \sum_{p\sigma_0+q\sigma'_0+\nu_1+\dots+\nu_{r+s}=\nu} \frac{(i\sigma_0)^{r'}}{r'!} \frac{\partial_A^s}{s!} G_{\sigma_0, \sigma'_0}(A_0, t_0) \\ & \times \sum_{\substack{k_1+\dots+k_{r+s}=k-1 \\ j_1+\dots+j_{r+s}=j-j_0 \\ k_i \geq 1, j_i \geq 0}} \bar{\beta}_{\nu_1}^{(k_1, j_1)} \dots \bar{\beta}_{\nu_r}^{(k_r, j_r)} \bar{B}_{\nu_{r+1}}^{(k_{r+1}, j_{r+1})} \dots \bar{B}_{\nu_{r+s}}^{(k_{r+s}, j_{r+s})}, \end{aligned} \quad (12)$$

con un'espressione analoga per $\bar{\Phi}_\nu^{(k,j)}$. Le (11) sono equazioni ricorsive che ci permettono di calcolare la soluzione a ogni ordine. Inoltre si dimostra che le serie (10) sono convergenti per ε e β_0 abbastanza piccoli. Questo significa che in un intorno piccolo dell'orbita imperturbata, se la perturbazione è piccola, è possibile trovare una soluzione subarmonica. La quarta equazione in (8) è, in termini di ε e β_0 ,

$$\bar{\Gamma}_0 = \Gamma_0(\varepsilon, \beta_0) = \varepsilon \sum_{\substack{k \geq 0 \\ j \geq 0}} \varepsilon^k \beta_0^j \bar{\Gamma}_0^{(k+1, j)} = 0. \quad (13)$$

Trovare una funzione $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon)$ tale che $\Gamma_0(\varepsilon, \beta_0(\varepsilon)) = 0$ significa quindi scegliere, in termini della perturbazione, la fase iniziale della traiettoria periodica che sopravvive alla perturbazione.

Cercheremo la soluzione implicita dell'equazione (13) mediante il cosiddetto *algoritmo di Newton-Puiseux* [1, 2, 3, 7].

Chiamiamo $T = 2\pi q$ il periodo (nello spazio delle fasi esteso) della soluzione subarmonica che stiamo cercando, e definiamo la funzione subarmonica di Melnikov come

$$M(t_0) = \frac{1}{T} \int_0^T dt G(\alpha_0(t), A_0, t + t_0). \quad (14)$$

Integrando per parti abbiamo

$$j! \bar{\Gamma}_0^{(1, j)} = \langle \partial_\alpha^j G(\alpha_0(\cdot), A_0, \cdot + t_0) \rangle = (-\omega(A_0))^{-j} \frac{d^j M}{dt_0^j}(t_0). \quad (15)$$

per ogni $j \geq 0$.

Supponiamo che valga

Ipotesi 2. *Esistono $t_0 \in [0, 2\pi)$ e $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ tali che t_0 è uno zero di ordine \mathbf{n} per la funzione subarmonica di Melnikov, cioè*

$$\frac{d^k}{dt_0^k} M(t_0) = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq \mathbf{n} - 1, \quad D = D(t_0) := \frac{d^{\mathbf{n}}}{dt_0^{\mathbf{n}}} M(t_0) \neq 0. \quad (16)$$

Sotto tale ipotesi, la funzione $\mathcal{F}(\varepsilon, \beta_0)$ tale che $\varepsilon \mathcal{F}(\varepsilon, \beta_0) = \bar{\Gamma}(\varepsilon, \beta_0)$ è analitica e β_0 -generale di ordine \mathbf{n} , i.e. $\partial_{\beta_0}^j \mathcal{F}(0, 0) = 0$ per ogni $j = 0, \dots, \mathbf{n} - 1$, mentre $\partial_{\beta_0}^{\mathbf{n}} \mathcal{F}(0, 0) \neq 0$.

In questo caso possiamo costruire il poligono di Newton [1, 2, 3] \mathcal{P} associato agli ordini bassi di \mathcal{F} . Se il poligono di Newton è costituito da un solo punto (o, più in generale, se $\partial_{\varepsilon}^k \mathcal{F}(0, 0) = 0$ per ogni $k \geq 0$) allora la funzione $\beta_0(\varepsilon) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione implicita (11). Altrimenti possiamo associare ad ogni segmento \mathcal{P}_i del poligono di Newton, un polinomio quasi-omogeneo \mathcal{F}_i nelle variabili ε e β_0 . Inoltre possiamo associare ad \mathcal{F}_i un polinomio P_i in una variabile c . Aggiungiamo per il momento la seguente ipotesi.

Ipotesi 3. *Esiste un segmento \mathcal{P}_i in \mathcal{P} associato al polinomio quasi-omogeneo $\mathcal{F}_i(\varepsilon, \beta_0)$ tale che il polinomio $P_i(c)$ abbia una radice semplice $c^* \in \mathbb{R}$.*

In [4] è considerato un caso particolare, in cui il poligono di Newton è costituito da un solo segmento. In quel caso l'Ipotesi 3 si può riscrivere in termini di una costante che in [4] è chiamata a_0 : se $a_0 \neq 0$ l'Ipotesi 3 è verificata.

Abbiamo quindi il seguente risultato.

Teorema 2.1. *Consideriamo una soluzione periodica con frequenza $\omega = p/q$ per il sistema (2) e assumiamo che le Ipotesi 1, 2 e 3 siano soddisfatte. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ il sistema (2) ammette almeno una soluzione subarmonica di ordine q/p . Tale soluzione si scrive in termini di una serie di Puiseux convergente in ε .*

Chiaramente l'Ipotesi 3 non è generale. Supponiamo quindi che tutti i polinomi P_i abbiano radici multiple. Se almeno uno di questi ha una radice reale non nulla, possiamo comunque risolvere le equazioni del moto fino a un certo ordine (frazionario) e iterare il processo di Newton-Puiseux sperando che al passo successivo ci sia almeno un polinomio con una radice semplice e così via. Se a un certo passo d'iterazione non troviamo radici reali, il sistema (2) non ammette soluzioni subarmoniche. Supponiamo quindi che a ogni passo dell'algoritmo ci sia un polinomio con una radice reale. Possiamo indebolire l'Ipotesi 3 come segue.

Ipotesi 4. *Esiste un $i_0 \geq 0$ tale che all' i_0 -esimo passo d'iterazione del processo di Newton-Puiseux, esiste un polinomio $P^{(i_0)} = P^{(i_0)}(c)$ che ammette una radice semplice $c^* \in \mathbb{R}$.*

Il Teorema 2.1 ha dunque la seguente generalizzazione.

Teorema 2.2. *Consideriamo una soluzione periodica con frequenza $\omega = p/q$ per il sistema (2) e assumiamo che le Ipotesi 1, 2 e 4 siano soddisfatte. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ il sistema (2) ammette almeno una soluzione subarmonica di ordine q/p . Tale soluzione si scrive in termini di una serie di Puiseux convergente in ε .*

Osservazione 2.3. Per costruire esplicitamente la soluzione, e quindi dare una stima del raggio di convergenza della serie di Puiseux, l'Ipotesi 4 è necessaria. Infatti, in generale non è neanche possibile stabilire *a-priori* l'esistenza della soluzione. Si può dimostrare, mediante argomenti astratti, che se esiste una soluzione formale in termini di una serie di Puiseux, allora tale serie converge per ε abbastanza piccolo, ma non siamo in grado di dare una stima del raggio di convergenza. Inoltre, se \mathbf{n} è pari, non siamo neanche in grado di dire *a-priori* se esiste una soluzione formale, perché in questo caso, in linea di principio, potrebbe non esistere una radice reale. Se invece \mathbf{n} è dispari, l'esistenza della soluzione formale è garantita.

Infine, come abbiamo detto, anche l'Ipotesi 2 non è generale. Può accadere, infatti, che la funzione di Melnikov sia identicamente nulla.

In questo caso è possibile risolvere esplicitamente le equazioni del moto fino al primo ordine in ε ; al second'ordine si presenterà una situazione analoga a quella studiata nel caso precedente. Infatti, dalla (15) sappiamo che la media di G è identicamente nulla al prim'ordine e quindi possiamo definire

$$M_0(t_0) = M(t_0), \quad M_1(t_0) = \bar{\Gamma}_0^{(2)}(0, t_0). \quad (17)$$

Chiameremo $M_1(t_0)$ *funzione subarmonica di Melnikov al second'ordine*. Se $M_1(t_0)$ ha uno zero di ordine finito, possiamo ripetere il ragionamento fatto nel caso precedente; altrimenti, possiamo risolvere le equazioni del moto fino al second'ordine in ε , definire la *funzione subarmonica di Melnikov a terz'ordine* $M_2(t_0)$ e così via.

Indeboliamo quindi le Ipotesi 2 e 4 come segue.

Ipotesi 5. *Esiste $\kappa \geq 0$ tale che per ogni $k' = 0, \dots, \kappa - 1$, $M_{k'}(t_0)$ si annulla identicamente, e esistono $t_0 \in [0, 2\pi)$ e $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ tali che t_0 è uno zero di ordine \mathbf{n} per la funzione subarmonica di Melnikov al κ -esimo ordine, ovvero*

$$\frac{d^j}{dt_0^j} M_\kappa(t_0) = 0 \quad \forall 0 \leq j \leq \mathbf{n} - 1, \quad D = D(t_0) := \frac{d^\mathbf{n}}{dt_0^\mathbf{n}} M_\kappa(t_0) \neq 0. \quad (18)$$

Ipotesi 6. *Esiste $i_0 \geq 0$ tale che all' i_0 -esimo passo d'iterazione del processo di Newton-Puiseux esiste un polinomio $P^{(i_0)} = P^{(i_0)}(c)$ che abbia una radice semplice $c^* \in \mathbb{R}$.*

Possiamo quindi estendere il Teorema 2.2 come segue.

Teorema 2.4. *Consideriamo una soluzione periodica con frequenza $\omega = p/q$ per il sistema (2) e assumiamo che le Ipotesi 1, 5 e 6 siano soddisfatte. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ il sistema (2) ammette almeno una soluzione subarmonica di ordine q/p . Tale soluzione si scrive in termini di una serie di Puiseux convergente in ε .*

Di nuovo, l'Ipotesi 6 è necessaria per costruire esplicitamente la soluzione a ogni ordine e quindi dare una stima del raggio di convergenza della serie di Puiseux. Valgono comunque le stesse considerazioni fatte nell'Osservazione 2.3.

3 Cenni di dimostrazione

Le dimostrazioni dei Teoremi 2.1, 2.2 e 2.4 seguono uno schema molto simile: qui daremo dei cenni di dimostrazione del Teorema 2.1.

Sia $P(c)$ il polinomio $P_i(c)$ nell'Ipotesi 3, sia $c^* \in \mathbb{R}$ la sua radice semplice non nulla e sia $C := dP(c^*)/dc \neq 0$.

Innanzitutto, avendo posto $\varepsilon = \sigma\eta^p$, la soluzione subarmonica che cerchiamo è $(\alpha(t), A(t))$, con $\alpha(t) = \alpha_0(t) + \beta_0 + \tilde{\beta}(t)$ e $A(t) = A_0 + B(t)$, e possiamo sviluppare

$$\beta_0 = \sum_{k \geq 1} \eta^k \beta_0^{[k]}, \quad \tilde{\beta}(t) = \sum_{k \geq 1} \eta^k \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} e^{i\nu\omega t} \tilde{\beta}_\nu^{[k]}, \quad B(t) = \sum_{k \geq 1} \eta^k \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\nu\omega t} B_\nu^{[k]}, \quad (19)$$

per risolvere le equazioni del moto a ogni ordine in η ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\beta}_\nu^{[p+k]} = \frac{\Phi_\nu^{[p+k]}}{i\omega\nu} + \omega'(A_0) \frac{\Gamma_\nu^{[p+k]}}{(i\omega\nu)^2}, \quad \nu \neq 0, \\ B_\nu^{[p+k]} = \frac{\Gamma_\nu^{[p+k]}}{i\omega\nu}, \quad \nu \neq 0, \\ B_0^{[p+k]} = -\frac{\Phi_0^{[p+k]}}{\omega'(A_0)}, \\ \beta_0^{[h+k]} = -\frac{1}{C} \tilde{G}^{[k]}(\beta_0^{[h]}, \dots, \beta_0^{[h+k-1]}), \end{array} \right. \quad (20)$$

dove $\Gamma_\nu^{[k]}$ e $\Phi_\nu^{[k]}$ sono definite ricorsivamente da

$$\begin{aligned}\Gamma_\nu^{[k]} &= \sum_{m \geq 0} \sum_{r+s=m} \sum_{\substack{p\sigma_0+q\sigma'_0+\nu_1+\dots+\nu_m=\nu \\ k_1+\dots+k_m=k-p}} \frac{(i\sigma_0)^r}{r!} \frac{\partial_A^s}{s!} G_{\sigma_0, \sigma'_0}(A_0, t_0) \beta_{\nu_1}^{[k_1]} \dots \beta_{\nu_r}^{[k_r]} B_{\nu_{r+1}}^{[k_{r+1}]} \dots B_{\nu_m}^{[k_m]}, \\ \Phi_\nu^{[k]} &= \sum_{m \geq 0} \sum_{r+s=m} \sum_{\substack{p\sigma_0+q\sigma'_0+\nu_1+\dots+\nu_m=\nu \\ k_1+\dots+k_m=k-p}} \frac{(i\sigma_0)^r}{r!} \frac{\partial_A^s}{s!} F_{\sigma_0, \sigma'_0}(A_0, t_0) \beta_{\nu_1}^{[k_1]} \dots \beta_{\nu_r}^{[k_r]} B_{\nu_{r+1}}^{[k_{r+1}]} \dots B_{\nu_m}^{[k_m]}, \\ &+ \sum_{s \geq 2} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s=\nu \\ k_1+\dots+k_s=k}} \frac{\partial_A^s}{s!} \omega(A_0) B_{\nu_1}^{[k_1]} \dots B_{\nu_s}^{[k_s]},\end{aligned}\tag{21}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{G}^{[k]}(\beta_0^{[\mathfrak{h}]}, \dots, \beta_0^{[\mathfrak{h}+k-1]}) &= \sum_{\substack{s_1 \geq 0 \\ j \geq 0 \\ s_1 \mathfrak{p} + j \mathfrak{h} = \mathfrak{s}}} Q_{s_1, j} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_j = k \\ 0 \leq m_i \leq k-1}} \beta_0^{[\mathfrak{h}+m_1]} \dots \beta_0^{[\mathfrak{h}+m_j]} \\ &+ \sum_{n=1}^k \sum_{\substack{s_1 \geq 0 \\ j \geq 0 \\ s_1 \mathfrak{p} + j \mathfrak{h} = \mathfrak{s} + n}} Q_{s_1, j} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_j = k-n \\ m_i \geq 0}} \beta_0^{[\mathfrak{h}+m_1]} \dots \beta_0^{[\mathfrak{h}+m_j]},\end{aligned}\tag{22}$$

dove $Q_{s_1, j} = \sigma^{s_1} \Gamma_0^{(s_1+1, j)}$, purché sia fissato $\beta_0^{[\mathfrak{h}]} = c^*$. I coefficienti $\tilde{\beta}_\nu^{[k]}$ e $B_\nu^{[k]}$ per $k = 0, \dots, \mathfrak{p}-1$, e $\beta_0^{[k]}$ per $k = 0, \dots, \mathfrak{h}-1$ saranno nulli.

A questo punto scriveremo le equazioni ricorsive in (20) in termini di *alberi con foglie* come segue. Per prima cosa rappresentiamo i coefficienti $\tilde{\beta}_\nu^{[\mathfrak{p}]}$, $B_\nu^{[\mathfrak{p}]}$ e $\beta_0^{[\mathfrak{h}]}$ come riportato in Figura 3.

$$\begin{aligned}\beta_0^{[\mathfrak{h}]} &= \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \circ \\ \beta_0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \quad [\mathfrak{h}] \\ \tilde{\beta}_\nu^{[\mathfrak{p}]} &= \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \tilde{\beta} \quad 1 \quad \nu \end{array} \quad [\mathfrak{p}] \quad + \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \tilde{\beta} \quad 2 \quad \nu \end{array} \quad [\mathfrak{p}] \\ B_\nu^{[\mathfrak{p}]} &= \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ B \quad 1 \quad \nu \end{array} \quad [\mathfrak{p}]\end{aligned}$$

Figura 4: Rappresentazione dei coefficienti $\beta_0^{[\mathfrak{h}]}$, $\tilde{\beta}_\nu^{[\mathfrak{p}]}$ and $B_\nu^{[\mathfrak{p}]}$.

Rappresentiamo quindi $\tilde{\beta}_\nu^{[\kappa]}$, $B_\nu^{[\kappa]}$, $\kappa = \mathfrak{p} + k$, $k \geq 1$ e $\beta_0^{[\kappa]}$, $\kappa = \mathfrak{h} + k$, $k \geq 1$ come *elementi di albero*, come riportato in Figura 4. Chiamiamo κ *indice di ordine*.

$$\begin{aligned}
\beta_0^{[\kappa]} &= \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \beta_0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \quad [\kappa] \\
\tilde{\beta}_\nu^{[\kappa]} &= \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \tilde{\beta} \quad 1 \quad \nu \end{array} \quad [\kappa] \quad + \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \tilde{\beta} \quad 2 \quad \nu \end{array} \quad [\kappa] \\
B_\nu^{[\kappa]} &= \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \bullet \\ B \quad 1 \quad \nu \end{array} \quad [\kappa]
\end{aligned}$$

Figura 5: Rappresentazione grafica di $\tilde{\beta}_\nu^{[p+k]}$, $B_\nu^{[p+k]}$ e $\beta_0^{[h+k]}$.

Associamo a ogni linea ℓ un *indice di componente* $h_\ell \in \{\beta_0, \tilde{\beta}, B\}$ e un *momento* $\nu_\ell \in \mathbb{Z}$, tale che $\nu_\ell \neq 0$ se $h_\ell = \tilde{\beta}$, mentre $\nu_\ell = 0$ se $h_\ell = \beta_0$.

Possiamo rappresentare ogni fattore $\beta_{\nu_i}^{[k_i]}$, $B_{\nu_i}^{[k_i]}$ in (21) come elementi di albero: le linee di ogni elemento di albero entrano nello stesso nodo \mathbf{v}_0 da cui esce la linea di radice.

Associamo alla linea di radice $\ell_0 = \ell_{\mathbf{v}_0}$ un *indice di grado* $\delta_{\ell_0} = 1, 2$, tale che $\delta_{\ell_0} = 1$ se $h_{\ell_0} = B$, e associamo a \mathbf{v}_0 un ulteriore indice $b_{\mathbf{v}_0} \in \{0, 1\}$, imponendo $b_{\mathbf{v}_0} = 1$ se $h_{\ell_0} = \tilde{\beta}$ e $\delta_{\ell_0} = 2$, e per $h_{\ell_0} = B$ e $\nu_{\ell_0} \neq 0$. Chiamiamo $r_{\mathbf{v}_0}$ le linee entranti in \mathbf{v}_0 con indice di componente $h = \beta = \beta_0, \tilde{\beta}$, e chiamiamo $s_{\mathbf{v}_0}$ il numero di linee entranti in \mathbf{v}_0 con indice di componente B . Imponiamo che valga $r_{\mathbf{v}_0} = 0$ e $s_{\mathbf{v}_0} \geq 2$ se $b_{\mathbf{v}_0} = 0$. Infine associamo \mathbf{v}_0 due *indici di modo* $\sigma_{\mathbf{v}_0}, \sigma'_{\mathbf{v}_0} \in \mathbb{Z}$ e un *indice di modo globale* $\nu_{\mathbf{v}} = p\sigma_{\mathbf{v}} + q\sigma'_{\mathbf{v}}$, e imponiamo la *legge di conservazione*

$$\nu_{\ell_{\mathbf{v}_0}} = \nu_{\mathbf{v}_0} + \sum_{i=1}^{r_{\mathbf{v}_0} + s_{\mathbf{v}_0}} \nu_{\ell_i}, \quad (23)$$

dove $\ell_1, \dots, \ell_{r_{\mathbf{v}_0} + s_{\mathbf{v}_0}}$ sono le linee entranti in \mathbf{v}_0 .

Imponiamo anche la seguente condizione sugli indici di ordine:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r_{\mathbf{v}_0} + s_{\mathbf{v}_0}} k_i &= k - \mathbf{p}, & b_{\mathbf{v}_0} &= 1, \\
\sum_{i=1}^{s_{\mathbf{v}_0}} k_i &= k, & b_{\mathbf{v}_0} &= 0.
\end{aligned} \quad (24)$$

Associamo infine a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ un *fattore di nodo*

$$\mathcal{N}_v^* = \begin{cases} \sigma \frac{(i\sigma_v)^{r_v} \partial_A^{s_v}}{r_v! s_v!} F_{\sigma_v, \sigma'_v}(A_0, t_0), & h_{\ell_v} = \tilde{\beta}, \quad \delta_{\ell_v} = 1, \quad b_v = 1, \quad \nu_{\ell_v} \neq 0, \\ \sigma \frac{\partial_A^{s_v}}{s_v!} \omega(A_0), & h_{\ell_v} = \tilde{\beta}, \quad \delta_{\ell_v} = 1, \quad b_v = 0, \quad \nu_{\ell_v} \neq 0, \\ \sigma \frac{(i\sigma_v)^{r_v} \partial_A^{s_v}}{r_v! s_v!} G_{\sigma_v, \sigma'_v}(A_0, t_0), & h_{\ell_v} = \tilde{\beta}, \quad \delta_{\ell_v} = 2, \quad b_v = 1, \quad \nu_{\ell_v} \neq 0, \\ \sigma \frac{(i\sigma_v)^{r_v} \partial_A^{s_v}}{r_v! s_v!} G_{\sigma_v, \sigma'_v}(A_0, t_0), & h_{\ell_v} = B, \quad \delta_{\ell_v} = 1, \quad b_v = 1, \quad \nu_{\ell_v} \neq 0, \\ \sigma \frac{(i\sigma_v)^{r_v} \partial_A^{s_v}}{r_v! s_v!} F_{\sigma_v, \sigma'_v}(A_0, t_0), & h_{\ell_v} = B, \quad \delta_{\ell_v} = 1, \quad b_v = 1, \quad \nu_{\ell_v} = 0, \\ \sigma \frac{\partial_A^{s_v}}{s_v!} \omega(A_0), & h_{\ell_v} = B, \quad \delta_{\ell_v} = 1, \quad b_v = 0, \quad \nu_{\ell_v} = 0, \end{cases} \quad (25)$$

dove $\sigma = \text{sign}(\varepsilon)$, e alla linea di radice $\ell = \ell_v$ un propagatore

$$g_\ell^* = \begin{cases} \frac{\omega'(A_0)^{\delta_\ell - 1}}{(i\omega\nu_\ell)^{\delta_\ell}}, & h_\ell = \tilde{\beta}, B, \quad \nu_\ell \neq 0, \\ -\frac{1}{\omega'(A_0)}, & h_\ell = B, \quad \nu_\ell = 0, \end{cases} \quad (26)$$

in modo tale che se sommiamo su tutti gli indici ammessi dalle condizioni imposte (scrivendo \sum^* per la somma sugli indici) possiamo rappresentare graficamente le prime tre equazioni in (21) come riportato in Figura 5.

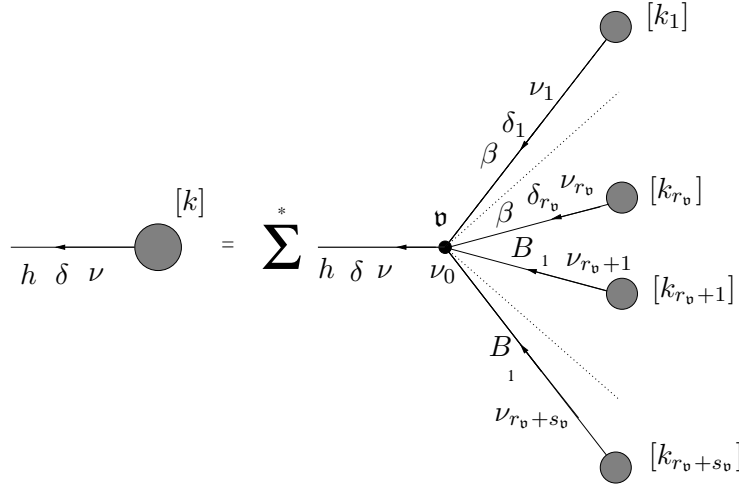


Figura 6: Rappresentazione grafica delle prime tre equazioni in (21).

I coefficienti $\beta_0^{[k]}$ devono essere trattati in modo diverso. Ad ogni modo si dimostra che possono essere rappresentati graficamente come in Figura 6, a patto di imporre le condizioni

$$\begin{aligned}
s_1 \mathfrak{p} + (s_0 + s'_0) \mathfrak{h} &= \mathfrak{s} + n, \\
\sum_{i=1}^{s_0+s'_0} k_i &= s_0 \mathfrak{h} + \sum_{i=1}^{s'_0} k_i = (s_0 + s'_0) \mathfrak{h} + k - \mathfrak{h} - n,
\end{aligned} \tag{27}$$

per un opportuno $0 \leq n \leq k - \mathfrak{h}$, con il vincolo che se $n = 0$ si ha $s'_0 \geq 2$. Chiameremo ℓ_i le s'_0 linee con $h_{\ell_i} = \beta_0$.

Associamo fattori di nodo e propagatori come in (25) e (27), eccetto per quanto riguarda la linea di radice (che avrà propagatore $g_\ell^* = -1/C$) e il nodo da cui la linea di radice esce, che avrà fattore di nodo

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{v}}^* = \frac{(i\sigma_{\mathfrak{v}})^{r_{\mathfrak{v}}} \partial_A^{s_{\mathfrak{v}}}}{r_{\mathfrak{v}}! s_{\mathfrak{v}}!} G_{\sigma_{\mathfrak{v}}, \sigma'_{\mathfrak{v}}}(A_0, t_0). \tag{28}$$

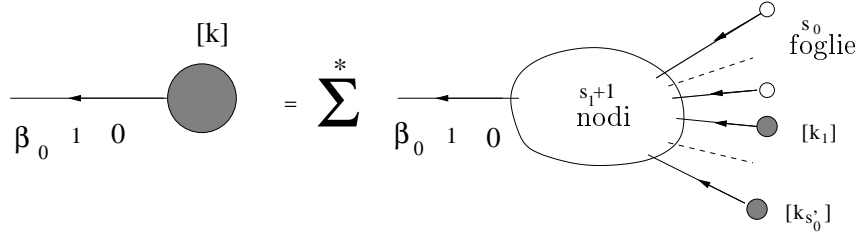


Figura 7: Rappresentazione grafica di $\beta_0^{[k]}$.

Possiamo quindi iterare le rappresentazioni grafiche sopra finché non compaiono solo nodi e foglie. Definiamo il *valore dell'albero* θ come

$$\text{Val}^*(\theta) = \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell^* \right) \left(\prod_{\mathfrak{v} \in N(\theta)} \mathcal{N}_{\mathfrak{v}}^* \right) \left(\prod_{\epsilon \in E(\theta)} \mathcal{N}_\epsilon^* \right), \tag{29}$$

denotiamo con $\Lambda(\theta)$ l'insieme delle linee in θ con indice di componente β_0 , con $N^*(\theta)$ l'insieme dei nodi e con $E^*(\theta)$ l'insieme delle foglie e definiamo *ordine dell'albero*

$$k(\theta) = \mathfrak{p}|N^*(\theta)| + \mathfrak{h}|E(\theta)| + (\mathfrak{h} - \mathfrak{p} - \mathfrak{s})|\Lambda(\theta)|. \tag{30}$$

Si dimostra che

$$\begin{aligned}
\beta_0^{[k]} &= \sum_{\theta \in \Theta_{k,0,\beta_0}} \text{Val}^*(\theta), & k \geq \mathfrak{h}, \\
\tilde{\beta}_\nu^{[k]} &= \sum_{\theta \in \Theta_{k,\nu,\tilde{\beta}}} \text{Val}^*(\theta), & k \geq \mathfrak{p}, \\
B_\nu^{[k]} &= \sum_{\theta \in \Theta_{k,\nu,B}} \text{Val}^*(\theta), & k \geq \mathfrak{p}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Questo ci permette di stimare il raggio di convergenza delle serie di Puiseux.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont., 1973, Translated from the Russian.
- [2] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, Translated from the German by John Stillwell.
- [3] Sh.-N. Chow and J.K. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 251, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] G. Gentile, M.V. Bartuccelli, and J.H.B. Deane, *Bifurcation curves of subharmonic solutions and Melnikov theory under degeneracies*, Rev. Math. Phys. **19** (2007), no. 3, 307–348.
- [5] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [6] V.K. Mel'nikov, *On the stability of a center for time-periodic perturbations*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **12** (1963), 3–52.
- [7] V.A. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques*, J. Math. Pures Appl. **15** (1850), 365–480.
- [8] Zh.F. Zhang and B.Y. Li, *High order Mel'nikov functions and the problem of uniformity in global bifurcation*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **161** (1992), 181–212.