

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di

Riccardo Cesarini

**L'EQUAZIONE DI CARLEMAN
COME LIMITE DI DINAMICHE
STOCASTICHE**

Relatore

Prof. Alessandro Pellegrinotti

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001

FEBBRAIO 2002

Classificazione AMS: 60K35, 82B40, 82C22

Parole Chiave: Sistemi di Particelle, Limite Cinetico.

In questa tesi vedremo come sia possibile approssimare con un modello microscopico l'equazione di Carleman. Questa é una semplificazione dell'equazione di Boltzmann, con velocità discrete, per i gas perfetti. Cerchiamo di chiarire di cosa stiamo parlando. L'equazione differenziale descrive l'evoluzione nel tempo e nello spazio di quantità fisiche che rappresentano il modello di un fenomeno reale. Quindi studiare un'equazione differenziale significa cercare di capire il comportamento di un modello, prevedere il suo sviluppo comprendere la sua natura. Più il modello é fedele al fenomeno reale, maggiori sono le informazioni che si ricavano per quest'ultimo dai risultati ottenuti sul modello. Naturalmente un modello che descrive con grande precisione un fenomeno reale é difficile da studiare.

Approssimare con un modello microscopico un'equazione differenziale significa effettuare un altro grado di semplificazione, o di complicazione, dipende dai punti di vista!

Poiché l'equazione di Carleman descrive l'evoluzione di un gas perfetto, il modello microscopico cerca di descrivere il moto delle singole particelle che compongono il gas. Guardando poi queste su una scala macroscopica si deve ottenere nuovamente il processo descritto dall'equazione differenziale.

Se indichiamo con (r, t) le variabili macroscopiche, rispettivamente lo spazio e il tempo, indicheremo con $(\epsilon^{-1}r, \epsilon^{-1}t)$ le variabili microscopiche. La variabile ϵ rappresenta il fattore di cambio scala. Il passaggio dal mondo microscopico al mondo macroscopico avviene facendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$. Questo limite si chiama *limite idrodinamico*, in particolare se il tempo varia su una scala dell'ordine di ϵ^{-1} allora parleremo di limite di Eulero, se invece la scala del tempo varia con un ordine di ϵ^{-2} il limite é diffusivo. Cambiando l'ordine della scala del tempo si ottengono risultati macroscopici diversi dallo stesso modello microscopico. Per ottenere l'equazione di Carleman dal modello microscopico che andremo a costruire, saranno sufficienti i limiti di Eulero.

L'equazione di Carleman é

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(r, \sigma, t) + \sigma \frac{\partial}{\partial r}\rho(r, \sigma, t) = \rho(r, -\sigma, t)^2 - \rho(r, \sigma, t)^2 \quad (1)$$

$$\rho(r, \sigma, 0) = \rho_0(r, \sigma) \quad (2)$$

dove $r \in \mathbb{R}$, $\sigma = \pm 1$ e $\rho_0 \geq 0$; Questa é un caso particolare dell' equazione di Boltzmann per velocitá discrete

$$\frac{\partial}{\partial t}f + v \cdot \nabla f = \lambda Q(f) \quad (3)$$

dove $f = f(r, v, t)$, $r \in \mathbb{R}^d$, $v \in V$, con V un insieme finito di vettori in \mathbb{R}^d che chiamiamo velocitá e $Q(f)$ un operatore non lineare che soddisfa appropriate condizioni.

Definiamo il modello che approssima l'equazione (1). Per ogni ϵ , $0 < \epsilon \leq 1$, lo spazio degli stati é $\Omega_\epsilon = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}^\epsilon \times \{-1, 1\}}$ dove \mathbb{Z}_ϵ é \mathbb{Z} modulo $2[\epsilon^{-1}] + 1$.

Gli elementi di Ω_ϵ sono configurazioni di particelle denotate da $\eta = \{\eta(x), x = (q, \sigma), |q| \leq 2[\epsilon^{-1}] + 1\}$. In accordo alla (1), ci riferiremo a (q, σ) come alla posizione e velocitá. Con $x = (q, \sigma)$ indichiamo lo stato di una singola particella. Definiamo l'evoluzione con il seguente generatore

$$L^\epsilon = \epsilon^{-1}L_0 + L_c \quad (4)$$

dove:

$$L_0 f(\eta) = \sum_{x=(q,\sigma)} \eta(x)[f(\eta - \delta_{(q,\sigma)} + \delta_{(q+\sigma,\sigma)}) - f(\eta)] \quad (5)$$

$$L_c f(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{x=(q,\sigma)} \eta(x)(\eta(x) - 1)[f(\eta - 2\delta_{(q,\sigma)} + 2\delta_{(q,-\sigma)}) - f(\eta)] \quad (6)$$

Ricordando che la somma su q é modulo $2[\epsilon^{-1}] + 1$.

L_0 descrive un processo che é prodotto diretto di due evoluzioni indipendenti. Il processo della particella con $\sigma = 1$ si evolve come un random walk sulla retta che ha probabilitá $p = 1$ di andare a destra e probabilitá $q = 0$ di andare a sinistra; mentre per $\sigma = -1$ vale l'opposto.

L_c descrive le collisioni: tutte le coppie di particelle nello stesso sito con la stessa velocità, indipendentemente invertono la loro velocità dopo un tempo esponenziale di intensità 1.

Assumiamo come misura iniziale μ^ϵ il prodotto di distribuzioni di Poisson con media

$$\mathbb{E}_{\mu^\epsilon}(\eta(q, \sigma)) = \rho_0(\epsilon q, \sigma)$$

dove $\rho_0 \geq 0$ è una funzione periodica su $[-1, 1]$ con derivata continua. Tale condizione può essere imposta solo quando ϵ^{-1} è un intero, non si perde in generalità se restringiamo la discussione a ϵ che verifica tale condizione. Indicheremo \mathbb{P}^ϵ la legge del processo su Ω_ϵ con generatore L_ϵ e con \mathbb{E}^ϵ la sua aspettazione.

Dalla teoria generale sui processi di Markov e sui generatori associati ad essi, si veda ad esempio [9], sappiamo che per studiare l'evoluzione di un modello possiamo far riferimento alle sue funzioni di correlazione. Per definire queste dobbiamo introdurre la quantità $D(\xi, \eta)$, (*polinomi di Poisson di ordine k*). Sia

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} : |\xi| \equiv \sum_c \xi(x) < \infty\} \quad (7)$$

allora

$$\begin{aligned} D &: \Omega \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) &\rightarrow D(\xi, \eta) \\ D(\xi, \eta) &= \prod_x D_{\xi(x)}(\eta(x)) \end{aligned} \quad (8)$$

dove

$$D_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0; \\ n(n-1) \cdots (n-k+1) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (9)$$

Definiamo quindi le funzioni di correlazione come

$$u^\epsilon(\xi, t | \mu^\epsilon) = \mathbb{E}_{\mu^\epsilon}^\epsilon(D(\xi, \eta_t)) \quad (10)$$

dove η_t denota lo stato del processo al tempo t .

Diremo che le funzioni di correlazione sono a n -corpi se $|\xi| = n$, o equivalentemente che hanno grado n .

Il passaggio dal microscopico al macroscopico per approssimare l'equazione differenziale, viene tradotto in linguaggio matematico con il seguente teorema, che é anche lo scopo di tutto il lavoro di tesi.

Teorema 1 *Sia μ^ϵ la probabilità su Ω_ϵ definita sopra, e sia $\mathbb{E}_{\mu^\epsilon}^\xi$ la sua aspettazione rispetto al processo che parte da μ^ϵ e ha come generatore L^ϵ . Allora per tutti $t > 0$ e $n \geq 1$*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{|\xi|=n} \left| u^\epsilon(\xi, t | \mu^\epsilon) - \prod_{x=(q,\sigma)} \rho(\epsilon q, \sigma, t)^{\xi(x)} \right| = 0 \quad (11)$$

dove $\rho(r, \sigma, t)$ risolve (1) con dato iniziale (2).

Divideremo la dimostrazione del teorema in due sezioni, quella per tempi brevi e quella per tutti i tempi. Questa divisione si rende necessaria perché studiando le funzioni di correlazione per tempi brevi si comprende meglio l'evoluzione del processo. Però le proprietà che si ottengono per le funzioni di correlazione quando imponiamo una condizione sui tempi non si mantengono inalterate aumentando l'intervallo di tempo. Quindi é necessario procedere in modo diverso per tempi lunghi.

Per tempi brevi definendo degli opportuni processi duali, e sfruttando la tecnica usata da Lanford per dedurre l'equazione di Boltzmann da un gas di sfere dure [8], si riesce ad ottenere una scrittura in forma integrale delle funzioni di correlazione. Infatti

$$u^\epsilon(\xi, t | \mu^\epsilon) = \mathbb{E}_{\xi}^{\epsilon, \star} (u^\epsilon(\xi_t, 0 | \mu^\epsilon)) + \int_0^t ds \sum_x \mathbb{E}_{\xi}^{\epsilon, \star} \left(\xi_{t-s}(x) \cdot [u^\epsilon(\xi_{t-s} - \delta_{(q, \sigma)} + 2\delta_{(q, -\sigma)}, s | \mu^\epsilon) - u^\epsilon(\xi_{t-s} + \delta_{(q, \sigma)}, s, \mu^\epsilon)] \right) \quad (12)$$

Dove con $\overline{\mathbb{E}}_{\xi}^{\epsilon, \star}$ indichiamo l'aspettazione del processo duale introdotto per ottenere la rappresentazione sopra proposta delle funzioni di correlazione.

Ora grazie al seguente lemma

Lemma 2 *Dato $c^{\star} > 0$ e $0 < \epsilon \leq 1$ se esiste una probabilità λ su Ω_{ϵ} tale che per tutti $k \geq 1$*

$$\sup_{|\xi|=k} u^{\epsilon}(\xi, 0|\lambda) \leq (c^{\star})^k \quad (13)$$

allora, imponendo $t_0 = (4c^{\star})^{-1}$ per tutti $k \geq 1$

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \sup_{|\xi|=k} u^{\epsilon}(\xi, t|\lambda) \leq 2(2c^{\star})^k \quad (14)$$

si può iterare la scrittura della $u^{\epsilon}(\xi, t|\mu^{\epsilon})$ ed ottenere la dimostrazione del teorema quando $t \leq t_0$ con t_0 definito nel lemma.

Per tutti i tempi é necessario costruire uno schema iterativo che permetta di ottenere una convergenza al tempo T , in modo che le condizioni che si hanno al tempo iniziale siano soddisfatte anche al tempo T : permettendo di reiterare il processo e raggiungere tutti i tempi.

Per far questo si approssima l'equazione di Carleman con una equazione discreta su \mathbb{Z}_{ϵ} . Dato $\epsilon > 0$ e una misura λ su Ω_{ϵ} definiamo $\rho^{\epsilon}(q, \sigma, t|\lambda)$ come soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho^{\epsilon}(q, \sigma, t|\lambda) = \\ \rho^{\epsilon}(q, -\sigma, t|\lambda)^2 - \rho^{\epsilon}(q, \sigma, t|\lambda)^2 + \epsilon^{-1} [\rho^{\epsilon}(q - \sigma, \sigma, t|\lambda) - \rho^{\epsilon}(q, \sigma, t|\lambda)] \\ \rho^{\epsilon}(q, \sigma, 0|\lambda) = \mathbb{E}_{\lambda}(\eta(x)) \end{aligned} \quad (15)$$

La soluzione di (15) é il passaggio intermedio tra le funzioni di correlazione e la soluzione dell'equazione di Carleman vera e propria. Il procedimento iterativo lo effettueremo guardando alle configurazioni η che appartengono al seguente insieme H^{ϵ} : $\forall T > 0$ e $1 \leq r \leq 2$

$$H^{\epsilon} = \{\eta^{(k)} \equiv \eta_{kr\epsilon^{\beta}} \quad kr\epsilon^{\beta} \leq T, \quad \text{tali che valgano 1), 2), 3)}\} \quad (16)$$

dove

1. $\|\eta_0 - \rho_0^\epsilon\| \leq \epsilon^\gamma \quad \rho_0^\epsilon(q, \sigma) = \rho_0(\epsilon q, \sigma).$
2. $\eta^{(k)}(x) \leq \epsilon^{-\zeta} \quad \forall x \quad \forall k \geq 1$ tali che $kr\epsilon^\beta \leq T.$
3. $\|\eta^{(k)}(x) - \rho^\epsilon(\cdot, kr\epsilon^\beta | \eta^{(k-1)})\| \leq \epsilon^\gamma$ per tutti i $k \geq 1$ tali che $kr\epsilon^\beta \leq T.$

Questa scelta non é restrittiva infatti vale la seguente proposizione:

Proposizione 3 *Per ogni n esiste un c tale che*

$$\mathbb{P}_{\mu^\epsilon}^\epsilon(H^\epsilon) \geq 1 - c\epsilon^n \quad (17)$$

Il primo passo é stimare la distanza tra la soluzione dell'equazione di Carleman e la soluzione dell'equazione discretizzata.

Proposizione 4 *Per ogni $T > 0$ esiste una costante \bar{c} tale che é verificato quanto segue. Per ogni $r \in [1, 2]$ e $0 < \epsilon \leq 1$ sia $\eta^{(k)}$, $kr\epsilon^\beta \leq T$, una configurazione in H^ϵ ; allora per tutti i k , come sopra e $x = (q, \sigma)$ risulta:*

$$|\rho^\epsilon(x, r\epsilon^\beta | \eta^{(k)}) - \rho(\epsilon q, \sigma, (k+1)r\epsilon^\beta)| \leq \bar{c}\epsilon^\gamma k \leq \bar{c}\epsilon^{\gamma-\beta}T \quad (18)$$

dove $\rho(r, \sigma, t)$ é soluzione di (2) con dato iniziale ρ_0 .

Affinché (18) valga é sufficiente che fissato un \bar{k} (1), 2), e 3) valgano per $k \leq \bar{k}$. Dobbiamo ora costruire una qualche quantità che colleghi le funzioni di correlazione alla soluzione discreta e darne una stima. Per questo definiamo la seguente funzione

$$v_i^\epsilon(\xi | \lambda) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} u^\epsilon(\underline{x}_J | \lambda) \prod_{i \in J} \rho^\epsilon(x_i, t | \lambda) \quad (19)$$

Su cui abbiamo una stima data dal seguente Teorema.

Teorema 5 Per ogni $\epsilon > 0$ sia $\eta \in \Omega_\epsilon$ tale che

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}_\epsilon \times \{-1,1\}} \eta(x) \leq \epsilon^{-\zeta} \quad (20)$$

Allora per ogni $\beta > 0$ e ogni $n \geq 1$ esiste una c tale che per tutti $t \leq 2\epsilon^\beta$ e per tutte le η che soddisfano (20)

$$\sup_{|\xi|=n} |v_t^\epsilon(\xi|\eta)| \leq c \left(\frac{\epsilon}{t}\right)^{n/4} \epsilon^{-\zeta n} \quad (21)$$

Ora *unendo*, se cosí si puó dire, le precedenti stime si ottiene il risultato desiderato, la dimostrazione della tesi del Teorema (1).

La difficoltá di tutto il procedimento risiede nella dimostrazione del teorema (5), poiché la v contiene al suo interno l'evoluzione di ogni singola particella. Lo studio di queste quantitá é complesso, in quanto coinvolge l'analisi di processi di diramazione.

Se si pensa che il modello descritto si evolve su una retta e che le possibili velocitá delle particelle sono soltanto due, é facile immaginare le difficoltá che si presentano cercando di rendere il modello piú realistico.

Bibliografia

- [1] J. T. Beale *Large-Time behavior of discrete velocity Boltzmann Equations*, Commun. Math. Phys. 106, 659–678 (1986).
- [2] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori Editore, 1986.
- [3] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.
- [4] A. De Masi E. Presutti, *Mathematical methods for Hydrodynamic limits*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [5] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications Vol. I*, Wiley, Inc. New York, 1957: *Vol. II*, 1966.
- [6] B. V. Gnedenko, *Teoria della probabilità*, Editori Riuniti, 1992.
- [7] R. Illner, *Global existence for two velocity models of the Boltzmann equation*, Math. Meth in the Apl. Sci. 1(1979), 187-193.
- [8] O. E. Lanford, *Time evolution of large classical systems*, Lecture Notes in Physics, vol. 38, Springer-Verlag, New York, 1975, pp. 1
- [9] T. M. Ligget, *Interacting particle systems*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [10] T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, Wiley, Inc, New York, 1992.

- [11] P. Revesz *Random walk in random and non-random environments*, World Scientific, 1990.
- [12] Y. G. Sinai *Probability theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [13] H. Spohn, *The dynamics of systems with many particles*, Springer-Verlag, New York, 1991.