UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
presentata da

Cinzia Carrozzo

Sui Gruppi Fuchsiani

Relatore

Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005
Febbraio 2006

Classificazione AMS:51M10
Parole Chiave: Geometria Iperbolica, Gruppi Fuchsiani

Il problema della dimostrabilità del V postulato di Euclide è senz'altro stato tra i più importanti nella storia della matematica. Fino al 1800 la geometria Euclidea era considerata fondamentale; si credeva anzi che essa fosse l'unica geometria. La geometria Euclidea si basa sui dieci postulati di Euclide esposti negli 'Elementi' nel 300 A.C. circa. Se gli altri nove postulati si riferiscono a porzioni limitate di rette e a figure di estensione limitata, il V postulato si riferisce a proprietà della retta all'infinito, e non essendo pertanto evidente, si è fin dai primi commentatori, cercato di mostrarlo dipendente dagli altri. Il V postulato dice:

Per ogni retta r e per ogni punto P non appartenente ad r, esiste al più una retta s passante per P che non incontra r.

Dall'epoca di Euclide fino al XIX secolo i geometri tentarono di dimostrare il V postulato a partire dagli altri, ma riuscirono solo a sostituirlo con altri postulati più intuitivi, ma ad esso equivalenti. Una dimostrazione per assurdo tentata da Saccheri (1667-1733), aprì la strada all'ipotesi dell'indipendenza del quinto postulato e quindi allo sviluppo delle geometrie non euclidee. Infatti a metà dell'ottocento, Bolyai (1802-1860) e Lobachesvskij (1793-1856), pubblicarono i loro risultati su una geometria in cui non vale il quinto postulato e per questo chiamata geometria non euclidea. Nel 1829 Lobachesvskij e nel 1832 Bolyai resero nota quella che viene chiamata attualmente geometria iperbolica. In questa geometria il quinto postulato viene sostituito da un postulato che stabilisce l'esistenza di più parallele condotte da una retta per un punto esterno ad essa. Ovviamente anche in questa nuova geometria si è dovuto presentare dei modelli per renderla veritiera tanto quanto quella Euclidea e il primo a fornirne fu Beltrami con la pseudosfera. Questo modello però non era soddisfacente; nel 1901 infatti Hilbert dimostrò rigorosamente che non poteva rappresentare interamente il piano non euclideo. I primi modelli soddisfacenti di geometria iperbolica furono dati da Klein (1849-1925) e Poincarè (1854-1912) nel 1882. In questa tesi sono stati studiati questi modelli. Il nostro obiettivo primario è quello di studiare i gruppi di trasformazioni iperboliche e in particolar modo i gruppi Fuchsiani. Punto di arrivo della nostra tesi è il teorema di Poincaré che mette in relazione i sottogruppi discreti di isometrie del piano iperbolico con le superfici localmente iperboliche. Accade infatti che ogni superficie localmente iperbolica è data dal quoziente del piano iperbolico mediante l'azione di un gruppo discreto di movimenti rigidi senza torsione. Il teorema di Poincaré mostra come si possono costruire questi gruppi discreti a partire da poligoni iperbolici. Dettagliatamente la tesi si divide nel seguente modo.

Nel primo capitolo presentiamo la geometria euclidea elencando inizialmente gli assiomi di Hilbert. Un esempio significativo di geometrie non euclidee è dato da quelle che sono localmente euclidee; ve ne sono cinque tipi, e sono tutte ottenute dal piano mediante l'azione di un gruppo uniformemente discontinuo, come segue dal teorema di uniformizzazione. Il teorema di classificazione delle geometrie localmente euclidee deriva dalla classificazione dei gruppi uniformemente discontinui. Sia Γ un sottogruppo uniformemente discontinuo di trasformazioni piane. Allora lo spazio delle orbite Σ_Γ ha una struttura naturale di geometria localmente euclidea.

Teorema 1.6.7. *Ogni geometria localmente Euclidea Σ corrisponde ad un gruppo uniformemente discontinuo Γ di movimenti del piano; Σ può essere cioè sovrapposta su Σ_Γ per qualche Σ.*

Teorema 1.6.8 (Teorema Principale). *Ci sono esattamente cinque tipi di geometria localmente Euclidea:*

I *geometria sul piano;*

II *geometria sul cilindro;*

III.a. *geometria sul toro;*

II.b. *geometria sul nastro di Mobius;*

III.b *geometria sulla bottiglia di Klein.*

Il punto chiave nella classificazione dei gruppi uniformemente discontinui è fornito dal:

Teorema 1.2.1 (Teorema di Chasles). *Ogni movimento del piano è una traslazione, o una rotazione o una glissoriflessione.*

Più precisamente le isometrie pari del piano euclideo sono le traslazioni (prive di punti fissi) e le rotazioni (con un punto fisso). In particolare, poichè ogni isometria pari si può scrivere non in modo univoco come il prodotto di due riflessioni, possiamo associare ad una rotazione il fascio di rette passanti per il centro e ad una traslazione il fascio di rette ortogonali al vettore di traslazione. Infatti, una rotazione, ad esempio, si può scrivere come il prodotto della riflessione rispetto ad una qualsiasi retta del fascio individuato e di un'altra riflessione univocamente determinata dalla prima. Uno dei contributi fondamentali della teoria dei gruppi Fuchsiani è stato la generalizzazione di questa situazione.

Per poter studiare il teorema di Poincaré, nel secondo capitolo diamo una rassegna di tutti i modelli del piano iperbolico così come dati per primi da Klein e Poincaré. I modelli di geometria iperbolica consistono in spazi metrici le cui geodetiche soddisfano gli assiomi (dati da Hilbert) soddisfatti dalle rette del piano. I due modelli più importanti a cui faremo riferimento nel seguito sono il semipiano di Poincaré H^2 e il disco di Poincaré D_2. Il semipiano di Poincaré H^2 consiste insiemisticamente nell'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ con $Imz > 0$, con metrica

$$\cosh d\left(z,w\right) = 1 + \frac{\left|w-z\right|^2}{2Im\left[w\right]Im\left[z\right]}; \quad z,w \in H^2.$$

Le geodetiche in H^2 sono tracciate da cerchi Euclidei che hanno centro sull'asse reale e da linee perpendicolari all'asse reale. Il disco di Poincaré D_2 consiste insiemisticamente nell'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$

e con metrica

$$d(P,Q) = arccosh\left(1 + 2\frac{|P-Q|^2}{(1-|P^2|)\left(1-|Q|^2\right)}\right);\ P,Q \in D_2.$$

Come ben sappiamo, nella geometria euclidea le rette possono essere incidenti se hanno un punto in comune, o parallele se non si incontrano mai. Nel caso di H^2 le geodetiche hanno questa proprietà:
geodetiche distinte L_1 e L_2, possono essere incidenti, parallele ossia avere distanza arbitrariamente piccola ma non intersecarsi mai, o ultraparallele, cioè disgiunte e con distanza positiva. Ancora più evidente appare questo fenomeno nel disco di Poincaré, dove le geodetiche possono intersecarsi all'interno, essere disgiunte (ultraparallele) oppure intersecarsi nel bordo all'infinito, cioè parallele. Di conseguenza, così come nella geometria euclidea abbiamo solo due tipi di fasci di rette, uno generato da rette parallele e l'altro da rette incidenti, nella geometria iperbolica abbiamo tre tipi di fasci di geodetiche. Ogni coppia di geodetiche L e L', appartiene a unica famiglia $\mathcal{P}$ di geodetiche chiamato fascio.

Mettiamoci nel disco di Poincaré D_2.
Il fascio determinato da L e L' è
(i) parabolico se L e L' sono parallele;
(ii) ellittico se L e L' si intersecano;
(iii) iperbolico se L e L' sono disgiunte, cioè ultraparallele.
Quindi un fascio parabolico è generato da tutte le geodetiche che non hanno punti in comune all'interno del disco, ma sono tangenti sul bordo. Un fascio ellittico è generato da geodetiche che hanno un punto in comune all'interno del disco di Poincaré, e un fascio iperbolico è formato da tutte le geodetiche che non hanno un punto in comune. Nello studio del semipiano di Poincaré abbiamo visto come si classificano le isometrie, abbiamo così trovato che si classificano sia in termini di fasci di geodetiche che tramite l'invariante tr^2. Spieghiamo meglio questo concetto. Diciamo intanto che il gruppo delle

isometrie di H^2 è dato dal gruppo $PGl_2(\mathbb{R})$. Tale identificazione è data dall'azione di $Gl_2(\mathbb{R})$ su H^2 così definita:

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc>0 \quad \text{e} \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc<0 \quad \text{per}\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Le isometrie pari sono quelle con determinante positivo e si identificano con quelle in $Sl_2(\mathbb{R})$. Sia $\sigma \in Sl_2(\mathbb{R})$ una isometria pari. Risolvendo l'equazione $z = \frac{(az+b)}{(cz+d)}$, troviamo i punti fissi; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ le cui soluzioni sono

$$Z_{\pm} = \frac{a-d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

dove z_+ corrisponde alla soluzione con il segno positivo della radice quadrata e z_- è la soluzione con il segno negativo della radice quadrata. Il numero delle soluzioni dipende dal valore del determinante, possiamo scrivere

$$(d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$$

Poichè $ad - bc = 1$, abbiamo che il discriminante è uguale a

$$(a+d)^2 - 4$$

Se

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$$

ricordiamo che la traccia di σ è l'invariante $tr\sigma := a + d$, abbiamo dunque

$$z_{\pm} = \frac{a-d \pm \sqrt{(tr\sigma)^2 - 4}}{2c}$$

Quindi in base al valore della traccia di σ si classificano le trasformazioni.

Se $(tr\sigma)^2 < 4$ in queso caso si parla di trasformazioni ellittiche e σ ha un punto fisso in H^2; queste trasformazioni sono analoghe alle rotazioni euclidee.

Se $(tr\sigma)^2 > 4$ la trasformazione ha due soluzioni reali e quindi σ ha due punti fissi distinti A e B su ∂H^2; si tratta in questo caso di trasformazioni iperboliche che sono analoghe alle traslazioni.
Se $tr^2\sigma = 4$ la trasformazione ha due soluzioni coincidenti quindi σ ha un solo punto fisso P su ∂H^2. In questo caso parliamo di trasformazioni paraboliche che non hanno alcuna relazione con alcuna trasformazione euclidea. Analogamente al caso euclideo possiamo anche classificare le isometrie pari tramite i fasci di geodetiche. Un' isometria g è ellittica se e solo se può essere rappresentata come $g = \sigma_2\sigma_1$, dove σ_j è la riflessione in L_j per $j = 1, 2$ e L_1 e L_2 stanno in un fascio ellittico. Il fascio ellittico associato è il fascio contenente tutte le geodetiche passanti per un punto fisso v di g nel piano iperbolico. Possiamo scegliere in modo arbitrario L_1 o L_2 da questo fascio e le altre L_j sono unicamente determinate da g. Un'isometria ellittica g è determinata completamente dal suo punto fisso v e determina nel piano iperbolico un numero reale θ in $[0, 2\pi)$ perchè è una rotazione. Una isometria g è iperbolica se e solo se può essere rappresentata come $g = \sigma_2\sigma_1$ dove σ_j è la riflessione in L_j e dove L_1 e L_2 determinano un fascio iperbolico. L'asse di g nel piano iperbolico è l'asse del fascio, cioè l'unica geodetica ortogonale a tutte le linee che si trovano nel fascio che finiscono nel punto fisso di g. Naturalmente, l'asse di g è l'unica geodetica g-invariante. Possiamo scegliere in modo arbitrario L_1 o L_2 e l'altra L_j è determinata da g. Il fascio di cerchi passante per il punto P e tangente all'asse x è invariante rispetto a σ. Un cerchio di questo fascio che è contenuto in H^2 è chiamato prociclo con centro Q che può essere caratterizzato come orbita di un punto per il gruppo di trasformazioni paraboliche che fissano il punto $P \in \partial H^2$. Un'isometria g è parabolica se e solo se può essere espressa come $g = \sigma_2\sigma_1$ dove σ_j è una riflessione rispetto a L_j e L_1 e L_2 determinano un fascio parabolico, quindi sono geodetiche parallele. Il fascio parabolico associato è il fascio contenete tutte le geodetiche che hanno come punto fisso il punto fissato da g sul bordo. L_1 o L_2 possono

essere scelte in modo arbitrario dal fascio. Questa classificazione risulta pertanto assolutamente analoga al caso euclideo. Nel caso iperbolico si affianca però un nuovo tipo trasformazioni dato dalle orolazioni. Abbiamo studiato anche un altro modello che rappresenta la geometria iperbolica; è il modello matriciale $sl_2(\mathbb{R})$. Il gruppo delle isometrie del piano iperbolico su questo modello è rappresentato dal gruppo di Lorentz.

Nel terzo capitolo studiamo i sottogruppi discreti del piano iperbolico. Lo scopo di questa tesi infatti, è quello di studiare i gruppi di trasformazioni iperboliche perchè i gruppi Fuchsiani sono gruppi discreti di isometrie pari. Le isometrie pari sono le rotazioni, traslazioni e orolazioni; quelle dispari sono le glissoriflessioni. L'insieme di punti ellittici, che sono i punti fissati dalle trasformazioni ellittiche di un gruppo discreto Γ forma un sottoinsieme discreto di H^2. Quello che abbiamo studiato in questo capitolo è che vale il viceversa; l'abbiamo visto con il teorema di Jacob Nielsen. L'asserto infatti dice questo.

Teorema 3.5.1 (Teorema di Jacob Nielsen). *Un sottogruppo non-elementare Γ di $PGl_2(\mathbb{R})$ è discreto se e solo se l'insieme P di punti ellittici fissati su H^2 è discreto.*

Abbiamo quindi prima studiato quali sono i sottogruppi elementari. Sono un tipo di sottogruppi di $PGl_2(\mathbb{R})$, in particolare sono gruppi che fissano un punto del piano iperbolico o un punto sul bordo del piano iperbolico o stabilizzano una geodetica. Quindi sono rispettivamente gruppi di trasformazioni tutte ellittiche, o tutte paraboliche o tutte iperboliche. Per i sottogruppi non elementari valgono le seguenti proposizioni

Proposizione 3.4.7. *Sia G un sottogruppo non elementare di $PGl_2(\mathbb{R})$. Se G non è composto solo da isometrie pari, allora G contiene una glissoriflessione.*

Proposizione 3.4.5. *Un sottogruppo non-elementare G di $PGl_2(\mathbb{R})$ contiene una traslazione.*

Il terzo capitolo si conclude con lo studio dell'azione di gruppi discreti Γ su punti del bordo del piano iperbolico. Diciamo che un punto $S \in \partial H^2$ è cuspide per H^2 se è fissato da trasformazioni paraboliche $\beta \in \Gamma$. Lo stabilizzatore Γ_S di una cuspide $S \in \partial H^2$ è formato da orolazioni e riflessioni rispetto a geodetiche passanti per il punto S.

Nel quarto capitolo abbiamo studiato le geometrie localmente iperboliche.

Uno spazio metrico Y con la minima distanza, tale che ogni punto ha un intorno aperto isometrico al disco aperto nel piano iperbolico H^2, è detto superficie iperbolica.

Uno dei problemi più importanti che abbiamo studiato è quello della possibilità di congiungere due punti della superficie iperbolica con un arco di geodetica di lunghezza uguale alla distanza tra essi. Abbiamo visto con il teorema di Hopf Rinow che questo succede quando la superficie iperbolica è completa come spazio metrico. L'asserto infatti dice questo.

Teorema 4.2.1 (Teorema di Hopf Rinow). *Sia X una superficie iperbolica completa. Per ogni due punti x e y su X di distanza $d = d(x, y)$, esiste una curva godetica $\sigma : \mathbb{R} \to X$ con $\sigma(0) = x$ e $\sigma(d) = y$.*

Una superficie iperbolica completa ammette un'isometria locale che va dal piano iperbolico alla superficie stessa. Infatti, così come nel caso euclideo esiste un ricoprimento della superficie localmente euclidea dal piano, anche nella geoemeteria localmente iperbolica vale il teorema di uniformizzazione:

Teorema 4.3.1 (Teorema di Uniformizzazione). *Sia D un disco aperto del piano iperbolico H^2. Ogni isometria $\phi : D \to X$ di D in una superficie iperbolica completa X ha un'estensione unica in un'isometria locale $H^2 \to X$.*

Un'isometria locale è una mappa tra due spazi metrici tale che ogni punto del primo spazio ha un intorno aperto che è mappato isometricamente in un intorno aperto del secondo spazio metrico. Con il teorema di uniformizzazione dunque si dimostra che ogni superficie iperbolica è rivestita dal piano iperbolico H^2. Un altro importante risultato che abbiamo visto è il teorema di monodromia:

Teorema 4.4.1 (Teorema di Monodromia). *Sia X una superficie iperbolica completa. Ogni isometria locale $\theta : X \to H^2$ è una biiezione.*

Anche qui come nel caso euclideo abbiamo visto come si classificano le superfici localmente iperboliche in termini di gruppi discreti senza torsione. Abbiamo visto che ogni superficie iperbolica completa è isometrica al piano iperbolico quozientato un sottogruppo di $PGl_2(\mathbb{R})$ senza torsione. L'asserto è il seguente:

Teorema 4.5.1. *Ogni superficie completa iperbolica X è isometrica alla superficie della forma H^2/Γ dove Γ è un sottogruppo discreto senza torsione di $PGl_2(\mathbb{R})$. Due tali sottogruppi Γ e Σ definiscono superfici isometriche a H^2/Γ e H^2/Σ se e soltanto se Γ e Σ sono sottogruppi coniugati di $PGl_2(\mathbb{R})$*

Con questo teorema quindi si vede come si classificano le superfici iperboliche a partire dai gruppi discontinui di trasformazioni iperboliche. Il contributo fondamentale di Poincaré è dato dalla costruzione di gruppi discreti a partire da poligono iperbolici.

Nel quinto capitolo, e quindi nella parte finale di questa tesi abbiamo studiato appunto il teorema di Poincaré.

Per poter dimostrare il teorema è necessario innanzitutto vedere quali sono le proprietà di un dominio fondamentale. Abbiamo visto infatti che se $P \subseteq H^2$ è un dominio fondamentale localmente finito per il gruppo discreto di isometrie Γ, tale gruppo è generato dall'insieme di γ tale che $\gamma\left(\bar{P}\right) \cap \bar{P} \neq \emptyset$.

Nello studiare un dominio fondamentale localmente finito convesso abbiamo visto che il bordo di tale dominio è dato dall'unione dei suoi lati. Il bordo del dominio è rappresentato da lati orientati. Con l'applicazione $s \to *s$ indichiamo l'accoppiamento laterale di P tale che s e $*s$ hanno la stessa lunghezza iperbolica e $*(s^{-1}) = (*s)^{-1}$. L'isometria di H^2, σ_s, che mappa $*s$ in s è chiamata trasformazione laterale. Dato un vertice del poligono con l'operatore $\downarrow s$ indichiamo il secondo lato a partire dal vertice dato. La combinazione dei due operatori definisce l'operatore laterale

$$\Psi : \xi \to \xi \text{ tale che } \Psi s = \downarrow *s \quad s \in \xi$$

I cicli per Ψ sull'insieme dei lati del poligono sono chiamati cicli laterali e la sequenza dei punti su questi è chiamata ciclo di vertici. Un poligono compatto quindi è definito dal ciclo laterale, ciclo dei vertici e dalle trasformazioni laterali. Deve valere inoltre che la mappa ciclica $\sigma = \sigma_1, ..\sigma_r$ è una rotazione intorno a P_1 di angolo congruo alla somma degli angoli interni

$$\angle_{int} P_1 + \angle_{int} P_2 + ...\angle_{int} Pr \bmod 2\pi$$

Un ciclo laterale $s_1, .., s_r$ soddisfa la condizione ciclica se la somma degli angoli corrispondenti al ciclo di vertici $P_1, .., P_r$ ha la forma

$$\sum_{i=1..r} \angle_{int} P_i = \frac{2\pi}{n_c}; \quad n_c = 1, 2, 3, ..$$

La mappa ciclica $\sigma = \sigma_1..\sigma_r$ di un ciclo laterale che soddisfa la condizione ciclica è una rotazione intorno a P_1 di ordine n_c. L'asserto del teorema di Poincaré dice quindi:

Teorema 5.5.1 (Teorema di Poincaré). *Sia Δ un poligono compatto convesso con lati a due a due accoppiati che soddisfano la condizione ciclica. Allora, il gruppo G generato dalle trasformazioni laterali σ_s con $s \in \xi$ è un gruppo discreto con Δ come dominio fondamentale. Un insieme completo di* *relazioni dei generatori è formato dalla relazione ciclica* ${\sigma_c}^{n_c} = i$, *dove con* n_c *indichiamo il numero di cicli, e dalla relazione di riflessione*

$$\sigma_s^{-1} = \sigma_s, \qquad \sigma_{*s} = \sigma_s^{-1}; \quad s \in \xi$$

Abbiamo visto quindi come si può costruire un gruppo discreto partendo da un poligono iperbolico. Siamo giunti alla conclusione del nostro obiettivo che era quello di studiare i gruppi Fuchsiani e in particolar modo il teorema di Poincarè che mette in relazione i sottogruppi discreti di $PGl_2(\mathbb{R})$ con le superfici localmente iperboliche.

Bibliografia

[Bea95] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.

[Ive92] Birger Iversen. *Hyperbolic geometry*, volume 25 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[MSW02] David Mumford, Caroline Series, and David Wright. *Indra's pearls*. Cambridge University Press, New York, 2002. The vision of Felix Klein.

[NS87] V. V. Nikulin and I. R. Shafarevich. *Geometries and groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by M. Reid, Springer Series in Soviet Mathematics.

[Poi82] H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsiens. *Mathematische Annalen*, 1882.

[Shi94] Goro Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, volume 11 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. Reprint of the 1971 original, Kan o Memorial Lectures, 1.

[Tru98] Richard Trudeau. *Die geometrische Revolution.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1998. With an introduction by H. S. M. Coxeter, Translated from the second English (1995) edition by Christof Menzel.