

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Studio empirico per la dinamica della curva dei tassi d'interesse forward

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di Daniela Cavaldesi

Relatore: Prof. Lucia Caramellino

La ricerca di un'adeguata descrizione statistica della dinamica dei titoli finanziari ha una lunga storia che è giunta al culmine ora che sono disponibili numerosi insiemi di dati su serie storica. Il caso della curva del tasso di interesse è particolarmente interessante perché non si tratta di un moto aleatorio di un punto, ma dell'intera curva.

La necessità di dare una descrizione consistente di questa curva è ulteriormente aumentata a seguito del rapido sviluppo dei titoli derivati.

Prima di intraprendere la trattazione degli argomenti esposti in questa tesi, diamo alcune definizioni base necessarie per capire quanto segue.

Con il termine **titolo derivato** si intende uno strumento finanziario il cui valore dipende da quello di un'attività sottostante, sia essa finanziaria o reale: un tasso d'interesse, di cambio, un indice di borsa, un titolo. Noi ci occuperemo di particolari titoli derivati: **contratti a termine**¹ di tipo **futures** e **forward**. Il contratto forward e il contratto futures sono apparentemente molto simili, ma presentano differenze sostanziali. Il primo è nato dall'esigenza dei commercianti e degli agricoltori di assicurarsi gli uni di poter comprare e gli altri di poter vendere un determinato prodotto ad un prezzo equo.

La logica alla base di questo tipo di contratti è molto semplice: si decide al tempo $t = 0$ di comprare o vendere una certa attività ad un certo prezzo K

¹I **contratti a termine** sono un accordo, stipulato ad un tempo t , che obbliga a comprare o a vendere un'attività ad una certa data futura $T > t$ e per un certo prezzo K fissato a t .

e ad una certa scadenza T . I due investitori si accordano in tal senso stipulando un contratto forward con il quale si impegnano a rispettare la data di consegna. Questo tipo di contratto è però molto rischioso, soprattutto per il pericolo di insolvenze tra le controparti. Quindi, per ridurre questi rischi sono stati introdotti di recente i contratti futures. La differenza sostanziale tra questi due tipi di contratti è che i secondi sono quotati in Borsa e, in questi, gli accordi sono gestiti da un ente statale detto Clearinghouse che evita appunto che si verifichino inadempienze.

Fondamentalmente un contratto futures rappresenta una scommessa sul futuro; infatti, si decide di acquistare un futures (o meglio di assumere una posizione **long** su futures) se ci si aspetta un aumento dei prezzi; si decide, invece, di vendere (o equivalentemente assumere una posizione **short** su futures) se si presume che i prezzi possano scendere. Ovviamente avrà un guadagno chi dei due contraenti ha meglio ipotizzato l'andamento futuro del mercato.

Il modello che stiamo per presentare, si basa sull'analisi di dati inerenti a contratti futures trimestrali su tasso d'interesse su eurodollaro raccolti tra il 1990 e il 1996. L'**eurodollaro** è il valore di un dollaro depositato al di fuori degli U.S.A. in una banca statunitense o no. Il futures su eurodollaro è quello tra i futures su tassi d'interesse a breve termine ad aver avuto maggior successo. Il tasso d'interesse in eurodollari è un tasso d'interesse interbancario, percepito sugli eurodollari anche noto come London Interbank Offer Rate (LIBOR) a 3 mesi. L'interesse di analizzare dati sull'eurodollaro sta nel fatto che il valore $v(t, \theta)$ del contratto, cioè il prezzo quotato in Borsa al tempo t per un contratto che scade a $T = t + \theta$, permette di conoscere il valore della *forward rate curve*, utilizzando la formula

$$f(t, \theta) = 100 - v(t, \theta)$$

dove 100 rappresenta convenzionalmente il valore nominale del contratto.

Con il termine **forward rate curve** (F.R.C.) si intende una funzione $f(t, \theta)$ del giorno di contrattazione t e della maturità del contratto θ che sintetizza il tasso d'interesse calcolato sul contratto stesso ed è utilizzata per calcolare il prezzo dei titoli obbligazionari. Infatti, la F.R.C. consente di

determinare il prezzo $P(t, \theta)$ di uno **zero coupon bond**² tramite la seguente:

$$P(t, \theta) = \exp \left\{ - \int_0^\theta f(t, u) du \right\}$$

In questa tesi analizziamo il **modello BCE-KPS** per la dinamica dei tassi d'interesse forward, ovvero per la F.R.C. $f(t, \theta)$. Tale modello è stato proposto da Bouchaud, Cont, El-Karoui, Potter, Sagna, i quali, basandosi su un'analisi empirica dei dati futures su eurodollaro, forniscono dapprima una descrizione qualitativa della dinamica della F.R.C. per poi mettere a punto un modello più rigoroso in grado di dare una spiegazione matematica dei risultati osservati sperimentalmente. In questo modo, il modello nasce in contrapposizione a quelli già esistenti, carenti, a giudizio degli autori, perché primariamente motivati dalla loro trattabilità matematica piuttosto che dalla loro aderenza ai dati. Ad esempio le fluttuazioni del tasso d'interesse sono spesso assunte gaussiane, come, per esempio, nel modello di Vasicek (descritto nel capitolo 1), per essere studiate più agevolmente.

Il modello BCE-KPS si basa sull'assunzione che la forward rate curve si possa scrivere, a meno di un rumore aleatorio, come combinazione lineare dello **spot rate** $r(t)$ e dello **spread** $s(t)$, definiti rispettivamente come segue:

$$r(t) = f(t, \theta_{min}), \quad s(t) = f(t, \theta_{max}) - r(t)$$

dove θ_{min} e θ_{max} rappresentano la minima e la massima maturità disponibile, cioè tramite il tasso d'interesse a breve e l'incremento della *forward rate curve* nelle due maturità estreme. In effetti, è possibile verificare che la forward rate curve si può sempre scrivere nel seguente modo:

$$f(t, \theta) = r(t) + s(t)G(\theta) + \xi(t, \theta)$$

²Uno **zero coupon bond** con maturità $T = t + \theta$ è un contratto che garantisce, al tempo t , di ottenere un'unità di valuta al tempo T . Il **prezzo** di uno zero coupon bond rappresenta, in qualche modo, quanto occorre depositare in banca all'istante t per ottenere un'unità monetaria a $t + \theta$.

dove G e ξ sono due funzioni opportune: la prima è una funzione deterministica della maturità θ e la seconda denota un rumore a media³ nulla

$$\langle \xi(t, \theta) \rangle = 0.$$

Analizzando l'evoluzione dei futures su eurodollaro, si è notato che $G(\theta)$ è ben interpolata da una funzione del tipo $\alpha\sqrt{\theta}$, dove α è una costante opportuna, che gli autori hanno verificato essere dello stesso ordine della volatilità $\sigma(0)$ dello spot rate:

$$G(\theta) = c\sigma(0)\sqrt{\theta}, \quad \text{con } \sigma(0) = \sqrt{\langle (\delta r(t))^2 \rangle}$$

dove c denota una costante opportuna e $\delta r(t)$ l'incremento giornaliero dello spot rate.

Per poter avere uno studio più preciso delle fluttuazioni, ovvero del rumore ξ , è stata introdotta la matrice di correlazione $M(\theta, \theta^1)$ così definita:

$$M(\theta, \theta^1) = \langle \xi(t, \theta)\xi(t, \theta^1) \rangle \quad \theta, \theta^1 \in \Theta$$

dove $\Theta = \{\theta_{min}, \dots, \theta_{max}\}$ denota l'insieme delle date di scadenza a disposizione. Questa matrice non solo evidenzia la correlazione tra il rumore a due differenti maturità, ma analizzando l'andamento degli autovalori, sulla base dei dati relativi ai futures su eurodollaro, gli autori hanno osservato che il rumore $\xi(t, \theta)$ può essere riscritto, in buona approssimazione, come funzione dell'autovalore massimo $\lambda_1 (> 0)$ e dell'autovettore $\psi_1 = (\psi_1(\theta))_{\theta \in \Theta}$ ad esso associato perchè ogni altro autovalore è risultato trascurabile rispetto a λ_1 . A seguito di questa approssimazione, l'equazione del modello diviene:

$$f(t, \theta) = r(t) + s(t)G(\theta) + \sqrt{\lambda_1}\xi(t)\psi_1(\theta).$$

Rimane ora da stabilire se l'andamento $\sqrt{\theta}$ per la funzione $G(\theta)$ e il rapido decadimento degli autovalori della matrice M possano considerarsi

³ Sia $g(t, \theta)$ una qualsiasi funzione del tempo t e della maturità θ e sia $\{t_i\}_{i=1, \dots, N}$ l'insieme delle date di contrattazione a disposizione. La quantità $\langle g(t, \theta) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(t_i, \theta)$ definisce la *media empirica* di g valutata sul tempo t (si noti che tale operazione viene effettuata rispetto alla variabile temporale t e non rispetto alla maturità θ , dando quindi luogo un oggetto indipendente da t).

come proprietà generali della F.R.C. piuttosto che conseguenze strettamente legate alla scelta dei futures su eurodollaro come dati per lo studio empirico effettuato fino ad ora.

Il fatto che la forward rate curve si discosti in media dallo spot rate di un fattore dell'ordine della volatilità per una funzione che dipende da $\sqrt{\theta}$ almeno per valori non troppo piccoli di θ , è stato interpretata dagli autori come una condizione detta di *value at risk*, mediante la quale il mercato fa una previsione sull'andamento futuro del tasso spot in termini dell'evoluzione presente della curva dei tassi forward. Difatti, i futures su tassi d'interesse costituiscono una scommessa sul tasso: se il tasso spot alla scadenza è più grande del tasso forward su cui è calcolato il prezzo di consegna, l'investitore può dirsi soddisfatto, perché il contratto stipulato al tempo t e a maturità θ si è rivelato più vantaggioso di un eventuale acquisto (o vendita) a $t + \theta$. In altre parole, è come se gli investitori facessero una scommessa sul valore futuro dello spot rate imponendo la seguente condizione: la probabilità che lo spot rate al tempo $t + \theta$, $r(t + \theta)$, ecceda $f(t, \theta)$ è pari ad una quantità p (fissata) piuttosto grande. Scrivendo $r(t + \theta)$ come una passeggiata aleatoria che parte da t e riscrivendo la probabilità di cui sopra in termini dell'approssimazione gaussiana tipica delle passeggiate aleatorie, si è potuto verificare rigorosamente il comportamento $\sqrt{\theta}$ della funzione G , ovviamente per valori di θ non troppo piccoli (a meno che gli incrementi del tasso spot non siano assunti gaussiani, nel qual caso il comportamento $\sqrt{\theta}$ sarebbe vero per ogni θ).

Ciò che prima abbiamo accennato, riguardo al veloce decadimento degli autovalori, è spiegato matematicamente scrivendo per la curva del tasso d'interesse un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo parabolico. Risolvendo questa equazione, e imponendo opportune ipotesi sul rumore cui è soggetta la curva, si ottiene infatti che:

$$0 \leq \lambda_q \leq \frac{C}{q^2}$$

dove λ_q è il q -esimo autovalore della matrice di correlazione M . Ciò significa che gli autovalori decadono più velocemente di q^{-2} .

Il lavoro originale contenuto in questa tesi consiste nell'aver testato il mo-

dello BCE-KPS, implementando al calcolatore⁴ programmi che calcolano le quantità necessarie per la costruzione della *forward rate curve*. Inizialmente abbiamo lavorato su file di dati inerenti a contratti futures su eurodollaro raccolti in un periodo di tempo compreso tra il 1 Gennaio 1982 e il 6 Maggio 1998, per verificare i risultati esposti nell'articolo di Bouchaud *et al.* e poi, abbiamo vagliato l'attendibilità del modello utilizzando dati su altri due tipi di contratti futures su tassi d'interesse: eurolira e marco⁵ (dati raccolti tra il 5 Maggio 1992 e il 2 Giugno 1998, tra il 20 Aprile 1989 e il 2 Giugno 1998 rispettivamente).

La prima parte del lavoro, cioè la sistemazione dei dati, che poi si è rivelata fondamentale, è stata effettuata in più riprese ed ha richiesto molto tempo. Tale opera di manipolazione è stata necessaria per poter utilizzare i nostri dati, che spesso presentavano delle irregolarità quali, ad esempio, dati fittizi o privi di significato (abbiamo infatti trovato dati aventi valore nullo) o anche dati inerenti a giorni festivi (calcolati senza un apparente criterio logico).

I dati in nostro possesso per l'eurodollaro erano, in origine, in un formato del tipo:

ED1985U 850213 89400 89530 89390 89460 39769 104768 (1)

Nella prima colonna il simbolo ED indica che si tratta di un contratto futures su eurodollaro, la data successiva indica l'anno di scadenza, in questo caso il 1985, e la lettera indica il mese di scadenza del contratto, in questo caso settembre. Infatti ad ogni mese è stata assegnata una lettera dell'alfabeto mediante la seguente convenzione: le lettere *F, G, H, J, K, M, Q, U, V, X, Z* corrispondono rispettivamente ai mesi *Gennaio, Febbraio, Marzo, ..., Dicembre*. Nella seconda colonna sono contenuti i dati relativi alla data di stipula del contratto tramite, rispettivamente, l'anno, il mese e il giorno (850213 sta per 13 Febbraio 1985).

⁴La gran parte dei programmi implementati è in linguaggio C, altri utilizzano comandi UNIX e per il calcolo degli autovalori, abbiamo utilizzato il linguaggio di programmazione FORTRAN.

⁵Si tratta di contratti di recente introduzione nel mercato e che ora, dal 1 Gennaio 1999, da quando cioè è stata emessa la moneta unica europea, sono stati sostituiti con un nuovo contratto futures su tasso d'interesse su euro denominato "euribor".

Le colonne 3, 4, 5, 6 determinano i prezzi del contratto. Più precisamente, la terza indica il prezzo di apertura, la quarta il prezzo più alto rilevato nella giornata, la quinta il prezzo più basso, la sesta rappresenta il prezzo di chiusura del contratto. Infine, le ultime due colonne costituiscono, rispettivamente, il **volume**, o meglio il numero di contrattazioni giornaliere e l'**open interest**⁶. Implementando i programmi **teta.c sistemadati.c sistema-prova.c** e **ordinateta.c** abbiamo trasformato i dati di partenza in due files, denominati **t3.dat.gz** e **teta.dat.gz**, contenenti i dati riguardanti la forward rate curve in termini di:

1. giorno di contrattazione, espresso con un unico numero calcolato avendo imposto la convenzione di contare i giorni a partire dall'anno 1981;
2. maturità θ , che caratterizza la data di scadenza di questi contratti, valutata secondo un criterio opportuno;
3. valore del contratto, da cui si può ricavare la forward rate curve;
4. volume del contratto.

Tali files sono ordinati rispettivamente l'uno in funzione del giorno di contrattazione e l'altro in funzione della maturità, e quindi nel seguente formato:

Tabella 1

File di dati ordinato rispetto alla data di stipula t : **t3.dat.gz**

t	θ	v	w
t	$\theta + 1$	v	w

Tabella 2

File di dati ordinati rispetto alla maturità θ : **teta.dat.gz**

t_i	θ	v	w
t_{i+1}	θ	v	w

Per ottenere questi due files si sono rese necessarie diverse e ripetute manipolazioni. Infatti osservando i grafici ottenuti a partire dai nostri programmi, abbiamo notato l'evidente presenza di alcuni dati non del tutto attendibili. È stato quindi necessario eliminare dai dati di partenza quelli errati ed eseguire nuovamente i programmi.

⁶L'**open interest** rappresenta il numero complessivo dei contratti in *essere*, cioè il numero di posizioni attive nel mercato, secondo la convenzione economica che due posizioni opposte sono nulle per il mercato.

Una volta ottenuti questi due file di dati abbiamo potuto calcolare tutte le quantità necessarie per la costruzione della forward rate curve calcolando:

- (a) spread e spot;
- (b) la funzione $G(\theta)$;
- (c) il rumore $\xi(t, \theta)$;
- (d) la matrice di correlazione del rumore $M(\theta, \theta^1)$ ed i rispettivi autovalori e autovettori;
- (e) la volatilità della forward rate curve e del tasso spot;
- (f) la funzione $\xi(t)$.

I risultati ottenuti, descritti in dettaglio nel terzo capitolo, sono gli stessi ottenuti dagli autori dell'articolo in esame per quanto riguarda l'eurodollaro, mentre presentano delle diversità per i dati su eurolira e marco.

La differenza sostanziale tra i tre tipi di contratti è rappresentata dall'andamento della funzione $G(\theta)$. Infatti, mentre per l'eurodollaro questa è ben interpolata dalla funzione $\sqrt{\theta}$, come specificato nell'articolo di Bouchaud *et al.*, per quanto riguarda la lira ed il marco il comportamento riscontrato è piuttosto diverso: la funzione $G(\theta)$ ha un andamento dell'ordine di θ^α , con $\alpha \simeq 2.7$ per la lira e $\alpha \simeq 1.07$ per il marco. In realtà, l'ipotesi $\alpha = 0.5$ è stata interpretata per valori di θ non troppo piccoli e, a differenza dell'eurodollaro, per quanto riguarda marco e lira non disponiamo di molte maturità, perché, come già anticipato, si tratta di contratti piuttosto recenti ⁷. Quindi, non ci stupisce che in questi due casi il comportamento di $G(\theta)$ sia sensibilmente diverso.

Per quanto riguarda l'andamento degli autovalori della matrice di correlazione, il nostro studio ha confermato l'ipotesi fatta nel modello BCE-KPS: in tutti i contratti analizzati, eurodollaro, lira e marco, abbiamo osservato un autovalore che predomina sensibilmente sugli altri, così da poter fattorizzare il rumore come prodotto di due funzioni, l'una dipendente solo dalla data di contrattazione t e l'altra dalla scadenza θ , riducendo in tal modo i gradi di libertà del modello.

In dettaglio, questa tesi è suddivisa in tre capitoli.

Il capitolo 1 contiene i prerequisiti di carattere finanziario necessari per la comprensione del contenuto dell'intera trattazione.

⁷Infatti, il valore di θ_{max} disponibile per eurodollaro, lira e marco è, rispettivamente, 40, 7 e 14, ovvero i contratti sui quali abbiamo lavorato hanno scadenza massima, rispettivamente, a 10, 2 e 4 anni circa.

Nel secondo capitolo viene descritto ed analizzato il modello BCE-KPS.

Il terzo capitolo contiene i nostri risultati e le conclusioni cui siamo giunti, con l'aggiunta delle principali funzioni implementate e dei grafici che descrivono l'andamento di tutte le quantità coinvolte nel modello.

Infine, a questa tesi viene allegato un dischetto magnetico che contiene tutti i programmi che sono stati creati per l'analisi di tale modello.