UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di

Michela Abazia

Tecniche Combinatorie in Topologia Algebrica

Relatore

Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Maggio 2006

Classificazione AMS: 55B10
Parole Chiave: Teorama della curva di Jordan, Coomologia di De Rham, Omologia singolare, Tecnica combinatoria, Teorema di Invarianza

Uno dei temi ricorrenti di questa tesi è il teorema della curva di Jordan, di cui sono presentate quattro dimostrazioni e una generalizzazione. Il teorema della curva di Jordan afferma che il complementare di una curva chiusa semplice nel piano ha due componenti connesse. Questo fatto è stato ritenuto autoevidente fino alla fine dell'ottocento quando il matematico francese C. Jordan fece notare che doveva essere rigorosamente dimostrato. Esiste un asserto che può sembrare equivalente al teorema della curva di Jordan: se un sottoinsieme D del piano euclideo è la frontiera del suo complementare e se quest'ultimo ha una componenente limitata, allora D è una curva chiusa semplice. Con un esempio noto come i laghi di Wada si dmostra che non possono essere veri entrambi; esso consiste nel costruire un insieme che è bordo comune di tre componenti di cui due sono limitate.
Le prime due dimostrazioni che diamo del teorema della curva di Jordan sono la prima elementare e la seconda con tecniche di geometria differenziale.
La dimostrazione elementare consiste nel riportare l'asserto a un asserto per curve poligonali e dimostrarlo, in tal caso, direttamente. La seconda dimostrazione usa tecniche di geometria differenziale con l'ausilio del numero di rotazione. Anche grazie a problemi come quello in questione, la topologia si è sviluppata con l'introduzione di tecniche algebriche e non 'intuitive' per risolvere questioni 'intuitive'. Si presentano qui le tecniche di coomologia di De Rham e omologia singolare che portano a dimostrare il teorema della curva di Jordan in pochi passaggi di natura algebrica e a generalizzare il contenuto geometrico al caso del complementare nella n-sfera di una m-sfera con $m \leq n$.
Le stesse tecniche astratte possono al contempo essere sviluppate anche in maniera più semplice: è questo il caso della topologia combinatoria. Si dimostra il teorema della curva di Jordan con costruzioni intuitivamente controllabili.
Dato che un tema ricorrente assieme al teorema della curva di Jordan è il nu-

mero di rotazione, anche esso è stato definito prima tramite tecniche astratte poi con le tecniche più semplici della topologia combinatoria; esso ha portato alla definizione di indice e dunque alla dimostrazione del teorema dell'indice di Poincaré.
Infine si presenta il teorema di invarianza che ci garantisce che l'omologia studiata con tecniche combinatorie è equivalente, almeno nei casi più interessanti, a quella studiata con tecniche più teoriche e ha il vantaggio di essere più semplice.
Vediamo ora come è strutturata la tesi nel dettaglio. Nel primo capitolo di questa tesi, come abbiamo detto, sono illustrate due dimostrazioni del teorema della curva di Jordan. La prima è 'elementare' ed è stata scoperta da Helge Tverberg, essa sfrutta solo le proprietà degli spazi metrici e la nozione di continuità uniforme. La seconda è più complessa e sfrutta le nozioni di orietabilità di una superficie, ricoprimento, sollevamento e numero di rotazione.
Nel secondo capitolo sono state introdotte le 1-forme differenziali, per mezzo delle quali, dato un insieme un insieme U aperto del piano, sono stati definiti i primi due gruppi di coomologia di De Rham:

$$H^0U = \{f : f \text{ localmente costante su } U\};$$

$$H^1U = \{\omega : \omega \text{ è una 1-forma chiusa su } U\}/\{\omega : \omega \text{ è una 1-forma esatta su } U\}.$$

A questo punto è stata data un'altra dimostrazione del teorema della curva di Jordan in $\mathbb{R}^2$. Si consideri dunque un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a un cerchio. Si può scrivere X come unione di due sottoinsiemi A e B tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \{P, Q\}$ dove P e Q sono due punti distinti su X. Si considerino ora gli aperti $U = \mathbb{R}^2 - A$ e $V = \mathbb{R}^2 - B$, e per mezzo della mappa cobordo

$$\delta : H^0(U \cap V) = H^0(\mathbb{R}^2 - X) \to H^1(U \cup V) = H^1(\mathbb{R}^2 - \{p, Q\})$$

è stato dimostrato che la dimensione di $H^0(\mathbb{R}^2 - X)$ è due, dunque che $\mathbb{R}^2 - X$ ha due componenti connesse. Per la compattezza di X, le due componenti si possono distinguere in componente *illimitata* e *limitata*. Infine, è stato considerato un intorno N di un punto su X ed è stato diviso X in due sottoinsiemi A e B come sopra in modo tale che A giaccia in N. Sfruttando il fatto che $\mathbb{R}^2 - B$ è connesso per archi è stato dimostrato che N contiene punti di entrambe le componenti di $\mathbb{R}^2 - X$.
Sono stati poi definiti i primi due gruppi di omologia cominciando con il dire che:

Definizione 0.1. Una 1-catena in un aperto U di $\mathbb{R}^2$ è una funzione che assegna a ogni curva non costante $\gamma_i : [0,1] \to U$, un intero, con la proprietà che la funzione è zero tranne che per un numero finito di curve, dunque

$$\gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + ... + n_r\gamma_r.$$

Definizione 0.2. Una 0-catena è una combinazine lineare finita di punti di U, con coefficienti interi.

Per ogni 1-catena $\gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + ... + n_r\gamma_r$ è stato definito il bordo $\partial\gamma$ come la 0-catena

$$\partial\gamma = n_1(\gamma_1(1) - \gamma_1(0)) + ... + n_r(\gamma_r(1) - \gamma_r(0)).$$

Definizione 0.3. Una 0-catena ζ è chiamata 0-bordo se esiste una 1-catena γ tale che $\zeta = \partial\gamma$.

Quindi denotati Z_0U il gruppo delle 0-catene e B_0U il sottogruppo di Z_0U dei 0-bordi, lo 0-*esimo gruppo di omologia* di U è stato definito:
$H_0U = Z_0U/B_0U$.
Considerando la seguente definizione

Definizione 0.4. 1-ciclo è una 1-catena con bordo nullo è stato indicato con Z_1U il gruppo degli 1-cicli.

Definizione 0.5. Una 1-catena è un 1-*bordo* in U se può essere scritta come combinazione lineare di bordi di mappe Γ_i continue da quadrati R_i a U.

Denotato il gruppo degli 1-bordi B_1U, sottogruppo di Z_1U, è stato definito il *primo gruppo di omologia*: $H_1U = Z_1U/B_1U$.
E ora il teorema della curva di Jordan generalizzato, ossia in $\mathbb{R}^n$ per $n \gneq 2$. Per far ciò sono state introdotte le successioni esatte di Mayer-Vietoris, che ci danno una relazione tra i gruppi e gli omomorfismi di tali successioni, permettendo, così di calcolare i gruppi di omologia H_kU per $k \geq 2$. L'enunciato del teorema generalizzato è tutt'altro che intuitivo:

Teorema 0.6. Sia S^n una sfera in $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $X \subset S^n$ è omeomorfo a una sfera S^m, $m \leq n$, e $m \lneq n$ se e solo se $X = S^n$. Se $m \lneq n$, i gruppi del complementare di X sono

$$H_k(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } m = n-1 \text{ e } k = 0; \\ \mathbb{Z} & \text{se } m \lneq n-1 \text{ e } k = 0 \text{ o } k = n-1-m; \\ \{0\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La dimostrazione consiste nel: considerare due insiemi A e B omeomorfi agli emisferi superiore e inferiore di S^m rispettivamente, dunque a un m-cubo I^m. Considerati gli aperti $U = S^n - A$ e $V = S^n - B$, è stato studiato prima il caso $k \gneq 0$ per induzione su m, sfruttando la rispettiva successione di Mayer-Vietoris e il fatto che $H_k(S^n - Y) = \{0\}$ quando Y è omeomorfo a un m-cubo. Poi è stato studiato il caso $k = 0$ sempre per induzione su m e attraverso la rispettiva successione di Mayer-Vietoris, sfruttando il fatto che $H_1(S^n - Y) = \{0\}$ e $H_0(S^n - Y) \cong \mathbb{Z}$ se Y è omeomorfo a un m-cubo.
Nel terzo capitolo è stata introdotta la tecnica combinatoria:

Definizione 0.7. Una *catena poligonale* è un sottoinsieme del piano formato da una successione finita di segmenti paralleli agli assi coordinati, tali che ogni segmento ha in comune gli estremi con i segmenti adiacenti.

Definizione 0.8. Una *griglia* è una porzione rettangolare di piano con i lati paralleli agli assi coordinati e con un numero finito di linee tracciate nel rettangolo, parallele ai lati di esso.

Chiamati *vertici* le intersezioni delle linee della griglia, *spigoli* i segmenti in cui vertici dividono le linee e *facce* i rettangoli in cui le linee dividono il piano, è stata adottata una terminologia comune per tutti e tre: K-simplessi per $k = 0, 1, 2$.

Definizione 0.9. Siano C_1 e C_2 due k-catene dove $k = 0, 1, 2$. La somma $C_1 + C_2$ è la k-catena consistente dei k-simplessi in C_1 o in C_2 ma non in entrambe.

L'insieme delle k-catene con l'operatore $+$ è un gruppo.

Definizione 0.10. In generale la somma di n catene $C_1+C_2+...+C_n$ consiste dei simplessi contenuti in un numero dispari di catene tra $C_1, C_2, ..., C_n$.

Viene introdotto poi l'operatore bordo, che connette l'algebra delle K-catene con quella delle $(k-1)$-catene su una griglia.

Definizione 0.11. Sia C una k-catena, allora è la catena contenente tutti i $(k-1)$-simplessi che appartengono a un numero dispari di di k-simplessi di C.

Definizione 0.12. Sia C una k-catena. Se esiste una $(k+1)$-catena T tale che $C = \partial(T)$, allora C è detta *k-bordo*.

Questa definizione ha senso solo per $k = 0, 1$.

Definizione 0.13. Se C è una k-catena tale che $\partial(C) = \emptyset$, allora C è detta *k-ciclo*.

Questa definizione ha senso quando $k = 1, 2$.

Definizione 0.14. Due k-catene C_1 e C_2 si dicono *omologhe*, denotate $C_1 \sim C_2$, se $C_1 + C_2$ è un bordo.

Segue il *lemma fondamentale* che è la versione combinatoria del teorema della curva di Jordan.

Lemma 0.15. Ogni 1-ciclo è il bordo di esattamente due 2-catene complementari di una griglia G.

La dimostrazione consiste di due parti. Nella prima parte si mostra che, se λ è un 1-ciclo, esistono almeno due 2-catene con bordo λ. Questo viene fatto per induzione sul numero di linee della griglia. La seconda parte mostra che λ è bordo di al più due 2-catene. Lo fa considerando una delle 2-catene T, con bordo λ, trovate nella prima parte del teorema, e facendo vedere che, se ne esiste un'altra, essa o é T o è la sua complementare.

Definizione 0.16. Sia A un sottoinsieme del piano e sia G una griglia. Due k-catene su G, C_1 e C_2, si dicono *omologhe in* A, dunque

$$C_1 \sim C_2 \text{ (in } A)$$

se $C_1 + C_2$ è bordo di una $(k+1)$-catena su G che è contenuta in A.

Si introduce poi il concetto di *identificazione topologica*:

Definizione 0.17. (*Identificazione tra spigoli*). Sia $\mathscr{P}$ una collezione di poligoni, e siano $a_1, a_2, ..., a_n$ un insieme di spigoli di questi poligoni. Questi spigoli si dicono *identificati* quando una nuova topologia è definita su $\mathscr{P}$ come segue: (a) ad ogni spigolo a_i è assegnata una direzione da un estremo a all'altro di esso. Inoltre ciascuno di essi è posto in corrispondenza topologica con l'intervallo unitario in modo tale che i loro punti corrispondano a 0 e i punti finali corrispondano a 1; (b) i punti sugli spigoli $a_1, a_2, ..., a_n$ che corrispondono allo stesso valore sull'intervallo unitario sono considerati come un singolo punto; infine (c) gli intorni della nuova topologia su $\mathscr{P}$ sono i dischi interamente contenuti in un singolo poligono oppure le unioni di mezzi dischi i cui diametri sono intervalli uguali centrati nei punti corrispondenti

Definizione 0.18. (*Identificazione tra vertici*).
Sia $\mathscr{P}$ un insieme di poligoni, e siano $P_1, P_2, ..., P_n$ una collezione di vertici di questi poligoni. Questi vertici si dicono identificati quando una nuova topologia è definita su $\mathscr{P}$ nella quale questa collezione di vertici è considerata come un singolo punto e gli intorni sono dischi interamente contenuti in un singolo poligono, oppure unioni di settori di dischi che hanno come vertici uno dei punti $P_1, P_2, ..., P_n$. Nel caso in cui alcuni spigoli che si incontrano in uno di questi vertici siano identificati, i settori che formano un intorno del 'punto' $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ devono avere lati di lunghezza uguale su tali spigoli.

Definizione 0.19. Uno spazio topologico è *triangolabile* se può essere ottenuto da un insieme di triangoli tramite le identificazioni di spigoli e vertici soggette alla restrizione che ogni coppia di triangoli è identificata o lungo un singolo spigolo o in un singolo vertice, oppure è copletamente disgiunta.
Una *superficie* è uno spazio triangolabile per il quale valgono: (a) ogni spigolo è identificato con esattamente un altro spigolo; (b) i triangoli identificati in ogni vertice possono sempre essere ordinati in un ciclo $T_1, T_2, ..., T_k, T_1$ in modo tale che triangoli adiacenti sono identificati lungo uno spigolo.

Viene dimostrato poi il teorema di classificazione:

Teorema 0.20. (*Teorema di classificazione*). Ogni superficie compatta e connessa è topologicamente equivalente a una sfera, o a una somma connessa di tori, o a una somma connessa di piani proiettivi.

Questo teorema è diviso in sei passi. Nel primo passo si costruisce un modello piano poligonale della superficie con rispettive identificazioni tra spigoli e vertici.
Nel secondo passo si procede alla eliminazione delle coppie toroidali adiacenti,

dove le coppie toroidali sono coppie di spigoli identificati orientati in direzoni opposte.
Nel terzo passo si identificano tutti i vertici con un solo vertice.
Nel quarto passo si portano le coppie torte ad essere adiacenti, dove una coppia torta è una coppia di spigoli identificati con orientazioni concordi.
Nel quinto passo si procede a fare in modo che tutte le coppie toroidali siano ordinate in coppie di coppie adiacenti e alterne.
Nel sesto passo si trasformano coppie toroidali in coppie torte nel caso in cui siano presenti entrambe nel modello poligonale. Alla fine si arriva ad ottenere la superficie in una delle forme indicate dal teorema, dette *forme normali*.

Definizione 0.21. Un *complesso* è ogni spazio topologico costituito da vertici o 0-simplessi, spigoli o 1-simplessi e facce o 2-simplessi combinati tra loro tramite identificazioni topologiche.

Si introduce l'omologia (mod 2):

Definizione 0.22. Sia $\mathscr{K}$ un complesso. Sia x un k-simplesso e y un $(k+1)$-simplesso di $\mathscr{K}$ $(k = 0, 1)$. Il *coefficiente di incidenza* di x in y è il numero di volte che x occorre nel bordo di y.

Definizione 0.23. Una k-ctena di $\mathscr{K}$ è un insieme di k-simplessi $(k = = 0, 1, 2)$. La somma $C_1 + C_2$ di due k-catene C_1 e C_2 è l'insieme dei k-simplessi contenuti in C_1 o in C_2 ma non in entrambi. Con questa operazione, l'insieme $C_k(\mathscr{K})$ delle k-catene è un gruppo nel quale l'identità è l'insieme vuoto di k-simplessi, $\emptyset$. Ogni k-catena è inversa di se stessa, dunque $C_k(\mathscr{K})$ è un *idemgruppo*.

Definizione 0.24. Sia C una k-catena di un complesso $\mathscr{K}$. Il *bordo* di C, $\partial(C)$ è la $(k-1)$-catena consistente dei $(k-1)$-simplessi che sono incidenti un numero dispari di volte con i simplessi di C, dove l'incidenza è determinata dai coefficienti di incidenza di $\mathscr{K}$. L'operatore bordo è additivo, $\partial(C_1+C_2) = \partial(C_1) + \partial(C_2)$, e così deinisce un omomorfismo da $C_2(\mathscr{K})$ a $C_1(\mathscr{K})$ e un omomorfismo da $C_1(\mathscr{K})$ a $C_0(\mathscr{K})$.

Definizione 0.25. Un k-ciclo ($k = 1, 2$) è una k-catena con bordo nullo. Per convenzione tutte le 0-catene sono 0-cicli. Un k-bordo ($k = 0, 1$) è una k-ctena che è bordo di una $(k+1)$-catena. Per convenzione solo la 2-catena nulla è considerata un 2-bordo. I k-cicli $Z_k(\mathscr{K})$ e i k-bordi $B_k(\mathscr{K})$ sono entrambi gruppi.

Definizione 0.26. Due k-catene ($k = 0, 1, 2$), C_1 e C_2, sono dette *omologhe*, $C_1 \sim C_2$, quando $C_1 + C_2$ è un k-bordo.

Dopo aver mostrato che $B_k(\mathscr{K})$ è un sottogruppo di $Z_k(\mathscr{K})$ è stato definito $H_k(\mathscr{K}) = Z_k(\mathscr{K})/B_k(\mathscr{K})$ il k-esimo gruppo di omologia di $\mathscr{K}$.

Pioché l'omologia (mod 2) ha dei limiti viene introdotta l'omologia integrale e poi quella singolare.

Definizione 0.27. Il complesso $\mathscr{K}$ è orientato quando ad ogni spigolo di $\mathscr{K}$ è assegnato un verso di percorrenza da un estremo a un altro, e a ogni faccia è assegnato un verso orario o antiorario.

Definizione 0.28. Sia $\mathscr{K}$, e siano $S_1, S_2, ..., S_n$ i k-simplessi di $\mathscr{K}$ ($k = 0, 1, 2$). Una *k-catena integrale* di $\mathscr{K}$ è una somma

$$C = a_1S_1 + a_2S_2 + ... + a_nS_n$$

dove i coefficienti $a_1, a_2, ..., a_n$ sono interi positivi, negativi o nulli. Se

$$C' = b_1S_1 + b_2S_2 + ... + b_nS_n$$

è una seconda k-catena, allora la somma $C + C'$ è definita da

$$C + C' = (a_1 + b_1)S_1 + (a_2 + b_2)S_2 + ... + a_nS_n.$$

Con questa operazione l'insieme $C_k(\mathscr{K})$ di k-catene integrali è un gruppo in cui lo zero è la catena tale che $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. L'inversa della k-catena C è data da

$$-C = -a_1S_1 - a_2S_2 - ... - a_nS_n.$$

Il gruppo $C_k(\mathscr{K})$ è infinito.

Definizione 0.29. Il *bordo* di un k-simplesso S ($k = 1, 2$) è la $(k-1)$-catena i cui coefficienti sono i coefficienti di incidenza di S con ogni $(k-1)$-simplesso. Allora il bordo della k-catena $a_1S_1 + a_2S_2 + ... + a_nS_n$, per additività, è

$$\partial(a_1S_1 + a_2S_2 + ... + a_nS_n) = a_1\partial(S_1) + a_2\partial(S_2) + ... + a_n\partial(S_n)$$

Due k-catene C_1 e C_2 si dicono omologhe, ossìa $C_1 \sim C_2$, se differiscono per un bordo, dunque se $C_1 - C_2$ è un k-bordo. Come nel caso dell'omologia (mod 2), l'omologia integrale è una relazione di equivalenza.

Definizione 0.30. Il gruppo Z_k quozientato la relazione $\sim$ è il k-esimo gruppo di omologia e si denota $H_k = Z_k/B_k$.

Per quanto riguarda l'omologia singolare, le uniche differenze con quella integrale sono che:
(1) Fissato un sistema di assi cartesiani nel piano, definiamo i k-simplessi *standard* per $k = 0, 1, 2$; lo standard 0-simplesso S_0 è l'origine, lo standard 1-simplesso S_1 è l'intervallo unitario sull'asse x e lo standard 2-simplesso è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Definizione 0.31. Un *k-simplesso singolare* in $\mathscr{S}$ è una funzione continua $s : S_k \to \mathscr{S}$. Così gli 0-simplessi sono tutti punti di $\mathscr{S}$, gli 1-simplessi sono tutte curve continue in $\mathscr{S}$ e i 2-simplessi sono le immagini continue di un triangolo nel piano su $\mathscr{S}$.

(2) Considerate le trasformazioni d_0 e d_1 tali che $d_0(0,0) = (0,0)$ e $d_1(0,0) = (0,1)$, dunque che mandano S_0 nei due estremi di S_1 e le trasformazioni e_0, e_1 e e_2 che mandano S_1 in ciascuno dei tre lati di S_2, quindi $e_0(t,0) = (t,0)$, $e_1(t,0) = (0,t)$ e $e_2(t,0) = (1-t,t)$ con $t \in [0,1]$.
Il bordo di un simplesso singolare è definito come segue: se $s : S_1 \to \mathscr{S}$ è un 1-simplesso, $\partial(s)$ è la 0-catena

$$\partial(s) = sd_1 - sd_0$$

e se $s : S_2 \to \mathscr{S}$ è un 2-simplesso, $\partial(s)$ è la 1-catena

$$\partial(s) = se_2 + se_1 + se_0.$$

Si torna a dimostrare il teorema delle curva di Jordan in $\mathbb{R}^2$. La dimostrazione è divisa in quattro parti. Nella prima parte si mostra che la curva di Jordan C divide il piano in al più due componenti. Si considerano dunque tre punti P, Q e R tali che P e Q appartengono a componenti distinte di $\mathbb{R}^2 - C$ e lo stesso valga per R e Q e usando la relazione di omologia tra 1-catene si dimostra che P e R appartengono alla stessa componente.
Nella seconda parte si mostra che C divide il piano in almeno due componenti. Si considerano due punti A e B su C che la dividono in due curve e un quadrato σ che contenga solo uno dei due punti. Sfruttando il fatto che un 1-ciclo in $\mathbb{R}^2$ meno un connesso è bordo di una 2-catena in $\mathbb{R}^2$ meno tale connesso e che σ non è un bordo si dimostra che esiste una coppia di punti appartenenti a componenti connesse distinte di $\mathbb{R}^2 - C$.
Nella terza parte si usa il fatto che le due componenti di $\mathbb{R}^2 - C$ sono aperte per far vedere che C è bordo di entrambe.
Infine si usa la compattezza di C per distinguere le due componenti in limitata e illimitata.
Questa è una dimostrazione certamente laboriosa ma molto più semplice rispetto alle dimostrazioni più teoriche date in precedenza.

Nel quarto capitolo viene introdotto il concetto di *numero di rotazione*, ma per fare ciò è servita la nozione di campo vettoriale:

Definizione 0.32. Un campo vettoriale V su un sottoinsieme D del piano è una funzione che assegna a ogni punto P di D un vettore, nel piano, con origine in P.

Data una curva chiusa continua e un campo vettoriale continuo mai nullo su essa, si consideri un punto P che si muove lungo la curva in senso antiorario. Si definisce numero di rotazine la somma algebrica delle rotazioni che il campo compie intorno a P, fino a che P non torna al punto di partenza. Si è visto che se D è una regione di piano e V un campo vettoriale continuo su esso, ad ogni punto P di D possiamo assegnare una delle lettere A, B o C in base alla direzione del campo V in quel punto.

Definizione 0.33. Una *triangolazione* T di un poligono D è una divisione di D in un numero finito di triangoli in modo tale che ciascuno spigolo sul bordo di D è spigolo di un solo triangolo della suddivisione, e ogni spigolo all'interno di D è uno spigolo di esattamente due triangoli della suddivisione.

I triangoli di T i cui spigoli ricevono tutte e tre le lettere A, B e C si dicono *triangoli completi*.

Definizione 0.34. Si dice *indice* I del poligono il numero di spigoli chiamati AB che si trovano sul bordo di esso, contati secondo la loro orientazione.

Si dimostra poi il lemma dell'indice ossìa che dato un poligono D con rispettiva triangolazione e etichettatura. L'indice di D è uguale al numero di triangoli completi in esso. Chiamato S il numero di spigoli chiamati AB, si fa vedere che il numero di triangoli completi è uguale a S e che anche l'indice del poligono è uguale a S.

Definizione 0.35. Una suddivisione $\{P_i\}$ di una curva γ si dice ε-*densa* se ogni punto inserito tra due punti della suddivisione distano meno di ε da entrambi.

Teorema 0.36. Sia V un campo vettoriale continuo su una curva chiusa γ, e assumiamo che V non sia mai zero su γ. Per ogni suddivisione $\pi = \{P_i\}$ di γ, sia $I(\pi)$ l'indice del poligono π etichettato con le lettere A, B, C in accordo alla direzione del campo vettoriale V nei vertici di π. Allora esiste una costante $\varepsilon \gneq 0$ tale che se π e $\tau = \{Q_i\}$ sono una coppia di suddivisioni ε-dense di γ, $I(\pi) = I(\tau)$.

Per dimostrarlo si fa vedere prima che aggiungendo un punto a una delle due suddivisioni l'indice rimane invariato, dunque, se aggiungiamo i punti di $\tau = \{Q_i\}$ a $\pi = \{P_i\}$ uno alla volta arriviamo alla conclusione che $I(\pi)$ è uguale all'indice di una suddivisione che consiste dei punti di π e τ insieme, lo stesso accade se aggiungo i punti di π a τ. Quindi $I(\pi) = I(\tau)$.

Definizione 0.37. Data una curva chiusa γ e un campo vettoriale continuo V che non è mai zero su γ, il *numero di rotazione di V su γ*, denotato $W(\gamma)$, è l'indice del poligono ottenuto da ogni suddivisione ε-densa di γ, dove ε è la costante introdotta dal teorema precedente.

Il numero di rotazione è stato introdotto anche nel capitolo 2, ma la sua definizione non si può dire altrettanto intuitiva, infatti sia ϑ un angolo misurato in senso antiorario a partire dalla semiretta orizzontale avente origine in P ad est di esso. Sia p la seguente mappa in coordinate polari:

$$p(r, \vartheta) = P + (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)),$$

un settore è l'immagine di una striscia $\{(r, \vartheta) : r \gneq 0 \text{ e } \vartheta_1 \lneq \vartheta \lneq \vartheta_2\}$, dove ϑ_1 e ϑ_2 sono numeri reali tali che $0 \lneq \vartheta_2 - \vartheta_1 \leq 2\pi$. Per ogni curva continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 - \{P\}$, si definisce il suo *numero di rotazione* $W(\gamma, P)$ come segue:

passo 1. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $a = t_0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_n = b$, in modo tale che ogni sottointervallo $[t_{i-1}, t_i]$ sia mappato in qualche settore con vertice in P. Una tale suddivisione esiste per il lemma di Lebesgue, poiché

ciascun punto nell'immagine di γ è contenuto in qualche tale settore.
passo 2. Scegliamo un settore U_i contenente $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ e una corrispondente funzione angolo ϑ_i su U_i, per $1 \leq i \leq n$. Sia $P_i = \gamma(t_i)$, $1 \leq i \leq n$.
Definiamo

$$W(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi}[(\vartheta_1(P_1)-\vartheta_1(P_0))+(\vartheta_2(P_2)-\vartheta_2(P_1))+.....+(\vartheta_n(P_n)-\vartheta_n(P_{n-1}))]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}(\vartheta_i(P_i) - \vartheta_i(P_{i-1})).$$

Ciascun termine rappresenta la variazione dell'angolo lungo $\gamma([t_{i-1}, t_i])$.

Sia $\mathscr{S}$ una superficie compatta connessa tale per ogni punto P di $\mathscr{S}$ ha un piano tangente. Un campo vettoriale tangente V è una funzione che assegna a ciascun punto P di $\mathscr{S}$ un vettore $V(P)$ giacente sul piano tangente a $\mathscr{S}$ in P. Assumiamo che V sia continuo e che abbia solo punti critici isolati.
Se scegliamo un piano di riferimento, allora ogni punto P di $\mathscr{S}$ si trova a una certa distanza $h(P)$ da questo piano. Il campo vettoriale V è detto campo vettoriale *gradiente* se per ogni P, $V(P)$ punta nella direzione delle h crescenti.

Teorema 0.38. (*Teorema dell'Indice di Poincaré*). Sia V un campo vettoriale tangente continuo su una superficie compatta, connessa e orientabile $\mathscr{S}$. Allora la somma degli indici dei punti critici di V è uguale alla caratteristica di Eulero di $\mathscr{S}$.

Per dimostrare il teorema dell'indice di Poincaré, è stata introdotta la caratteristica di Eulero di una superficie $\mathscr{S}$ compatta, connessa e orientabile, $\chi(\mathscr{S}) = V - E + F$, dove V rappresenta il numero di spigoli del complesso $\mathscr{K}$ di $\mathscr{S}$, E il numero degli spigoli e F il numero delle facce; inoltre sono stati definiti su $\mathscr{S}$ un campo vettoriale tangente V e uno gradiente U. Sfruttando il fatto che $\mathscr{S}$ è compatta, dunque ha un numero finito di punti critici, ossìa punti in cui V e U si annullano, e il fatto che la somma degli indici dei punti critici di U su $\mathscr{S}$ e $\chi(\mathscr{S})$, calcolando gli indici dei punti critici di V in funzione della direzione di U in quei punti, è stato dimostrato che anche la somma degli indici di un campo vettoriale continuo, tangente qualsiasi è $\chi(\mathscr{S})$. Viene dimostrato, infine, un teorema molto importante della topologia combinatoria:

Teorema 0.39. I gruppi di omologia associati a una triangolazione $\mathscr{K}$ di una superficie compatta e connessa $\mathscr{S}$ sono indipendenti da $\mathscr{K}$.

Nella dimostrazine viene usato il fatto che, dato un complesso $\mathscr{K}$, se si traccia un nuovo spigolo che divide un poligono di $\mathscr{K}$ in due, il complesso risultante $\mathscr{K}^+$ è tale che i gruppi di omologia di $\mathscr{K}$ e $\mathscr{K}^+$ sono isomorfi e il teorema di classificazione. La sua iportanza viene dal fatto che esso ci garantisce che i gruppi di omologia di $\mathscr{K}$ ci dicono qualcosa della superficie rappresentata da $\mathscr{K}$. Anche per l'omologia integrale vale il teorema di invarianza questo la rende equivalente a quella, più teorica studiata, nel secondo capitolo.
Con questo teorema si conclude la tesi.

Bibliografia

[1] Czes Kosniowski. *Introduzione alla Toplogia Algebrica.* Zanichelli, 1988.

[2] Edoardo Sernesi. *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, 1994.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2.* Bollati Boringhieri, 1988.

[4] Manfredo P. do Carmo *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, 1988.

[5] Michael Henle. *A Combinatorial Introduction to Topology.* W.H.Freeman end Company, 1977.

[6] William Fulton. *Algebric Topology. A first course.* Springer, 1995.