UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE NATURALI

Graduation Thesis in Mathematics

by

Stefano Urbinati

On the properties of the Integral Part of Ample and Big Divisors

Sintesi

Supervisor

Prof. Angelo Felice Lopez

The Candidate The Supervisor

ACADEMIC YEAR 2006 - 2007

12 JULY 2007

AMS Classification: primary 14C20; secondary 14E99,14J99

Key Words: Algebraic geometry, Ample divisors, Nef divisors, Big divisors, Integral part.

Per secoli gli uomini sono stati incuriositi dall'interazione fra l'algebra e la geometria. Gli antichi Greci stabilirono un tale collegamento quando inventarono la costruzione con riga-e-compasso per la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente e la radice quadrata di lunghezze. Il passo successivo fu l'invenzione delle coniche, le prime curve che studiarono completamente, dopo le linee rette e le circonferenze, per risolvere problemi algebrici (intersezione di curve per risolvere equazioni). Oltre ai piani e alle sfere, i Greci inoltre studiarono alcune superfici rivoluzionarie, quali i coni, i cilindri, alcuni tipi di quadriche e perfino i tori.
Forse il più grande singolo passo nel collegamento tra l'algebra e la geometria è stata l'introduzione, da parte di Descartes nel 1637, della *geometria Cartesiana* (o *geometria analitica*). Questa ha posto il fondamento matematico per il calcolo e la fisica Newtoniana nella metà successiva del secolo. Durante i primi anni del diciottesimo secolo comincia una nuova era con l'introduzione simultanea dei punti all'infinito e dei punti immaginari: "la geometria" ora, per quasi 100 anni, significherà esclusivamente geometria nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ o nello spazio proiettivo complesso tridimensionale $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Dalla geometria proiettiva di Möbius, Plücker e Cayley alla geometria birazionale di Riemann ci sono stati molti differenti approcci alla geometria algebrica. Con Riemann è iniziata una rivoluzione grazie all'introduzione delle superfici di Riemann, la prova non-costruttiva di Hilbert del Nullstellensatz nel 1888 è stata un grande segno di innovazione. Recentemente, la scuola che include Weil, Chevalley e Zariski ha rivoluzionato la geometria algebrica staccandosi dal vincolo di lavorare su $\mathbb{C}$, sostituendo $\mathbb{C}$ con un campo-base arbitrario. Gli anni 50 trovarono una nuova tempesta in fermento, che si è conclusa nell'assorbimento da parte della geometria algebrica di quasi tutta l'algebra commutativa e nozioni topologiche quali i fibrati, i fasci e le varie teorie coomologiche.

Seguendo un suggerimento di Cartier, A. Grothendieck ha intrapreso intorno al 1957 un programma gigantesco che puntava ad un'ampia generalizzazione della geometria algebrica, assorbendo tutti gli sviluppi precedenti, partendo dalla categoria di tutti gli anelli commutativi (con unità) anziché algebre ridotte finitamente generate su un campo algebricamente chiuso.

Parte degli studi moderni è stata interessata alle serie lineari, che sono state a lungo al centro della geometria algebrica. Intorno al 1890, la scuola italiana della geometria algebrica, sotto la direzione di un trio di grandi geometri quali Castelnuovo, Enriques e (successivamente) Severi, ha intrapreso un programma di studio sulle superfici algebriche (e più successivamente di varietà con dimensione più alta) che generalizzano l'approccio di Brill-Noether tramite i sistemi lineari: principalmente hanno lavorato con metodi puramente geometrici, quali le proiezioni o le intersezioni delle curve e delle superfici nello spazio proiettivo, con poco uso per quanto possibile dei metodi che appartengono all'analisi ed alla topologia, o all'algebra "astratta".

I sistemi di divisori sono stati impiegati classicamente per studiare e definire gli invarianti delle varietà proiettive ed è stato riconosciuto che molte proprietà delle varietà sono legate alle sezioni iperpiane. L'immagine classica è stata notevolmente chiarita dalle nuove idee rivoluzionarie che hanno dato vita alla nuova teoria che comincia negli anni '50. Per cominciare, dal grande lavoro di Serre (*"Faisceaux algébrique cohérents"*), continuando fino al lavoro di Kodaira (i.e. *"On a differential-geometric method in the theory of analytic staks"*), hanno messo a fuoco l'importanza dell'ampiezza per i fibrati.

Verso le metà degli anni '60 era già stata formulata una corposa teoria, che mostrava la possibilità di riconoscere la positività in modo geometrico, coomologico, o numerico. Durante gli stessi anni, Zariski ed altri hanno cominciato a studiare il comportamento più complicato delle serie lineari definita dai fibrati che potevano non essere ampi e la teoria degli $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$-divisori (i.e. *"The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface"*).

In questo lavoro ci concentreremo sulle varietà algebriche.

Definizione 0.0.1. Una *varietà astratta* è uno schema separato integro di tipo finito su un campo algebricamente chiuso k. Se è proprio su k, inoltre diremo che è *completa*.

Uno dei modi usuali per studiare le proprietà delle varietà algebriche è quello di utilizzare i divisori,

Definizione 0.0.2 (divisori di Weil). Sia X uno schema integro noetheriano separato tale che ogni anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ di X di dimensione 1 è regolare ([Har77]). Un *divisore primo* su X è uno schema integro chiuso Y di codimensione uno. Un *divisore di Weil* è un elemento del gruppo abeliano libero $\mathrm{WDiv}(X)$ generato dai divisori primi. Scriviamo un divisore come una somma finita $D = \sum n_i Y_i$ dove gli Y_i sono divisori primi e gli n_i sono interi. Se ogni $n_i \geq 0$, diciamo che D è effettivo. [Def.1.2.2]

Similmente ai divisori di Weil considereremo i *divisori di Cartier* e legheremo queste due definizioni al concetto di *fibrato lineare*.

Denotiamo $\mathrm{Div}(X)$ il gruppo di tutti i divisori di Cartier. [Def:1.2.1]

Un buon metodo per studiare le varietà algebriche è quello di immergerle, se possibile, in qualche spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$.

Come è ben noto, i morfismi in spazi proiettivi sono dati da fibrati lineari e sezioni scelte opportunamente.

Definizione 0.0.3. Definiamo un fibrato lineare $\mathscr{L}$ su X *molto ampio* se esiste un'immersione $i : X \to \mathbb{P}^n$ per qualche n, tale che $\mathscr{L} \cong i^*(\mathcal{O}(1))$. $\mathscr{L}$ si dice*ampio* se esiste un intero $m > 0$ tale che $\mathscr{L}^{\otimes m}$ è molto ampio. [Def.2.1.2]

Definizione 0.0.4. X è una *varietà proiettiva* se è propria e possiede un fibrato lineare ampio.

La parte centrale di questo lavoro è lo studio delle proprietà dell'ampiezza per $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$-divisori.

Seguendo risultati ben noti, daremo in primo luogo una dimostrazione globale di equivalenza di tutte le caratterizzazioni di ampiezza già esistenti. Prima di enunciare il risultato, introduciamo le seguenti notazioni:

- $\int_V D_1 \cdot \ldots \cdot D_n \overset{not}{=} (D_1 \cdot \ldots \cdot D_k \cdot V)$ è il *numero di intersezione.* [Sec.1.3]
- $N^1(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Num}(X)$ è il *gruppo di Néron-Severi* di X, gruppo delle classi di equivalenza numerica dei divisori su X, dove due divisori D_i, D_2 sono numericamente equivalenti se $(D_1.C) = (D_2.C)$ per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$. [Sec.1.3]
- $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\{\sum a_i[C_i] | C_i \subset X curvairriducibile, a_i \geq 0\}}$. [Def.2.3.5]

Proposizione 0.0.5 (Ampiezza per $\mathbb{Z}$-divisori). Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ un divisore di Cartier intero su una varietà normale proiettiva X, e sia $\mathcal{O}_X(D)$ il fibrato lineare associato (a volte penseremo D un divisore di Weil tramite la canonica corrispondenza (1.2.5)). Le seguenti affermazioni sono equivalenti alla definizione di ampiezza: [Pro:2.4.1]

1. Esiste un intero positivo m tale che $\mathcal{O}_X(mD)$ è molto ampio;
2. Dato un fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_1 = m_1(\mathscr{F})$ avente la proprietà che
$$H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X(mD)) = 0 \quad \forall i > 0,\ m \geq m_1;$$
3. Dato un qualsiasi fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_2 = m_2(\mathscr{F})$ tale che $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X(mD)$ è globalmente generato $\forall m \geq m_2$;
4. Esiste un intero positivo m_3 tale che $\mathcal{O}_X(mD)$ è molto ampio $\forall m \geq m_3$;
5. Per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione positiva, esiste un intero positivo $m = m(V)$, con una sezione non-nulla $0 \neq s = s_V \in H^0(V, \mathcal{O}_V(mD))$, tale che s si annulla in qualche punto di V;

6. Per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione positiva, $\chi(V, \mathcal{O}_V(mD)) \to +\infty$ se $m \to +\infty$;

7. **(Criterio di Nakai-Moishezon-Kleiman)**

$$\int_V c_1(\mathcal{O}_X(D))^{\dim(V)} > 0$$

per ogni sottovarietà di dimensione positiva $V \subseteq X$;

8. **(Criterio di Seshadri)** Esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{(D.C)}{\mathrm{mult}_x C} \geq \varepsilon$$

per ogni punto $x \in X$ ed ogni curva irriducibile $C \subseteq X$ passante per x;

9. Sia H un divisore ampio. Esiste un numero positivo $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{(D.C)}{(H.C)} \geq \varepsilon$$

per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$;

10. **(Tramite i coni)** $\overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\} \subseteq D_{>0}$.

11. Esiste un intorno U di $[D]_{num} \in \mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$ tale che $U \backslash \{[D]_{num}\} \subseteq \mathrm{Amp}(X)$.

Per questioni di positività, è molto utile discutere piccole perturbazioni di divisori dati. Il modo naturale per farlo è attraverso il formalismo degli $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$-divisori:

Definizione 0.0.6. Sia X una varietà algebrica. Un $\mathbb{R}$-*divisore* di Cartier su X è un elemento dell' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Equivalentemente $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X) \Leftrightarrow D = \sum c_i D_i |\ c_i \in \mathbb{R},\ D_i \in \mathrm{Div}(X)$.

Lo studio di queste nuove classi di divisori è iniziato nella prima parte degli anni '80. Sono fondamentali nello studio birazionale delle varietà algebriche, in particolare per alcuni teoremi di vanishing come il teorema di vanishing di Kawamata e Viehweg ([Laz04b], 9.1.18 - 9.1.20 - 9.1.21) (si noti inoltre che esistono varietà singolari in cui il divisore canonico è un $\mathbb{Q}$-divisore).

Il nostro scopo sarà quello di dare una caratterizzazione di ampiezza per queste due nuove classi di divisori, simile a quella per gli $\mathbb{Z}$-divisori, ancora seguendo risultati ben noti.

Alcune proprietà della Proposizione 0.0.5 (6-11) dipendono solo dalla classe numerica di D ed è ben noto che caratterizzano l'ampiezza [Laz04a]. D'altra parte, alcune proprietà dei divisori interi che caratterizzano l'ampiezza sono collegate al concetto di fibrato lineare associato ad un divisore (1-5 della Proposizione 0.0.5), che è definito soltanto per i divisori interi. Per superare questo problema ci sono diverse possibilità. In questo lavoro abbiamo scelto di sostituire ogni divisore reale con la parte intera ogni qual volta si è dovuto considerare il fibrato lineare associato.

Dato un $\mathbb{R}$-divisore $\sum a_i D_i$ $a_i \in \mathbb{R}$, $D_i \in \mathrm{Div}(X)$ divisori primi, definiamo la parte intera di D come

$$[D] = \sum_i [ai]Di \in \mathrm{Div}(X).$$

Definizione 0.0.7 (ampiezza per Q ed i R-divisori). Un $\mathbb{Q}$-divisore $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ (rispettivamente $\mathbb{R}$-divisore $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$) è detto *ampio* se può essere scritto come una somma finita [Def.2.1.9]

$$D = \sum c_i A_i$$

dove $c_i > 0$ è un numero razionale positivo (rispettivamente reale) e A_i è un divisore di Cartier ampio.

Uno dei contributi originali di questo lavoro è stato quello di ottenere una caratterizzazione di ampiezza anche quando un $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$-divisore viene sostituito dalla sua parte intera. Questo è sintetizzato nei seguenti risultati:

Proposizione 0.0.8 (Ampiezza per i Q-divisori). . Sia $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ [Pro:2.6.4] un divisore di Cartier su una varietà normale proiettiva X, e sia $\mathcal{O}_X([D])$ il fibrato lineare associato (a volte penseremo $[D]$ un divisore di Weil tramite la canonica corrispondenza (1.2.5)). Le seguenti affermazioni sono equivalenti alla definizione di ampiezza per $\mathbb{Q}$-divisori:

I) Dato un fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_1 = m_1(\mathscr{F})$ avente la proprietà che

$$H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])) = 0 \quad \forall i > 0,\ m \geq m_1;$$

II) Dato un qualsiasi fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_2 = m_2(\mathscr{F})$ tale che $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])$ è globalmente generato $\forall m \geq m_2$;

III) Esiste un intero positivo m_3 tale che $\mathcal{O}_X([mD])$ è molto ampio $\forall m \geq m_3$;

IV) Per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione positiva, esiste un intero positivo $m_4 = m_4(V)$, tale che per ogni $m \geq m_4$ esiste una sezione non-nulla $0 \neq s = s_{V,m} \in H^0(V, \mathcal{O}_V([mD]))$, tale che s si annulla in qualche punto di V;

V) Per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione positiva, $\chi(V, \mathcal{O}_V([mD])) \to +\infty$ se $m \to +\infty$;

VI) **(Criterio di Nakai-Moishezon-Kleiman)**

$$\int_V c_1(\mathcal{O}_X(D))^{\dim(V)} > 0$$

per ogni sottovarietà di dimensione positiva $V \subseteq X$;

VII) **(Criterio di Seshadri)** Esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{(D.C)}{\mathrm{mult}_x C} \geq \varepsilon$$

per ogni punto $x \in X$ ed ogni curva irriducibile $C \subseteq X$ passante per x;

VIII) Sia H un divisore ampio. Esiste un numero positivo $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{(D.C)}{(H.C)} \geq \varepsilon$$

per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$;

IX) **(Tramite i coni)** $\overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\} \subseteq D_{>0}$.

X) Esiste un intorno U di $[D]_{num} \in \mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$ tale che $U \backslash \{[D]_{num}\} \subseteq \mathrm{Amp}(X)$.

Osservazioni 0.0.9.

1. Le equivalenze VI-X con il concetto di ampiezza erano già conosciute, le equivalenze I-V con il concetto del ampiezze sono originali.

2. È facile trovare degli esempi in cui (1) e (5) della Proposizione 0.0.5 non valgono se utilizziamo la parte intera.

3. Per estendere proprietà (5) della Proposizione 0.0.5, abbiamo scelto di sostituire l'esistenza di "$m(V)$" con "$\forall m \geq m_4(V)$".

Per gli $\mathbb{Q}$-divisori è stato abbastanza facile estendere le proprietà, perché siamo stati aiutati dall'esistenza, per un $\mathbb{Q}$-divisore D, di un numero intero k tale che $kD \in \mathrm{Div}(X)$. Su $\mathbb{R}$ ci sono serie difficoltà, comunque abbiamo potuto dimostrare le seguenti affermazioni:

Proposizione 0.0.10. Sia $D \in \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ un divisore di Cartier su una varietà normale proiettiva X, e sia $\mathcal{O}_X([D])$ il fibrato lineare associato (a volte penseremo $[D]$ un divisore di Weil tramite la canonica corrispondenza). Si considerino le seguenti affermazioni: [Pro:2.6.4]

i) Dato un qualsiasi fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_2 = m_2(\mathscr{F})$ tale che $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])$ è globalmente generato $\forall m \geq m_2$;

ii) **(Criterio di Nakai-Moishezon-Kleiman)**

$$\int_V c_1(\mathcal{O}_X(D))^{\dim(V)} > 0$$

per ogni sottovarietà di dimensione positiva $V \subseteq X$;

iii) **(Criterio di Seshadri)** Esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{(D.C)}{\mathrm{mult}_x C} \geq \varepsilon$$

per ogni punto $x \in X$ ed ogni curva irriducibile $C \subseteq X$ passante per x;

iv) Sia H un divisore ampio. Esiste un numero positivo $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{(D.C)}{(H.C)} \geq \varepsilon$$

per ogni curva irriducibile $C \subseteq X$;

v) **(Tramite i coni)** $\overline{\mathrm{NE}}(X) - \{0\} \subseteq D_{>0}$.

vi) Esiste un intorno U di $[D]_{num} \in \mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$ tale che $U \backslash \{[D]_{num}\} \subseteq \mathrm{Amp}(X)$.

vii) Dato un fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m_1 = m_1(\mathscr{F})$ avente la proprietà che

$$H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])) = 0 \quad \forall i > 0,\ m \geq m_1;$$

viii) Esiste un intero positivo m_3 tale che $\mathcal{O}_X([mD])$ è molto ampio $\forall m \geq m_3$;

ix) Per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione positiva, esiste un intero positivo $m_4 = m_4(V)$, tale che per ogni $m \geq m_4$ esiste una sezione non-nulla $0 \neq s = s_{V,m} \in H^0(V, \mathcal{O}_V([mD]))$, tale che s si annulla in qualche punto di V;

x) Per ogni sottovarietà $V \subseteq X$ di dimensione positiva,
$\chi(V, \mathcal{O}_V([mD])) \rightarrow +\infty$ se $m \rightarrow +\infty$;

allora:

- (i)-(vi) sono equivalenti al concetto di ampiezza per $\mathbb{R}$-divisori.
- L'ampiezza implica ognuno dei (vii)-(x).

Osservazioni 0.0.11.

- Rimane un problema aperto l'equivalenza di (iii) con ampio, comunque abbiamo potuto dimostrare l'equivalenza su una superficie (Osservazione 2.6.3).
- Le equivalenze (ii)-(vi) con il concetto di ampiezza erano già conosciute, l'equivalenza (i) è originale.
- Il fatto che l'ampiezza implica (vii)-(x) è originale.

Nel terzo capitolo abbiamo introdotto i divisori *big*, che hanno svolto un ruolo importante durante gli ultimi venti anni. A volte è molto difficile distinguere un ampio da un divisore big e per questo abbiamo cercato una descrizione dell'essere big simile a quella dell'ampiezza, ancora sostituendo i divisori con la parte intera quando ci fosse stato il bisogno.

Definizione 0.0.12 (Big). Un fibrato lineare $\mathscr{L}$ su una varietà proiettiva X è big se $\kappa(X, \mathscr{L}) = dimX$. Un divisore D di Cartier su X è big se lo è $\mathcal{O}_X(D)$. [Def:3.3.1]

Definizione 0.0.13 (Big per $\mathbb{R}$-divisori). Un $\mathbb{R}$-divisore $D \in Div_{\mathbb{R}}(X)$ è big se può essere scritto nella forma [Def.3.3.7]

$$D = \sum a_i \cdot D_i$$

dove ogni D_i è un divisore big intero e a_i è un numero reale positivo.

Proposizione 0.0.14 ($\mathbb{R}$-divisori big). Sia D un $\mathbb{R}$-divisore su una varietà proiettiva X. Le seguenti affermazioni sono equivalenti: [Pro. 3.3.14]

(i) D è big;

(ii) Esiste un intero $a \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{|[mD]|}$ è birazionale per ogni $m \in \mathbf{N}(X, D)_{\geq a}$;

(iii) $\varphi_{|[mD]|}$ è genericamente finito per qualche $m \in \mathbf{N}(X, D)$;

(iv) Per ogni fascio coerente $\mathscr{F}$ su X, esiste un intero positivo $m = m(\mathscr{F})$ tale che $\mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])$ è genericamente globalmente generato, cioè che la mappa naturale

$$H^0(X, \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \to \mathscr{F} \otimes \mathcal{O}_X([mD])$$

è genericamente suriettiva;

(v) Per ogni $\mathbb{R}$-divisore ampio A su X, esiste un $\mathbb{R}$-divisore effettivo N tale che $D \equiv_{num} A + N$;

(vi) Come in (v) per qualche $\mathbb{R}$-divisore ampio A;

La sezione 3.4 è una descrizione della teoria dei coni di divisori big. In particolare questi divisori saranno utilizzati per dimostrare il *criterio di Nakai-Moishezon per* $\mathbb{R}$*-divisori.*

L'ultima sezione è un'introduzione molto rapida alla teoria del volume, che è il naturale sviluppo di questo lavoro: un nuovo invariante birazionale per lo studio di varietà algebriche.

Definizione 0.0.15. Sia X una varietà proiettiva irriducibile di dimensione n, e sia $\mathscr{L}$ un fibrato lineare su X. Il *volume* di $\mathscr{L}$ è definito come in numero reale non-negativo [Def.3.5.1]

$$\mathrm{vol}(\mathscr{L}) = \mathrm{vol}_X(\mathscr{L}) = \limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathscr{L}^{\otimes m})}{n^n/n!}.$$

Il volume $\mathrm{vol}(D) = \mathrm{vol}_X(D)$ di un divisore di Cartier D è definito come il volume del fibrato lineare associato $\mathcal{O}_X(D)$.

Bibliografia

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.

[CCP05] Frederic Campana, Jungkai A. Chen, and Thomas Peternell. Strictly nef divisors, 2005.

[CP90] Frédéric Campana and Thomas Peternell. Algebraicity of the ample cone of projective varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 407:160–166, 1990.

[Die72] J. Dieudonné. The historical development of algebraic geometry. *Amer. Math. Monthly*, 79:827–866, 1972.

[Har70] Robin Hartshorne. *Ample subvarieties of algebraic varieties.* Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Ken83] Keith M. Kendig. Algebra, geometry, and algebraic geometry: some interconnections. *Amer. Math. Monthly*, 90(3):161–174, 1983.

[Kle66] Steven L. Kleiman. Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. of Math. (2)*, 84:293–344, 1966.

[KN74] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences*. Pure and Applied Mathematics. New York-London-Sydney: Wiley-Interscience (John Wiley and Sons), New York, 1974.

[Kol96] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Laz04a] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.

[Laz04b] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[Mor87] Shigefumi Mori. Classification of higher-dimensional varieties. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 269–331. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Rei96] Miles Reid. Chapters on algebraic surfaces, 1996.

[Ser95] Fernando Serrano. Strictly nef divisors and Fano threefolds. *J. Reine Angew. Math.*, 464:187–206, 1995.

[Sha94] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 2.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Schemes and complex manifolds, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid.