UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea

presentata da

Valeria Pucci

Un criterio di esattezza per un complesso

Relatore

Prof. Edoardo Sernesi

ANNO ACCADEMICO 2006 - 2007
Luglio 2007

Scopo di questo lavoro è fornire una descrizione dettagliata di un importante criterio di esattezza per un complesso, e spiegare come questo possa essere applicato per dimostrare brevemente risultati solitamente provati in modo diverso. Lo studio di criteri di esattezza è stato centrale nell'interesse dei ricercatori negli anni sessanta e settanta: un importante passo in avanti fu fatto da L.Peskine e C.Szpiro, il cui risultato fu utilizzato nel 1971 da David A. Buchsbaum e David Eisenbud per introdurre il criterio che analizzeremo nel lavoro (vedi [BE73]). In particolare, questi ultimi hanno considerato un complesso finito $\mathbb{A} : 0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$ di moduli liberi finitamente generati su un anello commutativo noetheriano unitario R, e ne hanno studiato l'esattezza quando tensorizzato con un modulo M non nullo e finitamente generato: dunque, come caso particolare, hanno dato un criterio per l'esattezza del complesso di partenza. Per ogni $k = 1, \ldots, n$, il criterio consiste di una condizione che connette informazioni sui minori di φ_k e φ_{k+1} con il rango di F_k, e di una seconda condizione che coinvolge l'ideale generato dai minori di un certo ordine di φ_k. Lavorando dunque con omomorfismi di moduli liberi finitamente generati e quindi con matrici, lavoriamo con qualcosa di familiare con la teoria degli spazi vettoriali di dimensione finita: differentemente da tali spazi però, l'ideale generato dai minori non nulli di ordine massimo della matrice che rappresenta l'omomorfismo potrebbe non contenere un elemento invertibile. Un ruolo cruciale gioca allora in questo contesto il concetto di *profondità* dell'ideale dei minori di ordine massimo di φ_k che non siano contenuti nell'annullatore di M. In particolare, se M è un modulo su un anello R, una sequenza $r_1, \ldots, r_n$ di elementi di R è una *M-sequenza* se $M \neq \sum_{i=1}^{n} r_i M$, r_1 è un non zerodivisore su M e, per ogni $i = 2, \ldots, n$, r_i è un non zerodivisore su $M / \sum_{k=1}^{i-1} r_k M$. Allora, se R è un anello noetheriano, I un ideale e M un R-modulo finitamente generato tale che $M \neq IM$, chiamiamo *la profondità di M rispetto ad I*, e

la indichiamo con $\operatorname{depth}(I, M)$, la lunghezza di una M-sequenza massimale contenuta in I: una caratterizzazione equivalente è fornita dall'uguaglianza $\operatorname{depth}(I, M) = \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}$ (vedi [Mat89, Th. 16.7]); se $M = R$ usiamo alternativamente $\operatorname{grade}(I)$ per indicare $\operatorname{depth}(I, R)$.
Come già accennato, strumento fondamentale del nostro lavoro diventa inoltre l'ideale generato dai minori di ordine ν (con $\nu \geq 0$ fissato) della matrice che rappresenta un omomorfismo φ di moduli liberi finitamente generati: è chiamato *ν-esimo ideale determinantale dell'omomorfismo*, ed è usualmente indicato con $I_\nu(\varphi)$. Il più grande ν tale che $I_\nu(\varphi)$ moltiplicato per un modulo M è diverso da zero è quello che usualmente chiamiamo il *rango di φ relativo al modulo M* e che indichiamo con $\operatorname{rank}(\varphi, M)$. Il più importante ideale determinantale di φ, ai fini del criterio che studieremo, è il $\operatorname{rank}(\varphi, M)$-esimo, spesso denotato con $I(\varphi, M)$ (vedi [Nor76, 3.2-4.2]).
Nel lavoro intenderemo sempre per *anello* un anello commutativo unitario.

Il criterio

Enunciamo il teorema centrale del nostro lavoro:

Teorema 1. *Sia R un anello noetheriano, $M \neq 0$ un R-modulo finitamente generato, e*

$$\mathbb{A} : 0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \tag{1}$$

un complesso di R-moduli liberi finitamente generati tale che per ogni $k = 1, \ldots, n$ $\varphi_k \otimes M \neq 0$. Allora $\mathbb{A} \otimes_R M$ è esatto se e solo se, per $k = 1, \ldots, n$,

(a) $\operatorname{rank}(\varphi_{k+1}, M) + \operatorname{rank}(\varphi_k, M) = \operatorname{rank} F_k$

(b) *$I(\varphi_k, M)$ contiene una M-sequenza di lunghezza k o $I(\varphi_k, M) = R$.*

Osservazione. È importante notare che da $I(\varphi_k, M) \neq R$ si può dedurre $I(\varphi_k, M)M \neq M$: dunque $\operatorname{depth}(I(\varphi_k, M), M)$ è ben definita.

Ponendo $M = R$ e definendo $\text{rank}(\varphi_k) := \text{rank}(\varphi_k, R)$ e $I(\varphi_k) := I(\varphi_k, R)$, si ha, come immediata conseguenza del teorema, che $\mathbb{A}$ è esatto se e solo se per ogni k (a) $\text{rank}(\varphi_{k+1}) + \text{rank}(\varphi_k) = \text{rank}\, F_k$ e (b) $I(\varphi_k) = R$ oppure $I(\varphi_k)$ contiene una R-sequenza di lunghezza k.

Cambiare anello

I risultati di questa sezione sono fondamentali per ricondurre le dimostrazioni che si presenteranno alla soluzione di problemi equivalenti più semplici da affrontare.

(a) Da R a R/Ann(M).
Sia $M \neq 0$ un R-modulo; consideriamo l'omomorfismo di anelli

$$\chi : R \to \overline{R} := \frac{R}{\text{Ann}(M)}.$$

Se $r, s \in R$ e $\overline{r} := r + \text{Ann}(M)$, possiamo considerare $\overline{R}$ come un R-modulo con l'operazione $s * \overline{r} := \chi(s)\overline{r}$; dunque, se U è un R-modulo,

$$\overline{U} := U \otimes_R \overline{R}$$

è un $\overline{R}$-modulo con l'operazione $a(u \otimes b) := u \otimes ab$ (con $u \in U$ e $a, b \in \overline{R}$). Inoltre, se $f : U \to V$ è un omomorfismo di R-moduli e $\overline{f} := f \otimes_R \overline{R}$, allora $\overline{f} : \overline{U} \to \overline{V}$ è un omomorfismo di $\overline{R}$-moduli; se invece F è un R-modulo libero con base $x_1, \ldots, x_p$, ne deriva che $\overline{F} = F \otimes_R \overline{R}$ è un $\overline{R}$-modulo libero con base $x_1 \otimes 1_{\overline{R}}, \ldots, x_p \otimes 1_{\overline{R}}$. Infine, se $\varphi : F \to G$ è un omomorfismo di R-moduli liberi finitamente generati e $A = ||a_{kj}||$ è la matrice che rappresenta φ rispetto a due basi date di F e G, allora $\overline{\varphi} := \varphi \otimes_R \overline{R}$ ha come matrice $||\chi(a_{kj})||$ rispetto alle basi indotte di $\overline{F}$ e $\overline{G}$; se ne deduce che

$$\text{rank}_{\overline{R}}(\overline{\varphi}, E) = \text{rank}_R(\varphi, E) \quad \text{e} \quad I(\overline{\varphi}, E) = I(\varphi, E)\overline{R} \tag{2}$$

(nota che un $\overline{R}$-modulo E è anche un R-modulo). Consideriamo ora un complesso $\mathbb{A}$ di R-moduli liberi finitamente generati come in 1, e deduciamone il complesso di $\overline{R}$-moduli liberi finitamente generati $\overline{\mathbb{A}} := \mathbb{A} \otimes_R \overline{R}$, dato da

$$\overline{\mathbb{A}} : 0 \to \overline{F}_n \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} \overline{F}_{n-1} \to \cdots \to \overline{F}_1 \xrightarrow{\overline{\varphi}_1} \overline{F}_0. \tag{3}$$

Lemma 1. *Siano $\mathbb{A}$ e $\overline{\mathbb{A}}$ come sopra e sia $E \neq 0$ un $\overline{R}$-modulo. Valgono le condizioni*

(a) $\mathrm{rank}_R(\varphi_{k+1}, E) + \mathrm{rank}_R(\varphi_k, E) = \mathrm{rank}_R(F_k)$

(b) *$I(\varphi_k, E)$ contiene una E-sequenza di lunghezza k oppure $I(\varphi_k, E) = R$,*

per ogni $1 \leq k \leq n$ se e solo se per ogni $1 \leq k \leq n$ valgono le condizioni

($\overline{\text{a}}$) $\mathrm{rank}_{\overline{R}}(\overline{\varphi}_{k+1}, E) + \mathrm{rank}_{\overline{R}}(\overline{\varphi}_k, E) = \mathrm{rank}_{\overline{R}}(\overline{F}_k)$

($\overline{\text{b}}$) *$I(\overline{\varphi}_k, E)$ contiene una E-sequenza di lunghezza k oppure $I(\overline{\varphi}_k, E) = \overline{R}$.*

Lemma 2. *Siano $\mathbb{A}$ e $\overline{\mathbb{A}}$ complessi come in 1 e 3, e sia $E \neq 0$ un $\overline{R}$-modulo. Allora $\mathbb{A} \otimes_R E$ è esatto se e solo se $\overline{\mathbb{A}} \otimes_{\overline{R}} E$ è esatto.*

Osservazione. L'R-modulo M che appare nella definizione di $\overline{R}$ può anche essere considerato un $\overline{R}$-modulo, e come tale risulta fedele. Dunque, grazie ai lemmi 1 e 2, sarà spesso equivalente procedere nelle dimostrazioni continuando a chiamare l'anello R, ma considerando M un R-modulo fedele. In tal caso, se α è un omomorfismo di R-moduli liberi finitamente generati, utilizzeremo le uguaglianze $\mathrm{rank}(\alpha, M) = \mathrm{rank}(\alpha)$ e $I(\alpha, M) = I(\alpha)$.

(b) Da R ai suoi moduli di frazioni.

Sia R un anello noetheriano, sia

$$\mathbb{Q} : 0 \to Q_n \xrightarrow{\psi_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} Q_{n-2} \to \cdots \to Q_1 \xrightarrow{\psi_1} Q_0 \tag{4}$$

un complesso di R-moduli, e sia S una parte moltiplicativa chiusa di R. Denotiamo allora con $\mathbb{Q}_S$ il complesso di R_S-moduli

$$\mathbb{Q}_S : 0 \to (Q_n)_S \xrightarrow{(\psi_n)_S} (Q_{n-1})_S \to \cdots \to (Q_1)_S \xrightarrow{(\psi_1)_S} (Q_0)_S. \tag{5}$$

I seguenti due risultati saranno fondamentali nel nostro lavoro, permettendoci spesso di ridurre le dimostrazioni al caso locale:

Lemma 3. *Sia $\mathbb{A}$ un complesso come in 1, $M \neq 0$ un R-modulo finitamente generato e supponiamo che le condizioni* (a) *e* (b) *del lemma 1 siano soddisfatte. Se P è un ideale primo di R con $M_P \neq 0$, allora R_P, $\mathbb{A}_P$ e M_P soddisfano condizioni analoghe a* (a) *e* (b)*.*

Lemma 4. *Se $M \neq 0$ è un R-modulo, il complesso $\mathbb{Q} \otimes_R M$ è esatto se e solo se lo è il complesso $\mathbb{Q}_m \otimes_{R_m} M_m$ per ogni ideale massimale m (o, equivalentemente, per ogni ideale massimale m tale che $M_m \neq 0$).*

Sufficienza

Un R-modulo proiettivo finitamente generato E si dice di *rango ben definito* se i ranghi degli R_P-moduli liberi E_P coincidono per ogni ideale massimale P; in tal caso il rango di E è definito come il rango di E_P per un qualsiasi massimale P.

Lemma 5. *Se R è un anello e $\varphi : F \to G$ un omomorfismo R-moduli liberi finitamente generati, allora* $\operatorname{coker} \varphi$ *è proiettivo ed è di rango ben definito se e solo se $I(\varphi) = R$.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$) R può essere supposto locale, ed in tal caso basta dimostrare che $\operatorname{coker}(\varphi)$ è libero di rango $\operatorname{rank}(G) - \operatorname{rank}(\varphi)$. Se $\operatorname{rank}(\varphi) = k$ e I_k è la matrice identità di ordine k, allora esistono basi per F e G tali che φ sia rappresentato dalla matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il risultato segue allora facilmente. $\Rightarrow$) R può essere supposto locale; si dimostra poi che $G \cong \operatorname{Im} \varphi \oplus (G / \operatorname{Im} \varphi)$ e che $F \cong \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \varphi$, da cui $\operatorname{Im} \varphi$

e $\operatorname{Ker}\varphi$ risultano proiettivi e dunque liberi perché moduli su un anello locale. Infine si dimostra che $\operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{id_{\operatorname{Im}\varphi}\oplus\overline{0}} \operatorname{Im}\varphi \oplus (G/\operatorname{Im}\varphi)$ ha gli stessi ideali determinantali di φ, da cui $I(\varphi) = R$. $\square$

Lemma 6. *Sia R un anello, $M \neq 0$ un R-modulo, e $\mathbb{B} : F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$ un complesso di R-moduli liberi finitamente generati con $I(\varphi, M) = I(\psi, M) = R$. Allora $\mathbb{B} \otimes_R M$ è esatto se e solo se $\operatorname{rank}(\varphi, M) + \operatorname{rank}(\psi, M) = \operatorname{rank} G$.*

Dimostrazione. Ci si può ridurre al caso locale e supporre che M sia un modulo fedele, da cui $\operatorname{rank}(\varphi, M) = \operatorname{rank}(\varphi)$ e $\operatorname{rank}(\psi, M) = \operatorname{rank}(\psi)$. Prima si dimostra che $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\psi$ e $\operatorname{Im}\psi$ sono moduli liberi di rango finito; poi che $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi \oplus U$ e che $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\varphi) + \operatorname{rank}(\psi) + \operatorname{rank}(U)$ per un qualche modulo libero U di rango finito: ne risulta che $U = 0$ se e solo se $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\varphi) + \operatorname{rank}(\psi)$. Inoltre, dopo aver dimostrato che $\mathbb{B} \otimes M$ è esatta se e solo se $(\operatorname{Ker}\psi) \otimes M = (\operatorname{Im}\varphi) \otimes M$, si ottiene che $\mathbb{B} \otimes M$ è esatta se e solo se $U \otimes M = 0$, cioè se e solo se $U = 0$. $\square$

($\Leftarrow$) **Prova della sufficienza delle condizioni del teorema.**

Dimostrazione. Per prima cosa ci si riduce al caso locale, si assume che J sia l'ideale massimale di R e si pone $\operatorname{depth}(J, M) = l$. Poi si osserva che, grazie al lemma 5 applicato nel caso locale, il modulo $F'_l := \operatorname{coker}(\varphi_{l+1})$ è in realtà libero, e che, se φ'_l è la mappa indotta da φ_l e π_l è la proiezione canonica da F_l a F'_l, allora $\varphi_l = \varphi'_l \pi_l$: quindi $\mathbb{A}$ si ottiene componendo i complessi $\mathbb{B} : 0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \ldots \to F_{l+1} \to F_l \xrightarrow{\pi_l} F'_l \to 0$ e $\mathbb{A}' : 0 \to F'_l \xrightarrow{\varphi'_l} F_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} F_{l-2} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$. Dunque, per concludere, è sufficiente mostrare che $\mathbb{B} \otimes M$ e $\mathbb{A}' \otimes M$ sono entrambi esatti. Il primo risulta tale grazie al lemma 6; per il secondo ragioniamo per induzione sulla dimensione di Krull dell'anello. Se $\dim R = 0$, $l = 0$ e non c'è nulla da dimostrare; se $\dim R > 0$ si suppone che questa implicazione del teorema valga per anelli di dimensione minore di quella di R. Dunque, poiché se P è un qualsiasi primo non massimale le condizioni (a) e (b) del teorema valgono per $(\mathbb{A}')_P$ e per il modulo M_P, da $\dim R_P < \dim R$ deduciamo, per ipotesi induttiva, l'esattezza del complesso $(\mathbb{A}')_P \otimes_{R_P} M_P$. Per ogni primo non massimale si ha quindi $[H_i(\mathbb{A}' \otimes M)]_P = 0$: se quest'ultima uguaglianza è valida anche per il massimale J abbiamo finito; altrimenti si prova che $\operatorname{depth}(J, H_i(\mathbb{A}' \otimes M)) = 0$, $\operatorname{depth}(J, F_k \otimes M) \geq k$ per $k = i, \ldots, l-1$, e $\operatorname{depth}(J, F_l' \otimes M) \geq l$. Si conclude per il lemma 7 applicato a $\mathbb{A}' \otimes M$. $\square$

Lemma 7. (L. Peskine-C. Szpiro) *Supponiamo che R sia un anello noetheriano, I un ideale, e $\mathbb{C} : 0 \to M_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_1 \to M_0$ un complesso di R-moduli con omologia $H_k = H_k(\mathbb{C})$ e tale che, per ogni $1 \leq k \leq n$, risulti* $\operatorname{depth}(I, M_k) \geq k$ *e* $\operatorname{depth}(I, H_k) = 0$. *Allora $\mathbb{C}$ è esatto.*

Dimostrazione. Se B_k e C_k sono rispettivamente i k-bordi ed i k-cicli del complesso, si ha $B_k \subseteq C_k \subseteq M_k$. Si suppone per assurdo che $\mathbb{C}$ non sia esatto e si prende il più grande intero $m \geq 1$ con $H_m \neq 0$: dunque $B_m \neq C_m$, ma $\mathbb{C}' : 0 \to M_n \to \cdots \to M_{m+1} \to B_m \to 0$ è una successione esatta. Per prima cosa si dimostra, per induzione sulla lunghezza di $\mathbb{C}'$, che $\operatorname{depth}(I, B_m) \geq m + 1 \geq 2$. Poi da $C_m \subseteq M_m$ e $\operatorname{depth}(I, M_m) \geq m \geq 1$ si deduce che $\operatorname{depth}(I, C_m) \geq 1$. Infine, utilizzando la successione esatta $0 \to B_m \to C_m \to H_m \to 0$ e le informazioni che abbiamo su $\operatorname{depth}(I, C_m)$ e $\operatorname{depth}(I, B_m)$, deduciamo che $\operatorname{depth}(I, H_m) > 0$, una contraddizione. $\square$

Necessità

Lemma 8. *Sia R un anello noetheriano, $M \neq 0$ un R-modulo finitamente generato, e $\mathbb{A} : 0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$ un complesso di R-moduli liberi finitamente generati con $\varphi_k \otimes M \neq 0$ e tale che $\mathbb{A} \otimes_R M$ è esatto. Allora, per ogni $k = 1, \ldots, n$, $I(\varphi_k, M)$ contiene un non zerodivisore su M.*

Dimostrazione. Supponendo per assurdo che $I(\varphi_n, M)$ contenga solo zerodivisori su M, si dimostra l'esistenza di un modulo $0 \neq L \subset M$ tale che o

$\operatorname{rank}(\varphi_n, L) = 0$, oppure $0 < \operatorname{rank}(\varphi_n, L) < \operatorname{rank}(F_n)$: in entrambi i casi si giunge ad una contraddizione. Per estendere il risultato agli altri φ_k, facciamo poi vedere che i non zerodivisori su M possono essere invertiti in R: sostanzialmente, se S è l'insieme dei non zerodivisori su M, si dimostra che se il lemma vale per R_S, allora vale anche per l'anello di partenza; per semplicità continuiamo dunque a chiamare l'anello in cui si lavora R, supponendo che tutti i non zerodivisori su M siano elementi invertibili di R. Analogamente, senza perdita di generalità, si può passare dall'anello R all'anello $R/\operatorname{Ann}(M)$, e continuare la dimostrazione chiamando l'anello ancora R, ma supponendo che M sia un R-modulo fedele e ponendo $\operatorname{rank}(\varphi_k, M) = \operatorname{rank}(\varphi_k)$ e $I(\varphi_k, M) = I(\varphi_k)$. Dunque $I(\varphi_n) = R$ e, per il lemma 5, $F'_{n-1} := \operatorname{coker}(\varphi_n)$ è proiettivo. In seguito si dimostra che F'_{n-1} è in realtà un modulo proiettivo finitamente generato di rango costante su un anello semilocale, ed è dunque libero. Allora si indica con $\varphi'_{n-1} : F'_{n-1} \to F_{n-2}$ la mappa indotta da φ_{n-1}, e se ne deduce che $I(\varphi_{n-1}) = I(\varphi'_{n-1})$ e che $\varphi'_{n-1} \otimes M$ è un monomorfismo. Quindi, procedendo esattamente come per φ_n, si dimostra che $I(\varphi'_{n-1}) = I(\varphi_{n-1})$ contiene un non zerodivisore su M, ed un procedimento induttivo conclude la dimostrazione. $\square$

($\Rightarrow$) **Prova della necessità delle condizioni del teorema.**

Dimostrazione. La condizione (a) del teorema si dimostra banalmente facendo vedere che i non zerodivisori su M possono essere considerati invertibili, e che si può lavorare con $\operatorname{rank}(\varphi_k)$ e $I(\varphi_k)$ al posto di $\operatorname{rank}(\varphi_k, M)$ e $I(\varphi_k, M)$, potendo supporre M fedele. Dunque, valendo il lemma 8, si ha $I(\varphi_k) = R$ per ogni $k = 1, \dots, n$: applicando allora il lemma 6 al complesso $F_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \xrightarrow{\varphi_k} F_{k-1}$ per ogni k, si ottiene il risultato desiderato.

Per dimostrare la condizione (b), si comincia provando che, se β è un non zerodivisore su M, si ottiene, con i morfismi indotti dalle relative mappe di $\mathbb{A} \otimes M$, la successione esatta $0 \to (F_n \otimes M)/\beta(F_n \otimes M) \to \cdots \to (F_1 \otimes M)/\beta(F_1 \otimes M)$. Quest'ultima, in quanto chiaramente isomorfa come complesso al seguente

$\mathbb{D} : 0 \to F_n \otimes (M/\beta M) \to F_{n-1} \otimes (M/\beta M) \to \cdots \to F_1 \otimes (M/\beta M)$, ne implica l'esattezza (vedi [Nor76, 6.4, Lemma 4]). Si procede poi per induzione su n: nel caso $n = 1$ la condizione (b) del teorema è banalmente verificata; si suppone allora che la condizione (b) valga per complessi più corti di quello che stiamo considerando e si definisce $\beta := \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$, con β_k un non zerodivisore su M contenuto in $I(\varphi_k, M)$ (la sua esistenza è garantita dal lemma 8). Allora, essendo β un non zerodivisore su M, si ottiene una successione esatta come quella indicata con $\mathbb{D}$. Quindi, applicando opportunamente la condizione (a) del teorema, si ottiene, per $2 \leq k \leq n$, $\mathrm{rank}(\varphi_k, M/\beta M) = \mathrm{rank}(\varphi_k, M)$, da cui $I(\varphi_k, M/\beta M) = I(\varphi_k, M)$. Applicando poi l'ipotesi induttiva al complesso $\mathbb{D}$, risulta che, per ogni $2 \leq k \leq n$, $I(\varphi_k, M/\beta M) = R$ oppure $\mathrm{depth}(I(\varphi_k, M/\beta M), M/\beta M) \geq k - 1$: dunque o $I(\varphi_k, M) = R$, o $\mathrm{depth}(I(\varphi_k, M), M/\beta M) \geq k - 1$. Ma l'ultima condizione è equivalente a richiedere $\mathrm{depth}(I(\varphi_k, M), M) \geq k$, e questo, unito al fatto che $I(\varphi_1, M)$ contiene almeno un non zerodivisore su M, conclude la dimostrazione. □

Applicazioni

(1) Un'interpretazione geometrica

Se l'anello noetheriano R che appare nel teorema 1 è l'anello dei polinomi $R = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_r]$ con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso, allora il teorema 1 ha una semplice interpretazione geometrica. Se $I(p) = \{f \in R \mid f(p) = 0\}$ e se $\mathbb{A}$ è il complesso che appare nel teorema 1, allora indichiamo con $\mathbb{A}(p)$ il complesso $\mathbb{A}(p) : 0 \to F_n(p) \to F_{n-1}(p) \to \cdots \to F_1(p) \to F_0(p)$, dove $F_i(p) := F_i \otimes_R (R/I(p))$. In particolare risulta che $F_i(p)$ è un $R/I(p)$-spazio vettoriale di dimensione finita con $\mathrm{rank}_{R/I(p)}(F_i(p)) = \mathrm{rank}_R(F_i)$, e le matrici che rappresentano i morfismi di $\mathbb{A}(p)$ possono essere considerate come le matrici dei morfismi di $\mathbb{A}$ calcolate in p.

Corollario 1. (vedi [Eis05, Coroll. 3.4]) *Consideriamo il seguente complesso* $\mathbb{A} : 0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to 0$ *di moduli liberi finitamente generati su un anello di polinomi a coefficienti in un campo algebricamente chiuso, diciamo* $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_r]$*. Sia* $X_i \subseteq \mathbb{K}^{r+1}$ *l'insieme dei punti* p *tali che il complesso* $\mathbb{A}(p)$ *non è esatto in* $F_i(p)$*. Allora il complesso* $\mathbb{A}$ *è esatto se e solo se, per ogni* i*, l'insieme* X_i *è vuoto oppure* $\operatorname{codim} X_i \geq i$.

Dimostrazione. Se $r_i = \operatorname{rank}(F_i) - \operatorname{rank}(F_{i+1}) + \cdots \pm \operatorname{rank}(F_n)$, come semplice applicazione del teorema 1 si dimostra che $\mathbb{A}$ è esatto se e solo se $\operatorname{grade}(I_{r_i}(\varphi_i)) \geq i$ per ogni $i \geq 1$. Poi si considera l'insieme algebrico

$$Y_i = \{p \in \mathbb{K}^{r+1} \mid \operatorname{rank}(\varphi_i(p)) < r_i\},$$

e si dimostra che $Y_i = \{p \in \mathbb{K}^{r+1} \mid f(p) = 0 \quad \forall f \in I_{r_i}(\varphi_i)\}$. Ne deriva che $\operatorname{codim}(Y_i) = \operatorname{codim}(I_{r_i}(\varphi_i))$ e, da $\operatorname{grade}(I_{r_i}(\varphi_i)) = \operatorname{codim}(I_{r_i}(\varphi_i))$, segue che $\mathbb{A}$ è esatto se e solo se $\operatorname{codim}(Y_i) \geq i$ per ogni $i \geq 1$. Il passo successivo è dimostrare che $\mathbb{A}(p)$ è esatto in $F_j(p)$ per ogni $j \geq i$ se e solo se $p \notin \cup_{j \geq i} Y_j$. Dunque $\cup_{j\geq i} X_j = \cup_{j \geq i} Y_j$ e, poiché $\operatorname{codim}(\cup_{j\geq i} Y_j) = \min_{j \geq i}(\operatorname{codim}(Y_j))$, $\operatorname{codim}(Y_i) \geq i$ per ogni i se e solo se $\operatorname{codim}(\cup_{j \geq i} Y_j) \geq i$ per ogni i. Il risultato segue allora facilmente. $\square$

(2) Il complesso di Koszul

Il *complesso di Koszul degli elementi* $x_1, \ldots, x_s$ *in* R è definito da

$$0 \to \Lambda^s R^s \xrightarrow{\varphi_s} \ldots \to \Lambda^p R^s \xrightarrow{\varphi_p} \Lambda^{p-1} R^s \to \ldots \to \Lambda^2 R^s \xrightarrow{\varphi_2} R^s \xrightarrow{\varphi_1} R,$$

ed è indicato con $K(x_1, \ldots, x_s)$. Se $y_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in R^s$ con 1 nella j-esima posizione, allora $\Lambda^p R^s$ è un R-modulo libero di rango $\binom{s}{p}$ con base $\{y_{k_1} \wedge \ldots \wedge y_{k_p} \mid 1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq s\}$, e il morfismo φ_p è definito da

$$\varphi_p(y_{k_1} \wedge \ldots \wedge y_{k_p}) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} x_{k_i} [y_{k_1} \wedge \ldots \wedge \hat{y}_{k_i} \wedge \ldots \wedge y_{k_p}]. \qquad (6)$$

Supponendo le basi sottoposte ad un ordinamento lessicografico, si ottiene che 6 dà origine ad una colonna della matrice di φ_p i cui soli elementi non nulli sono, in ordine dall'alto, $(-1)^{p+1}x_{k_p}, \ldots, x_{k_3}, -x_{k_2}, x_{k_1}$.
Il prossimo teorema, solitamente dimostrato in modo più complesso, è un risultato che può essere ottenuto come un'applicazione diretta del teorema 1:

Teorema 2. *Sia $M \neq 0$ un modulo finitamente generato su un anello noetheriano R e sia $x_1, \ldots, x_s$ una M-sequenza. Allora $K(x_1, \ldots, x_s) \otimes_R M$ è esatto.*

Dimostrazione. Si dimostra, lavorando direttamente sulla matrice di φ_P rispetto alle basi sopra citate e sottoposte ad un ordinamento lessicografico, che $\text{rank}(\varphi_p, M) = \binom{s-1}{p-1} = n$ e che $I(\varphi_p, M)$ contiene l'M-sequenza $x_1^n, \ldots, x_p^n$. Allora $K(x_1, \ldots, x_s) \otimes_R M$ è esatto per il teorema 1. $\square$

Teorema 3. *Sia $M \neq 0$ un modulo finitamente generato su un anello noetheriano R e supponiamo che $x_1, \ldots, x_s$ siano elementi nel radicale di Jacobson di R. Se $K(x_1, \ldots, x_s) \otimes_R M$ è esatto, allora $x_1, \ldots, x_s$ è una M-sequenza.*

Dimostrazione. Basta osservare che la matrice di φ_s è una colonna con, dall'alto, gli elementi $(-1)^{s+1}x_s, (-1)^s x_{s-1}, \ldots, -x_2, x_1$; da $\text{rank}(\varphi_s, M) = 1$ si ottiene $I(\varphi_s, M) = (x_1, \ldots, x_s)$, e per il *lemma di Nakayama* $I(\varphi_s, M) \neq R$. Allora, applicando il teorema 1, otteniamo che $\text{depth}(I(\varphi_s, M), M) \geq s$; la tesi segue allora da risultati noti sulle M-sequenze. $\square$

(3) I teoremi di Hilbert-Burch e di Bruns

Teorema 4. (Hilbert-Burch) (vedi [Eis05, Th. 3.2]) *Sia R un anello noetheriano e $I \neq 0$ un ideale con una risoluzione libera finita di lunghezza* 1

$$0 \to F \xrightarrow{M} G \to I \to 0, \tag{7}$$

(per finita intendiamo con moduli finitamente generati). Se il rango del modulo libero F è t, allora il rango di G è necessariamente $t+1$, e si può trovare

un non zerodivisore b su R tale che $I = bI_t(M)$. Inoltre $\text{grade}(I_t(M)) = 2$. *Viceversa, dato un non zerodivisore b su R ed una matrice $(t+1) \times t$, M, a elementi in R e tale che* $\text{grade}(I_t(M)) \geq 2$, *allora l'ideale $I = bI_t(M)$ ammette una risoluzione libera finita di lunghezza 1 come in 7.*
In entrambi i casi l'ideale I ha grado 2 se e solo se l'elemento b è invertibile.

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte, usando l'inclusione di I in R si ha la successione esatta $0 \to F \xrightarrow{M} G \xrightarrow{A} R$, da cui, applicando il teorema 1, si ottiene $\text{rank}(G) = t+1$ e $\text{grade}(I_t(M)) \geq 2$. Ma $\text{codim}(I_t(M)) \leq 2$ e, poiché $\text{grade}(I_t(M)) \leq \text{codim}(I_t(M))$, si ha $\text{grade}(I_t(M)) = 2$. Si pone $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_{t+1})$, con Δ_i uguale a $(-1)^i$ volte il determinante della matrice ottenuta da M cancellando la i-esima riga, e si indica $\text{Hom}_R(-, R)$ con $-^*$. Si dimostra poi che $F^* \xleftarrow{M^*} G^* \xleftarrow{A^*} R^* \leftarrow 0$ e $F^* \xleftarrow{M^*} G^* \xleftarrow{\Delta^*} R^* \leftarrow 0$ sono complessi, e che l'ultimo è anche esatto per il teorema 1. Ne deriva che esiste $b \in R$ tale che $\Delta^* b = A^*$ e dunque tale che $I = bI_t(M)$. Poiché in un anello noetheriano, come semplice conseguenza del teorema 1, un ideale diverso da zero che ha una risoluzione libera di lunghezza finita e con moduli finitamente generati contiene un non zerodivisore, allora b è necessariamente un non zerodivisore.
Per la seconda parte, si dimostra che $\text{rank}(M) = t$ e si pone, con Δ_i come sopra, $\Delta = (b\Delta_1, \ldots, b\Delta_{t+1})$. Poiché $\text{rank}(\Delta) = 1$, da $I(\Delta) = bI(M)$ si deduce che $\text{grade}(I(\Delta)) \geq 1$. Allora il complesso $0 \to F \xrightarrow{M} G \xrightarrow{\Delta} R$ è esatto per il teorema 1, e $I = I(\Delta) = \text{Im}(\Delta)$ implica la tesi. $\square$

Segue una riformulazione del *teorema di Hilbert-Burch* nel caso di un dominio noetheriano. Prima però, se R è appunto un dominio noetheriano, diciamo che *M è un R-modulo privo di torsione* se ogni volta che $rm = 0$ con $r \in R$ ed $m \in M$, allora $r = 0$ oppure $m = 0$. Se $S = \{R \setminus 0\}$ e $\mathbb{K} := S^{-1}R$ è il campo dei quozienti di R, allora definiamo il *rango di M* essere la dimensione di $M \otimes_R \mathbb{K} \cong M_S$ come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Teorema 5. *Se R è un dominio noetheriano e $\varphi : F \to G$ un omomorfismo di R-moduli liberi con $\operatorname{rank}(F) = n$ e $\operatorname{rank}(G) = n+1$, si ha $\operatorname{grade}(I_n(\varphi)) \geq 2$ se e solo se $\operatorname{coker}(F \xrightarrow{\varphi} G)$ è privo di torsione e di rango 1.*

Dimostrazione. Se $\operatorname{coker}(\varphi)$ è privo di torsione e di rango 1, si dimostra che è isomorfo ad un ideale I di R. Dunque, se $\pi : G \to G/\operatorname{Im}(\varphi)$, se f è un isomorfismo tra $\operatorname{coker}(\varphi)$ ed I, ed i l'inclusione di I in R, allora si ottiene la successione esatta $0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{if\pi} R$ e si conclude per il teorema 1. Viceversa sia $\operatorname{grade}(I_n(\varphi)) \geq 2$, A la matrice che rappresenta φ rispetto alle basi $\underline{f}$ e $\underline{g}$, e A_i la matrice che si ottiene da A omettendo la sua i-esima riga. Allora, se $f_i = (-1)^i \det(A_i)$ e $B = (f_1, \ldots, f_{n+1})$ è la matrice che rappresenta un omomorfismo φ_1 rispetto alle basi $\underline{g}$ ed $1 \in R$, si ottiene che il complesso $0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi_1} R$ è una successione esatta per il teorema 1. Dunque $\operatorname{coker}(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi_1)$ è privo di torsione ed ha rango 1. $\square$

Come conseguenza del teorema precedente:

Teorema 6. (Bruns) *Sia R un dominio noetheriano integralmente chiuso ed M un R-modulo finitamente generato con $\operatorname{grade}(\operatorname{Ann}(M)) \geq 2$. Allora esiste un ideale I tale che (1) M sia un quoziente di I, (2) $\operatorname{grade}(I) = 2$ oppure $I = R$, (3) per qualche n esiste $0 \to R^n \to R^{n+1} \to I \to 0$ successione esatta.*

Dimostrazione. Si costruisce l'epimorfismo $R^{n+1} \xrightarrow{f} M$ e si dimostra che $V := \operatorname{Ker}(f)$ è privo di torsione, finitamente generato, e di rango $n+1$. Per il *teorema di Bourbaki* (vedi [Bou85, 7.4, Th.6]), esiste un sottomodulo libero F di V tale che V/F è isomorfo ad un ideale di R, è privo di torsione, ed è di rango 1. Se ne deduce che R^{n+1}/F ha rango 1, e per assurdo si dimostra che R^{n+1}/F è privo di torsione: dunque è isomorfo ad un ideale J di R e, scegliendo un isomorfismo tra F ed R^n, si ottiene la successione esatta $0 \to R^n \to R^{n+1} \to J \cong (R^{n+1}/F)$. Si conclude allora facilmente usando il teorema 4. $\square$

Bibliografia

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[BE73] David A. Buchsbaum and David Eisenbud. What makes a complex exact? *J. Algebra*, 25:259–268, 1973.

[Bou85] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1985. Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7. [Commutative algebra. Chapters 5–7], Reprint.

[Buc69] D. A. Buchsbaum. Lectures on regular local rings. In *Category Theory, Homology Theory and their Applications, I (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. One)*, pages 13–32. Springer, Berlin, 1969.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[Eis05] David Eisenbud. *The geometry of syzygies*, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Kap74] Irving Kaplansky. *Commutative rings.* The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, revised edition, 1974.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Nor76] D. G. Northcott. *Finite free resolutions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1976. Cambridge Tracts in Mathematics, No. 71.

[Nor84] D. G. Northcott. *Multilinear algebra.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[Osb00] M. Scott Osborne. *Basic homological algebra*, volume 196 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[Ser00] Jean-Pierre Serre. *Local algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.