Indice

Introduzione

I problemi ellittici del tipo $\triangle u + f(x)u + u^p = 0$ con $p = \frac{n+2}{n-2}$ esponente critico del teorema di inclusione di Rellich-Kondrakov compaiono in modo naturale in problemi di natura geometrica e fisica: il problema di Yamabe, delle connnessioni di Yang-Mills, della curvatura scalare assegnata, di Brezis-Nirenberg, delle H-superfici, dei cristalli liquidi, delle mappe armoniche, delle superfici minime, il modello Ginzburg-Landau per la superconduttività.

La difficoltà intrinseca in problemi a crescita critica è legata in modo essenziale all'esistenza di gruppi di simmetrie non compatti che causano fenomeni di non compattezza delle successioni Palais-Smale ad alcuni livelli energetici.

Agli inizi degli anni '60 Yamabe affronta la questione se sia possibile o no per una data varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ trovare una metrica conforme alla metrica di partenza a curvartura scalare costante.

Tale problema di natura geometrica si traduce in un'equazione ellittica a crescita critica di Sobolev su varietà.

Aubin in [3] introduce un funzionale definito su $H_1^2(M)$ e riesce a dimostrare che se l'inf del funzionale su tutto lo spazio è minore di una certa energia critica, allora l'inf viene raggiunto e la funzione che realizza il minimo è una soluzione dell'equazione in considerazione.

Il problema si riduce quindi a dimostrare un'opportuna disuguaglianza fine.

La questione viene completamente risolta grazie ai lavori di Aubin [3] e Schoen [4].

Si comincia a studiare un problema modello del tipo $\triangle u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ in $\Omega \subseteq R^n$ e con un approccio simile a Aubin si cerca di trovare una soluzione positiva dell'equazione come punto di minimo di un dato funzionale su $H_0^1(\Omega)$.

In effetti ciò corrisponde alla questione se esista o no una funzione per la quale la disuguaglianza del teorema di inclusione di Sobolev con costante ottimale diventi un'uguaglianza.

La risposta è del tutto sorprendente.

P.L.Lions capisce che le simmetrie, benché causino effettivamente fenomeni di non compattezza, se ben comprese non sono un ostacolo insormontabile.

Se $\Omega = R^n$ la difficoltà è legata al gruppo delle dilatazioni e traslazioni.

Usando il lemma di concentrazione e compattezza enunciato in [26],[27],[28],[29]

P.L. Lions dimostra che, modulo riscalare e riconcentrare oppportunamente, ogni successione minimizzante è precompatta.

Sceglie una successione di funzioni positive convergenti all'inf, che indicheremo con S, ed il limite di una qualsiasi estratta convergente mi fornisce una soluzione positiva del problema.

Talenti indipendentemente in [30] costruisce esplicitamente l'insieme delle soluzioni positive di $\triangle u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ su R^n.

Tale equazione invece non ammette soluzioni se $\Omega \neq R^n$ è un dominio regolare strettamente stellato rispetto all'origine.

Il risultato è conseguenza dell'identità di Pohožaev contenuta in [25].

Avviene quindi un fenomeno inaspettato, un comportamento molto diverso del problema per rapporto all'insieme sul quale lo si studia.

In particolare è vero che per $\Omega \neq R^n$ l'inf del funzionale adattato coincide con S e non viene mai raggiunto in $H_0^1(\Omega)$.

H. Brezis e L. Nirenberg dimostrano in [22] che il valore S rappresenta la soglia energetica critica, al di sotto della quale ogni successione Palais-Smale è precompatta.

L'idea quindi è di rompere la simmetria rispetto al gruppo delle dilatazioni perturbando l'equazione $\triangle u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ con un termine λu ove $\lambda \in R_{\geq 0}$ con la speranza che il funzionale adattato a questo problema ammette un'inf S_λ vicino a S ma inferiore.

Citiamo il risultato di Brezis-Nirenberg per esteso.

Teorema 0.0.1 *Sia Ω un dominio (in particolare limitato) di R^n con $n \geq 3$ e sia λ_1 il primo autovalore dell'operatore $-\triangle$ con condizione omogenea di Dirichlet al bordo.*

Se $n \geq 4$ $\forall \lambda \in (0, \lambda_1)$ $S_\lambda < S$.

Se $n = 3$ esiste $\lambda_* \in [0, \lambda_1)$ tale che $\forall \lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ $S_\lambda < S$.

Si scende quindi sotto il livello critico S e recuperando compattezza si può dimostrare che il funzionale ammette un minimo.

Fra i punti di minimo si trova almeno una soluzione positiva e regolare del problema di partenza.

Se consideriamo il problema P_ϵ di trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ positiva ovunque tale che $-\triangle u = u^{\frac{n+2}{n-2}} + \epsilon u$, per il risultato precedente con $n \geq 4$ esiste almeno una soluzione u_ϵ di P_ϵ $\forall \epsilon \in (0, \lambda_1)$.

Abbiamo quindi una successione in ϵ di soluzioni di P_ϵ, minimizzante per S, che per quanto detto in precedenza non può essere precompatta.

Ogni estratta debolmente convergente non può esserlo fortemente e deve ammettere come limite debole la funzione identicamente nulla.

Devono avvenire dunque fenomeni di concentrazione dovuti alle dilatazioni.

$\forall x \in \Omega$ consideriamo $H(x, y)$ come la funzione armonica per $y \in \Omega$ e positiva che prende come dato sul bordo di Ω il valore

$$| y - x |^{-(n-2)}$$

$H(x, y)$ prende il nome di parte regolare della funzione di Green del laplaciano su Ω.

Rey in [14] sfrutta tale comportamento per ϵ piccolo per ottenere un risultato di molteplicità legato ai punti stazionari di $H(x,x)$.

Abbiamo quindi

Teorema 0.0.2 *Sia Ω dominio (in particolare limitato) di R^n con $n \geq 5$ e $x_0 \in \Omega$ punto critico non degenere di $H(x,x)$, allora esiste ϵ_0 tale che $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ esiste u_ϵ soluzione di P_ϵ con $|\nabla u_\epsilon|^2 \rightharpoonup S^{\frac{n}{2}} \delta_{x_0}$.*

In particolare per ϵ piccolo esistono tante soluzioni di P_ϵ quanti sono i punti critici non degeneri della parte regolare della funzione di Green del laplaciano.

Diamo infine una breve descrizione degli argomenti discussi nella presente tesi.

Nel primo capitolo tratteremo il problema di Dirichlet con dato al bordo strettamente positivo mostrando l'esistenza di un seconda soluzione con tecniche di "mountain pass".

Partendo da un risultato di Caffarelli-Spruck contenuto in [13] con tecniche variazionali standard otterremo un risultato che non è presente in letteratura.

Nel secondo capitolo ci occuperemo invece di dare un'approccio generale più sistematico a problemi di tipo perturbativo con varietà limite di quasi punti critici ed applicheremo tale metodo per rivisitare il risultato di Rey [14] e per ottenere un originale risultato di molteplicità per il problema considerato nel primo capitolo.

Nel terzo capitolo, seguendo le linee del libro di Hebey [6], tratteremo in dettaglio il problema di Yamabe ed affronteremo un problema nuovo di tipo perturbativo sulla sfera, che nasce da considerazioni riguardo il risultato di unicità dovuto a Bidaut-

Veron e Veron [32].

Faremo uso di tecniche ormai standard tratte da [15] e [16].

Si ringrazia il professore Emmanuel Hebey e tutto il suo gruppo di ricerca per l'ospitalità, la disponibilità e gli utili suggerimenti ricevuti durante il periodo di studi trascorso presso l'università di Cergy-Pontoise.

Capitolo 1

Problema di Dirichlet con dato al bordo positivo e crescita critica di Sobolev

1.1 Introduzione

In questo capitolo considereremo il seguente problema: dati $\varphi \in C^1(\partial\Omega) \geq 0$, $\Omega \subseteq R^n$ aperto limitato liscio e λ reale positivo, vogliamo trovare soluzioni positive di

$$-\triangle u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ in } \Omega$$

$$u = \varphi \text{ in } \partial\Omega. \tag{1.1}$$

Esiste già un risultato a riguardo dovuto a Caffarelli e Spruck in [13].

Teorema 1.1.1 *Siano Ω dominio di R^n con $\partial\Omega \in C^2$, $\varphi \in C^{1+\beta}(\partial\Omega)$ positiva ovunque, h l'estensione armonica di φ su Ω e $\gamma > \int_\Omega h^{\frac{2n}{n-2}}$. Esistono $\lambda > 0$ e una funzione strettamente positiva $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$ tale che $\int_\Omega u^{\frac{2n}{n-2}} = \gamma$ e u è soluzione di*

$$-\triangle u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \textit{ in } \Omega$$

$$u = \varphi \textit{ in } \partial\Omega$$

Inoltre, se poniamo $\vartheta = \gamma - \int_\Omega h^{\frac{2n}{n-2}}$, abbiamo le seguenti stime asintotiche

$$c_1\vartheta \leq \lambda \leq c_2\vartheta \textit{ per } \vartheta \textit{ piccolo}$$

$$c_3\vartheta^{-\frac{2}{n}} \leq \lambda \leq c_4\vartheta^{-\frac{2}{n}} \textit{ per } \vartheta \textit{ grande}$$

ove c_1, c_2, c_3 e c_4 sono costanti strettamente positive.

L'articolo di Caffarelli e Spruck fornisce delle stime a priori sulla norma in $C^{1+\beta}(\Omega)$ delle soluzioni nel caso sottocritico molto interessanti ma non chiarisce esattamente quali siano effettivamente i valori di λ per i quali esiste una soluzione dell'equazione al critico.

1.2 Esistenza di soluzioni

Se $0 \leq h = h_\varphi$ indica l'estensione armonica di φ su Ω, si può facilmente vedere che il problema di partenza è equivalente a trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ positiva quasi ovunque tale che

$$-\triangle u = \lambda (h+u)^p \text{ in } \Omega. \tag{1.2}$$

ove $p = \frac{n+2}{n-2}$.

A tal fine cercheremo i punti critici del funzionale

$$E_\lambda(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega \mid u+h \mid^{p+1}, u \in H_0^1(\Omega) \tag{1.3}$$

accettando poi eventualmente solo le funzioni positive.

Abbiamo un risultato più preciso dovuto a Crandall e Rabinowitz in [17].

Se poniamo

$$Lu(x) = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j})(x) + c(x)u(x) = \lambda f(x, u(x)) \ \forall x \in \Omega$$

ove

(i)L è uniformemente ellittico in Ω

(ii)$a_{ij} = a_{ji} \in C^2(\bar{\Omega}, R) \ \forall i, j = 1, .., n$

(iii) $c \in C^1(\bar{\Omega}, R_{\geq 0})$

(iv)$f \in C^3(\bar{\Omega} \times R, R)$

(v) $f(x, 0) > 0 \ \forall x \in \Omega$

(vi) $f_z(x, 0) = \frac{\partial}{\partial z}(f(x, z)) \mid_{z=0} > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$

(vii) $f_{zz}(x,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(f(x,z)) > 0$ $\forall x \in \Omega$ e $z > 0$

e μ_1 l'inf dei μ tali che il problema

$$Lv = \mu f_z(x,0)v$$

ammetta una soluzione non triviale in $C^2(\bar{\Omega})$ con valore al bordo nullo, allora sussiste il seguente risultato.

Teorema 1.2.1 *Se u è soluzione positiva in Ω e nulla al bordo di*

$$Lu(x) = \lambda f(x, u(x))$$

allora $\lambda \leq \mu_1$.

Inoltre esiste $\bar{\lambda} \in (0, \mu_1]$ che è massimale rispetto all'esistenza di una curva

$A = \{(\lambda, u(\lambda)) : \lambda \in [0, \bar{\lambda}), Lu(\lambda)(x) = \lambda f(x, u(\lambda)(x)), u(\lambda) > 0 \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ in } \partial\Omega\}$

che soddisfa:

(i)$\forall \alpha \in (0,1)$ $u \in C([0,\bar{\lambda}), C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))$

(ii)l'operatore $v \to Lv - \lambda f_z(x, u(\lambda)(x))v$ è invertibile $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda})$ come mappa da $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ in $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$

(iii) $u(\lambda)(x)$ è una funzione non decrescente di λ $\forall x \in \bar{\Omega}$ e per fissato $\lambda \in [0, \bar{\lambda})$ $u(\lambda)$ è punto per punto minimale fra tutte le soluzioni u positive in Ω e nulle al bordo di $Lu = \lambda f(x, u(x))$.

In particolare il più piccolo autovalore di $L - \lambda f_z(x, u(\lambda)(x))$ è strettamente positivo per $\lambda < \bar{\lambda}$

Supponendo φ strettamente positiva, da tale teorema deduciamo che esiste $\lambda(h)$ tale che $\forall\lambda \in (0, \lambda(h))$ ci sia soluzione u_λ regolare positiva di (1.2) minimale punto per punto tra tutte le soluzioni positive del problema.

Sempre da [17] abbiamo

Teorema 1.2.2 *Supponiamo che esista $M > 0$ tale che $\|u(\lambda)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq M$ $\forall\lambda \in [0, \bar{\lambda})$, allora $\bar{u} = \lim_{\lambda\uparrow\bar{\lambda}} u(\lambda)$ esiste $\forall\alpha \in (0, 1)$ nella topologia di $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ ed esiste $\delta > 0$ tale che le soluzioni positive in Ω e nulle al bordo di $Lu = \lambda f(x, u(x))$ vicino a $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ formino una curva $B = \{(\lambda(s), \tilde{u}(s)) :\mid s \mid< \delta\}$ ove $(\lambda(s), \tilde{u}(s))$ soddisfa:*

(i) la mappa $s \to (\lambda(s), \tilde{u}(s))$ è due volte differenziabile da $(-\delta, \delta)$ in $R \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$

(ii)$\lambda(0) = \bar{\lambda}, \tilde{u}(0) = \bar{u}$ e $\tilde{u}'(0) = v > 0$ con $Lv = \bar{\lambda} f_z(x, \bar{u}(x))v$

(iii)$\lambda'(0) = 0$ e $\lambda''(0) < 0$.

Per approfondimenti rinviamo a [18] e [31].

Quindi, sotto condizioni opportune, la curva A arriva fino a $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ ove ha un punto di inversione.

Localmente ci saranno pertanto due soluzioni strettamente positive in Ω e nulle al bordo di $Lu = \lambda f(x, u(x))$.

Da ciò viene in mente di provare a cercare anche per λ lontani da $\bar{\lambda}$ una seconda soluzione di (1.2), facendo uso di tecniche di "mountain pass".

Il risultato, vero nel caso sottocritico così come dimostrano Crandall e Rabinowitz in [17], si formula nel seguente modo.

Teorema 1.2.3 *Sia φ strettamente positiva e $h > 0$ la sua estensione armonica su $\bar{\Omega}$. Allora esistono almeno due soluzioni strettamente positive distinte $\forall \lambda \in (0, \lambda(h))$ per il problema (1.2).*

Abbiamo bisogno delle due seguenti proposizioni.

Proposizione 1.2.4 *Per ogni $\lambda \in (0, \lambda(h))$ e $n \geq 3$ siano*

$$G_\lambda(u) := E_\lambda(u + u_\lambda) - E_\lambda(u_\lambda)$$

e $\{u_m\}_{m \in N}$ una successione Palais-Smale per G_λ ad un livello $\eta < \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$ di funzioni positive quasi ovunque, ove S è la costante di Sobolev.

Allora $\{u_m\}$ è precompatta.

Dimostrazione Sia $u_m \subseteq H_0^1(\Omega)$ tale che

$$G_\lambda(u_m) \to \eta < \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$$

$$DG_\lambda(u_m) = -\triangle(u_m + u_\lambda) - \lambda(h + u_m + u_\lambda)^p = o(1) \text{ in } H^{-1} \tag{1.4}$$

Mostriamo dapprima che la successione u_m deve essere necessariamente limitata in norma.

Osserviamo che esistono $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ e $z_0 > 0$ tali che

$$\frac{1}{p+1}(h(x) + z)^{p+1} \leq z\theta(h(x) + z)^p \qquad \forall z \geq z_0 \tag{1.5}$$

uniformemente per $x \in \bar{\Omega}$.

E' sufficiente scegliere $z_0 = (n-2) \parallel h \parallel_{\infty,\Omega}$ e $\theta = \frac{n-1}{2n}$.

Possiamo quindi scrivere la seguente catena di disuguaglianze

$2\eta \geq G_\lambda(u_m) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla(u_m + u_\lambda) \mid^2 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega (h + u_m + u_\lambda)^{p+1} - c_1 \geq \frac{1}{2} \parallel u_m +$

$+ u_\lambda \parallel^2 - \lambda\theta \int_\Omega (u_m + u_\lambda)(h + u_m + u_\lambda)^p dx - c_2 \geq (\frac{1}{2} - \theta) \parallel u_m + u_\lambda \parallel^2 + o(1) \cdot$

$\cdot \parallel u_m + u_\lambda \parallel - c_2 \geq (\frac{1}{2} - \theta) \parallel u_m \parallel^2 - c_3 \parallel u_m \parallel - c_4 \rightarrow_{\parallel u_m \parallel \rightarrow +\infty} +\infty$

Quindi

$$\parallel u_m \parallel \leq cost. \tag{1.6}$$

Quindi per riflessività di $H_0^1(\Omega)$, modulo passaggio a sottosuccessioni, possiamo supporre che $\exists\, u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $u_m \rightharpoonup u$.

Chiaramente risulta che la funzione u è positiva quasi ovunque.

Passando al limite in (1.4), otteniamo che u è soluzione debole e a posteriori forte di

$$-\triangle u = \lambda(h + u + u_\lambda)^p - \lambda(h + u_\lambda)^p \tag{1.7}$$

Vogliamo ora far vedere che $G_\lambda(u) \geq 0$.

Basta in effetti esplicitare la seguente quantità

$G_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 + \int_\Omega \nabla u \nabla u_\lambda + \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega [(h + u_\lambda)^{p+1} - (h + u + u_\lambda)^{p+1}] =$

$= \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega [\frac{p+1}{2}(h + u + u_\lambda)^p u + \frac{p+1}{2}(h + u_\lambda)^p u + (h + u_\lambda)^{p+1} - (h + u + u_\lambda)^{p+1}]$

ove ho usato il fatto che u_λ e u sono soluzioni rispettivamente di (1.2) e (1.7).

Basta ora osservare che la funzione di due variabili

$$\frac{p+1}{2}(t+z)^p z + \frac{p+1}{2}t^p z + t^{p+1} - (t+z)^{p+1}$$

è sempre positiva per $t, z \geq 0$.

Allora $G_\lambda(u) \geq 0$.

Faremo ora vedere che $\| u_m - u \|$ è stimata dall'alto da $\frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$ e che in tal caso la norma di $(u_m - u)$ deve tendere necessariamente a zero.

Concluderemo così la dimostrazione della proposizione.

Abbiamo che

$\lambda \int_\Omega [(h + u_m + u_\lambda)^{p+1} - (h + u + u_\lambda)^{p+1}] = \int_\Omega \mid \nabla(u_m + u_\lambda) \mid^2 + o(1) - \int_\Omega \mid \nabla(u+$

$+u_\lambda) \mid^2 + \lambda \int_\Omega h[(h + u_m + u_\lambda)^p - (h + u + u_\lambda)^p] = \int_\Omega \mid \nabla(u_m - u) \mid^2 + o(1)$

poiché vale (1.4) e u_λ,u sono soluzioni rispettivamente di (1.2),(1.7).

Quindi possiamo scrivere

$G_\lambda(u_m) - G_\lambda(u) = \frac{1}{2} \| u_m - u \|^2 - \frac{\lambda}{p+1} \int_\Omega [(h+u_m+u_\lambda)^{p+1} - (h+u+u_\lambda)^{p+1}] + o(1) =$

$= \frac{1}{n} \| u_m - u \|^2 + o(1) \leq G_\lambda(u_m) < \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$ per n grande $\Rightarrow$

$$\| u_m - u \|^2 < \lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}} \text{ definitivamente} \tag{1.8}$$

In ultimo usiamo la proprietà della successione u_m di essere costituita da quasi punti critici di G_λ per riuscire a stimare la $\| u_m - u \|$ in termini di quantità piccole al tendere di m all'infinito:

$o(1) = < DG_\lambda(u_m), u_m - u > = < DG_\lambda(u_m) - DG_\lambda(u), u_m - u > = \| u_m -$

$-u \|^2 - \lambda \int_\Omega (u_m - u)[(h + u_m + u_\lambda)^p - (h + u + u_\lambda)^p] + o(1) = \| u_m - u \|^2 -$

$-\lambda \int_\Omega \mid u_m - u \mid^{p+1} + o(1)$

Abbiamo usato nella precedente

$\mid \int_\Omega (u_m - u)[(h + u_m + u_\lambda)^p - \mid u_m - u \mid^{p-1} (u_m - u)] - \int_\Omega (u_m - u)(h + u + u_\lambda)^p \mid =$

$= \mid \int_\Omega (u_m - u) \int_0^1 \frac{d}{dt}[\mid (h + u_m + u_\lambda) + (t-1)(h + u + u_\lambda) \mid^{p-1} ((h + u_m +$

$+ u_\lambda) + (t-1)(h + u + u_\lambda))] - p \int_\Omega \int_0^1 t^{p-1}(u_m - u)(h + u + u_\lambda)^p \mid \leq p \int_\Omega \int_0^1 \mid u_m -$

$-u \mid [\mid\mid (h + u_m + u_\lambda) + (t-1)(h + u + u_\lambda) \mid^{p-1} - t^{p-1}(h + u + u_\lambda)^{p-1} \mid](h + u +$

$+ u_\lambda) = o(1)$

Infatti se $p < 2$, per hölderiantità di x^{p-1} e per il teorema di inclusione di Sobolev, otteniamo

$p \int_\Omega \int_0^1 \mid u_m - u \mid [\mid\mid (h + u_m + u_\lambda) + (t-1)(h + u + u_\lambda) \mid^{p-1} - t^{p-1}(h + u +$

$+ u_\lambda)^{p-1} \mid](h + u + u_\lambda) \leq cost. \int_\Omega \int_0^1 (h + u + u_\lambda) \mid u_m - u \mid^p \leq cost. \int_\Omega \mid u_m - u \mid^p = o(1)$

mentre se $p \geq 2$, per convessità di x^{p-1} e per il teorema di inclusione di Sobolev, otteniamo

$p \int_\Omega \int_0^1 \mid u_m - u \mid [\mid\mid (h + u_m + u_\lambda) + (t-1)(h + u + u_\lambda) \mid^{p-1} - t^{p-1}(h + u +$

$+ u_\lambda)^{p-1} \mid](h + u + u_\lambda) \leq p(p-1) \int_\Omega \int_0^1 (u_m - u)^2 (h + u + u_\lambda) \max(\mid (h + u_m + u_\lambda) +$

$+ (t-1)(h + u + u_\lambda) \mid^{p-2}, t^{p-2}(h + u + u_\lambda)^{p-2}) = O(\int_\Omega (h + u + u_\lambda)^{p-1}(u_m - u)^2 +$

$+ \int_\Omega (h + u + u_\lambda) \mid u_m - u \mid^p) = O(\int_\Omega (u_m - u)^2 + \int_\Omega \mid u_m - u \mid^p) = o(1)$

Quindi, per definizione di S

$o(1) = < DG_\lambda(u_m) - DG_\lambda(u), u_m - u > = \| u_m - u \|^2 - \lambda \int_\Omega \mid u_m - u \mid^{p+1} + o(1) \geq$

$\geq \| u_m - u \|^2 \, (1 - \lambda S^{-\frac{p+1}{2}} \| u_m - u \|^{p-1} + o(1)) \geq C \| u_m - u \|^2$

ove C è una costante positiva in vista di (1.8).

Allora $u_m \to u$ in $H_0^1(\Omega)$ ed è quindi vero l'enunciato.

Osserviamo che il risultato della proposizione 1.2.4 non può essere migliorato relativamente al vincolo sull'energia poiché esistono successioni Palais-Smale di funzioni positive al livello $\frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}}S^{\frac{n}{2}}$ per le quali non è possibile trovare estratte convergenti.

Siano infatti $x_0 \in Int\Omega$, r tale che $B_{2r}(x_0) \subseteq \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $B_r(x_0)\alpha\varphi\alpha B_{2r}(x_0)$ e $\{\theta_m\}_{m\in N}$ con $\theta_m \to_{m\to+\infty} +\infty$.

Consideriamo per $x \in R^n$ e $\theta > 0$

$$U_{x,\theta}(y) = (\frac{n(n-2)}{\lambda})^{\frac{1}{p-1}} \frac{\theta^{\frac{n-2}{2}}}{(1+\theta^2 \mid y-x \mid^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

soluzione di

$$-\triangle U_{x,\theta} = \lambda U_{x,\theta}^p$$

e poniamo $u_m(y) = \varphi(y)U_{x_0,\theta_m}(y) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Poiché $u_m \rightharpoonup 0$ e in vista del teorema di Sobolev e delle relazioni

$$(x+y)^{p+1} - y^{p+1} - x^{p+1} = O(xy^p + x^p y)$$

$$(x+y)^p - x^p - y^p = O(xy^{p-1} + x^{p-1}y)$$

uniformemente per $x, y \geq 0$, abbiamo

$G_\lambda(u_m) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u_m \mid^2 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega [(h+u_m+u_\lambda)^{p+1} - (h+u_\lambda)^{p+1}] + o(1) =$

$= \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u_m \mid^2 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega u_m^{p+1} + o(1) \to \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}}S^{\frac{n}{2}}$

e

$DG_\lambda(u_m) = -\triangle(u_m+u_\lambda) - \lambda(u_m+u_\lambda+h)^p = -\triangle u_m - \lambda[(u_m+u_\lambda+h)^p - (u_\lambda+h)^p] =$

$= -\triangle u_m - \lambda u_m^p + o(1) = o(1) \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)$

Quindi $\{u_m\}_{m\in N}$ è una successione di Palais-Smale di funzioni positive al livello $\frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$ che non può ammettere estratte convergenti.

Infatti, poiché $u_m \rightharpoonup 0$, ogni estratta fortemente convergente dovrebbe tendere a zero.

Però

$$\|u_m\|^2 = \int_\Omega |\nabla u_m|^2 = \|U_{x_0,\theta_m}\|^2_{D^{1,2}(R^n)} + o(1) \to \lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}} > 0$$

Quindi non possono esistere estratte convergenti fortemente a zero.

Come conseguenza del fatto che l'operatore simmetrico $-\triangle - \lambda p(h+u_\lambda)^{p-1}$ ha primo autovalore strettamente positivo, vedi Teorema(1.2.1), abbiamo gratis che $u = 0$ è un punto di minimo relativo stretto per G_λ ed ha quindi senso considerare il "mountain pass" di G_λ rispetto all'origine.

Se scegliamo $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tale che $G_\lambda(u_1) < 0$ e poniamo

$$P = \{p : [0,1] \to H_0^1(\Omega) \text{ continuo tale che } p(0) = 0 \text{ e } p(1) = u_1\}$$

allora il valore β di "mountain pass" è definito come

$$\beta = \inf_{p\in P} \sup_{u\in P} G_\lambda(u)$$

Osserviamo che il valore di β è indipendente dalla scelta di u_1 purché $G_\lambda(u_1) < 0$.

E' vero il seguente risultato

Proposizione 1.2.5 *Il valore β verifica $\beta < \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}}S^{\frac{n}{2}}$ in dimensione $n \geq 3$*

Dimostrazione Consideriamo dapprima il caso $n \geq 5$.

Definiamo $PU_{x,\theta}$ come l'unica soluzione in $H_0^1(\Omega)$ regolare e positiva di

$$-\triangle PU_{x,\theta} = -\triangle U_{x,\theta} = \lambda U_{x,\theta}^p$$

Poniamo $u_1 = t_1 PU_{x,\theta}$ e $p_0(t) = tu_1$ il segmento che unisce l'origine con u_1, ove abbiamo scelto t_1 sufficientemente grande in modo che $G_\lambda(tPU_{x,\theta}) < 0 \; \forall t \geq t_1$.

Abbiamo chiaramente

$$\beta \leq \sup_{u \in p_0} G_\lambda(u) = \max_{t\in[0,1]} G_\lambda(tt_1 PU_{x,\theta}) = \max_{t\in[0,+\infty)} G_\lambda(tPU_{x,\theta}) \tag{1.9}$$

Osserviamo che per $n \geq 5$ sussiste la seguente:

$$(x+y)^{p+1} - x^{p+1} - y^{p+1} - (p+1)xy^p - (p+1)x^p y = O(x^{\frac{n+1}{n-2}} y^{\frac{n-1}{n-2}}) \tag{1.10}$$

ove la stima è uniforme per $x, y \geq 0$.

Useremo ora

Lemma 1.2.6 *La funzione $G_\lambda(tPU_{x,\theta})$ ammette un punto di massimo assoluto t_θ ove $t_\theta \uparrow 1$ e $t_\theta - 1 = O(\frac{1}{\theta^{\frac{n-2}{2}}})$*

Quindi grazie a (1.10) e a (3.29),(3.37),(3.38) e (3.39) dell'appendice:

$max_{t\in[0,1]} G_\lambda(tt_1 PU_{x,\theta}) = \frac{1}{2}t_\theta^2 \int_\Omega \mid \nabla PU_{x,\theta} \mid^2 - \frac{\lambda}{p+1}\int_\Omega [(t_\theta PU_{x,\theta} + u_\lambda + h)^{p+1} - (u_\lambda + +h)^{p+1} - (p+1)t_\theta(u_\lambda + h)^p PU_{x,\theta}] = \frac{1}{2}t_\theta^2[\lambda \int_{R^n} U_{x,\theta}^{p+1} + O(\frac{1}{\theta^{n-2}})] - \frac{\lambda}{p+1}t_\theta^{p+1}[\int_{R^n} U_{x,\theta}^{p+1} +$

$+O(\frac{1}{\theta^{n-2}})] - \lambda t_\theta^p \int_\Omega (u_\lambda + h) PU_{x,\theta}^p + O(\int_\Omega PU_{x,\theta}^{\frac{n-1}{n-2}}) = c_1(\frac{1}{2}t_\theta^2 - \frac{1}{p+1}t_\theta^{p+1}) - \lambda t_\theta^p \frac{c_2(x)}{\theta^{\frac{n-2}{2}}} +$

$+O(\frac{1}{\theta^{\frac{n-1}{2}}})$

Quindi

$$max_{t\in[0,1]} G_\lambda(tt_1 PU_{x,\theta}) = c_3 - \lambda \frac{c_2(x)}{\theta^{\frac{n-2}{2}}} + o(\frac{1}{\theta^{\frac{n-2}{2}}}) \tag{1.11}$$

visto che per il lemma 1.2.6 abbiamo

$$\frac{1}{2}t_\theta^2 - \frac{1}{p+1}t_\theta^{p+1} = \frac{1}{n} + [O(\frac{1}{\theta^{\frac{n-2}{2}}})]^2 = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{\theta^{n-2}})$$

Quindi per (1.9) e (1.11)

$$\beta \leq G_\lambda(t_\theta PU_{x,\theta}) = c_3 - \lambda \frac{c_2(x)}{\theta^{n-2}} + o(\frac{1}{\theta^{n-2}}) < \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$$

ove l'ultimo passaggio è vero per θ sufficientemente grande,essendo $c_2(x) > 0$.

Se prendiamo $n = 3$ o $n = 4$ useremo invece lo sviluppo completo rispettivamente di $(x+y)^{p+1} = (x+y)^6$ e di $(x+y)^{p+1} = (x+y)^4$ con $x, y \geq 0$.

Dimostrazione (Lemma 1.2.6) Derivando in t e calcolando in $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, usando (3.29),(3.37),(3.38),(3.39) e la relazione per $n \geq 5$

$$(x+y)^p - x^p - y^p - pxy^{p-1} = O(x^{\frac{n+1}{n-2}} y^{\frac{1}{n-2}}) \tag{1.12}$$

uniformemente per $x, y \geq 0$, otteniamo

$\frac{d}{dt}[G_\lambda(tPU_{x,\theta})] = t \int_\Omega \mid \nabla PU_{x,\theta} \mid^2 - \lambda \int_\Omega [(tPU_{x,\theta} + u_\lambda + h)^p PU_{x,\theta} - (u_\lambda + h)^p PU_{x,\theta}] =$

$= t \int_\Omega \mid \nabla PU_{x,\theta} \mid^2 - \lambda t^p \int_\Omega PU_{x,\theta}^{p+1} - p\lambda t^{p-1} \int_\Omega (u_\lambda + h) PU_{x,\theta}^p + O(t^{\frac{1}{n-2}} \int_\Omega PU_{x,\theta}^{\frac{n-1}{n-2}}) =$

$= \lambda(t - t^p) \int_{R^n} U_{x,\theta}^{p+1} - p\lambda t^{p-1} \frac{c_2(x)}{\theta^{\frac{n-2}{2}}} + O(\frac{1}{\theta^{\frac{n-1}{2}}})$

Definiamo un funzionale C^1 in (t, θ) ponendo

$$H(t,\theta): \ [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [1, +\infty) \longrightarrow R$$

$$(t,\theta) \longrightarrow \frac{d}{dt}[G_\lambda(tPU_{x,\theta})]$$

il quale verifica $H(1, +\infty) = 0$ e $\frac{\partial H}{\partial t}(1, +\infty) = -\lambda(p-1) \int_{R^n} U_{x,\theta}^{p+1} < 0$.

Grazie al teorema delle funzioni implicite costruisco un ramo (t_θ, θ) di zeri di $H(t, \theta)$ che rappresenta in un intorno di $(1, +\infty)$ tutti e soli gli zeri di $H(t, \theta)$ e tale che $t_\theta \to 1$ con $\theta \to \infty$.

Osserviamo che i punti t_θ sono tutti e soli i punti di massimo relativo di $G_\lambda(tPU_{x,\theta})$ in un intorno di 1 e per θ grande sono anche punti di massimo assoluto.

Infatti, con la stessa costruzione di t_θ, possiamo costruire t'_θ tutti e soli i punti di minimo relativo in un intorno di 0 con $t'_\theta \to 0$ se $\theta \to \infty$.

Chiaramente $G_\lambda(tPU_{x,\theta})$ per θ grande non ammetterà al finito punti critici diversi da t_θ o t'_θ, visto che al limite $H(t, +\infty)$ ha come unici zeri 0 e 1.

Infatti se non fosse così, esisterebbe una successione in θ di punti critici t''_θ di $G_\lambda(tPU_{x,\theta})$, distinti da t_θ e t'_θ, che resta limitata con $\theta \to +\infty$.

Modulo sottosuccessioni possiamo supporre che $t''_\theta \to t_0$ con $\theta \to +\infty$.

Passando al limite la relazione $H(t''_\theta, \theta) = 0$ otteniamo $t_0 - t_0^p = 0$ e quindi $t_0 = 0$ o $t_0 = 1$, la qual cosa è assurda per unicità di t_θ e t'_θ in un intorno rispettivamente di 0 e 1.

Quindi $G_\lambda(tPU_{x,\theta})$ può ammettere punti critici diversi da t_θ e t'_θ ma al tendere di $\theta \to +\infty$ questi devono divergere.

Visto che $\lim_{t\to+\infty} G_\lambda(tPU_{x,\theta}) = -\infty$ tali punti critici per θ grande non potranno essere mai punti di massimo assoluti e quindi t_θ sono per θ grande anche punti di massimo assoluto.

Osserviamo inoltre che

$$\lambda \int_{R^n} U_{x,\theta}^{p+1}(t_\theta^p - t_\theta) = p\lambda t^{p-1}\frac{c_2(x)}{\theta^{\frac{n-2}{2}}} + O(\frac{1}{\theta^{\frac{n-1}{2}}})$$

allora $t_\theta > 1$ e $t_\theta - 1 = O(\frac{1}{\theta^{\frac{n-2}{2}}})$.

Il lemma è così verificato in dimensione $n \geq 5$.

Per $n = 3$ e $n = 4$ useremo invece lo sviluppo completo rispettivamente di $(x+y)^p = (x+y)^5$ e $(x+y)^p = (x+y)^3$ per $x, y \geq 0$.

Concludiamo con la dimostrazione del teorema (1.2.3).

Dimostrazione (Teorema 1.2.3) Scegliamo $u_1 = PU_{x,\theta} \geq 0$ e ricordiamo che per il teorema di "mountain pass" enunciato e dimostrato da Ambrosetti e Rabinowitz in [19] abbiamo che il valore β un valore critico per G_λ.

Useremo adesso un principio di carattere generale per il quale rinviamo a [38].

Teorema 1.2.7 *Siano ϕ un funzionale C^1 su uno spazio di Hilbert E e F una famiglia stabile sotto l'azione di omotopia di insiemi compatti di E con bordo chiuso C.*

Assumiamo che $c = c(\phi, \mathcal{F}) = \inf_{A\in\mathcal{F}} \sup_{x\in A} \phi(x)$ *sia finito e che* B *sia un sottoinsieme chiuso di* E *tale che*

$$B \cap C = \emptyset$$

$$B \cap A \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$\inf \phi(B) \geq c$$

allora, per ogni successione $\{A_n\}_n$ *in* $\mathcal{F}$ *tale che* $\lim_n \sup_{A_n} \phi = c$*, esiste una successione* $\{x_n\}$ *in* E *tale che*

$$\lim_n \phi(x_n) = c$$

$$\lim_n \|\phi'(x_n)\| = 0$$

$$\lim_n d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

$$\lim_n d(x_n, A_n) = 0$$

In più, se ϕ' *è uniformemente continuo sulle successioni critiche al livello c,ossia per ogni successione Palais-Smale* y_n *di* ϕ *al livello* c *e* $\|z_n - y_n\| \to 0$ *allora* $\phi'(z_n) \to 0$*, si può scegliere* $\{x_n\}$ *in modo che* $x_n \in B$ *oppure* $x_n \in A_n$ $\forall n \in N$.

Osserviamo che

$G_\lambda(\mid u \mid) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla(\mid u \mid) \mid^2 + \lambda \int_\Omega (h + u_\lambda)^p \mid u \mid - \frac{\lambda}{p+1} \int_\Omega [\mid h + \mid u \mid + u_\lambda \mid^{p+1} - \mid h +$

$+ u_\lambda \mid^{p+1}] \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 + \lambda \int_\Omega (h + u_\lambda)^p u - \frac{\lambda}{p+1} \int_\Omega [\mid h + u + u_\lambda \mid^{p+1} - \mid h +$

$+ u_\lambda \mid^{p+1}] = G_\lambda(u)$

poiché la funzione di due variabili

$$2x^p y - \frac{1}{p+1}[(x+y)^{p+1} - \mid x-y \mid^{p+1}]$$

è sempre negativa per $x, y \geq 0$.

E' possibile quindi scegliere una successione di cammini $p_n \in P$ costituiti da funzioni positive tale che

$$\lim_n \sup_{p_n} G_\lambda = \beta$$

Per il teorema 1.2.7 applicato a $\phi = G_\lambda$, $E = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{F} = P$, $C = \{0, u_1\}$, $c = \beta$, $B = \{G_\lambda \geq \beta\}$ e $A_n = p_n \in P$, poiché chiaramente G'_λ è uniformemente continuo sulle successioni critiche al livello c, è possibile affermare l'esistenza di una successione Palais-Smale $\{u_m\}$ per G_λ di funzioni positive al livello $\beta < \frac{1}{n}\lambda^{-\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}}$.

Quindi per la proposizione (1.2.4), la successione $\{u_m\}$ è precompatta, ossia esistono insieme di indici $\{m_k\}$ e $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} u_{m_k} = \bar{u}$$

Poiché G_λ è un funzionale C^1, otteniamo

$$G_\lambda(\bar{u}) = \beta$$

$$DG_\lambda(\bar{u}) = 0$$

ove $\bar{u}$ è una funzione positiva non identicamente nulla.

Quindi $\bar{u} + u_\lambda$ è una soluzione strettamente positiva distinta da u_λ di (1.2) .

Capitolo 2

Metodo perturbativo

2.1 Abstract setting

In teoria dei punti critici sono frequenti problemi di natura perturbativa. In letteratura si trovano diversi esempi in tal senso e molteplici metodi per la risoluzione, ognuno volto a sfruttare la natura perturbativa specifica del problema.

Richiamiamo a titolo di esempio la tesi di dottorato di Bahri [21], i lavori di Bahri e Berestycki [20], Marino e Prodi [33], di Ambrosetti, Coti Zelati ed Ekeland [24], i recenti articoli di Ambrosetti in collaborazione con diversi autori [15], [16], [23], [34], [35], il lavoro di Berti e Bolle [36].

Faremo riferimento al metodo usato in [15], ove si parte da un funzionale che ammette una varietà di punti critici d-dimensionale ad energia fissata, si perturba il funzionale iniziale con un ulteriore termine piccolo in ϵ e si costruisce una varietà vicina alla varietà di partenza, detta vincolo naturale, con la proprietà che ogni punto critico vincolato del funzionale perturbato lungo la varietà perturbata sia anche un punto critico libero.

Per tale costruzione si usa in modo opportuno il teorema della funzione implicita sfruttando in modo essenziale una condizione di non degenerazione del problema, ossia si suppone che il nucleo della derivata seconda in un punto z del funzionale non perturbato coincida con lo spazio tangente in z alla varietà critica.

Si effettua in tal modo una riduzione finito-dimensionale del problema di partenza e diventa sufficiente studiare il funzionale perturbato lungo un'opportuna varietà di dimensione finita.

Utilizzeremo un approccio simile a quello sopra descritto con la differenza essenziale che nel nostro caso il problema limite ammetterà una varietà di punti non critici ma quasi critici, nel senso che ora gli andremo a dare.

Richiamiamo in tale contesto l'articolo di Berti e Bolle [36].

Sia $G_0 \in C^2(H_0^1(\Omega), R)$ e sia Z una varietà con le seguenti proprietà:

a1) dimZ=n+1

a2) Z è rappresentabile mediante una sola carta locale ossia esiste

$$\varphi : \bar{A} \times [L_0, +\infty) \to H_0^1(\Omega)$$

applicazione regolare tale che

$$Z = \varphi(A \times (L_0, +\infty))$$

ove $A \subseteq R^n$ aperto limitato

a3) $\|\varphi(x,\lambda)\| \to_{\lambda\to+\infty} \sigma$ unif. per $x \in \bar{A}$

a4) $\|\nabla G_0(\varphi(x,\lambda))\| \to_{\lambda\to+\infty} 0$ unif. per $x \in \bar{A}$

a5) $\|D^2 G_0(\varphi(x,\lambda))\| \leq cost.\ \forall x \in \bar{A}$ e $\lambda \geq L_0$

a6) $G(\epsilon) \in C^2(H_0^1(\Omega), R)$ tale che $G(\epsilon)(u)$ sia continuo al variare di (ϵ, u),

$G(0)(u) = 0\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$ e $\|\nabla G(\epsilon)\| = o_\epsilon(1)$ uniformemente sui limitati di $H_0^1(\Omega)$

Se poniamo $G_\epsilon = G_0 + G(\epsilon)$,

$E_{x,\lambda} := \{v \in H_0^1(\Omega) :< v, \varphi(x,\lambda) >=< v, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,\lambda) >= \ < v, \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(x,\lambda) >= 0\ \forall i = 1,...,n\}$

e $\pi : (H_0^1(\Omega))' \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ l'identificazione canonica tra il duale di uno spazio di Hilbert e lo spazio stesso, possiamo allora definire

$$A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) = \pi[D^2 G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)(v,\cdot)]$$

$$R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) = G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v) - G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)) - DG_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))[v] - \frac{1}{2}D^2 G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))[v,v]$$

Supporremo che esistano ϵ_0 e δ_0 tali che

a7) $A_{0,x,\lambda,\alpha} \in Iso(E_{x,\lambda})\ \forall x \in \bar{A}, \lambda \geq L_0, \alpha \in [1-\delta_0, 1+\delta_0]$

a8) $\inf_{x\in\bar{A},\lambda\geq L_0,\alpha\in[1-\delta_0,1+\delta_0]} d(A_{0,x,\lambda,\alpha}, \partial Iso(E_{x,\lambda})) = \eta > 0$

a9) $\mid D^2 G(\epsilon)(\alpha\varphi(x,\lambda))(v,k) \mid = o_\epsilon(1)\|v\|\|k\|$ per $\epsilon \leq \epsilon_0$

uniformemente per $x \in \bar{A}, \lambda \geq L_0, \alpha \in [1-\delta_0, 1+\delta_0]$

a10) $R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) = o(\|v\|^2), \frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})(v) = o(\|v\|), \frac{\partial^2}{\partial v^2}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})(v) = o(1)$

uniformemente in $\epsilon \leq \epsilon_0, x \in \bar{A}, \lambda \geq L_0, \alpha \in [1-\delta_0, 1+\delta_0]$

Teorema 2.1.1 *Supponiamo di prendere $G_0, G(\epsilon), Z$ che verificano le proprietà a1,..., a10, allora esistono $\bar{\epsilon} \leq \epsilon_0$, $\bar{L} \geq L_0$, $\bar{\delta} \leq \delta_0$ ed applicazione*

$$v \in C^1([0,\bar{\epsilon}] \times [\bar{L}, +\infty) \times [1-\bar{\delta}, 1+\bar{\delta}], E_{x,\lambda})$$

tali che

$$\frac{\partial}{\partial v}(G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v) \mid_{v \in E_{x,\lambda}})(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = 0$$

$$\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0, \lambda\rightarrow+\infty, \alpha\rightarrow 1} 0$$

uniformemente in $x \in \bar{A}$.

Dimostrazione Sviluppiamo $G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v)$ in $v=0$ ottenendo

$$G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v) = G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)) + DG_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))[v] + \tfrac{1}{2}D^2G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)[v,v] +$$

$$+R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) = G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)) + < G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, v > + \frac{1}{2} < A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}v, v > + R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) \quad (2.1)$$

ove $G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = \pi[DG_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))(\cdot)]$.

Vorremmo trovare $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ tale che

$0 = \frac{\partial}{\partial v}(G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v) \mid_{v\in E_{x,\lambda}})(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = f_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} +$

$+\frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) \mid_{E_{x,\lambda}})(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})$

ove abbiamo posto

$$g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}}$$

Consideriamo l'applicazione $H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} : E_{x,\lambda} \times E_{x,\lambda} \rightarrow E_{x,\lambda}$

$$(g, v) \rightarrow g + A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}v + \frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v)$$

Chiaramente $H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ è un'applicazione C^1 poiché $G_\epsilon \in C^2(H_0^1(\Omega), R)$ tale che

- $H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(0,0) = 0$ poiché $A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(0) = \pi[D^2G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))(0,\cdot)] = 0$ e

$\frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(0) = [DG_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))(\cdot) - DG_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda))(\cdot) -$

$- D^2G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)(0,\cdot)] \mid_{E_{x,\lambda}} = 0$

- $\frac{\partial}{\partial v}H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(g,v) = A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v)$ poiché $A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ è lineare.

Per a7,a8 abbiamo che

$$B_\eta(A_{0,x,\lambda,\alpha}) \subseteq Iso(E_{x,\lambda})$$

Se $\|v\|$ è piccola per a10

$$\|\frac{\partial^2}{\partial v^2}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v)\| < \frac{\eta}{2}$$

e per a9 se ϵ è piccolo

$$\sup_{\|v\|=\|k\|=1} \mid D^2G(\epsilon)(\alpha\varphi(x,\lambda))(v,k) \mid = o_\epsilon(1) < \frac{\eta}{2}$$

Quindi

$$\|\frac{\partial H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial v}(g,v) - A_{0,x,\lambda,\alpha}\| = \|\pi[D^2G(\epsilon)(\alpha\varphi(x,\lambda)(\cdot,\cdot)] + \frac{\partial^2}{\partial v^2}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v)\| < \eta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial v}(g,v) \in Iso(E_{x,\lambda}) \tag{2.2}$$

per $\|v\|$ e ϵ piccolo.

Per il teorema della funzione implicita applicato a $H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ possiamo dire che esiste un unico ramo C^1 di zeri $(g, v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(g))$ uscente da $(0,0)$.

Inoltre se (g,v) è uno zero di $H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$, allora

$$g + A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}v + \frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v) = 0 \Rightarrow v = -(A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})^{-1}[g + \frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v)]$$

ove tale scrittura ha senso poiché per ϵ piccolo $A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \in E_{x,\lambda}$.

Chiaramente per ϵ piccolo

$$\|A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| \geq \psi > 0$$

Se per assurdo così non fosse, allora esisterebbe una successione di $\epsilon_n \to 0$,

$\lambda_n \geq L_0, x_n \in \bar{A}, \alpha_n \in [1-\delta_0, 1+\delta_0]$ tale che

$$A_{\epsilon_n,x_n,\lambda_n,\alpha_n} \to 0 \in \partial Iso(E_{x_n,\lambda_n})$$

allora $d(A_{0,x_n,\lambda_n,\alpha_n}, \partial Iso(E_{x_n,\lambda_n})) \leq d(A_{0,x_n,\lambda_n,\alpha_n}, A_{\epsilon_n,x_n,\lambda_n,\alpha_n}) + d(A_{\epsilon_n,x_n,\lambda_n,\alpha_n},$

$, \partial Iso(E_{x_n,\lambda_n})) \to 0$

contraddicendo a8.

Quindi per ϵ piccolo e per (g, v) che soddisfa $H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(g, v) = 0$

$$\|v\| \leq \frac{1}{\psi}[\|g\| + \|\frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \mid_{E_{x,\lambda}})(v)\|] \ \Rightarrow$$

$$\|v\| \leq cost.\|g\| \tag{2.3}$$

per $\|v\|$ sufficientemente piccolo grazie ad a10.

Se consideriamo un intorno di $g = 0$ tale che $\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(g)\|$ sia sufficientemente piccola da verificare (2.2) e (2.3), ove tale scelta può chiaramente essere fatta uniformemente in $\epsilon, x, \lambda, \alpha$, ha senso definire $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})$ poiché

$\|g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| \leq \|(\nabla G_\epsilon)(\alpha\varphi(x,\lambda))\| = \|\frac{\partial}{\partial v}(R_{\epsilon,x,\lambda,1})((\alpha-1)\varphi(x,\lambda)) + (\nabla G_\epsilon)(\varphi(x,\lambda))+$

$+\pi\{D^2 G_\epsilon(\varphi(x,\lambda))[(\alpha-1)\varphi(x,\lambda), \cdot]\}\| \leq o(\alpha-1) + \|\nabla G_0(\varphi(x,\lambda)\|+$

$+\|\nabla G(\epsilon)(\varphi(x,\lambda))\| + \|\pi\{D^2 G_0(\varphi(x,\lambda))[(\alpha-1)\varphi(x,\lambda), \cdot]\}\|+$

$+\|\pi\{D^2G(\epsilon)(\varphi(x,\lambda))[(\alpha-1)\varphi(x,\lambda),\cdot]\}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$

uniformemente per $x \in \bar{A}$ per a3,a4,a5,a6,a9 e a10.

Abbiamo quindi costruito $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ tale che

$$\frac{\partial}{\partial v}(G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v)\mid_{E_{x,\lambda}})(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = 0$$

$$\| v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \| = O(\| g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \|) \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$$

uniformemente in $x \in \bar{A}$.

Vogliamo ora considerare delle ulteriori proprietà della varietà Z in modo tale che abbia senso considerare la varietà

$$Z_{\epsilon,L,\delta} := \{\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} : x \in A, \lambda > L, \alpha \in (1-\delta, 1+\delta)\}$$

per ϵ, δ piccoli e per L grande.

Chiameremo tali proprietà:

a11) $\forall x, x' \in \bar{A},\ \forall \lambda, \lambda' > L_0,\ \forall \alpha > 0$ abbiamo che

se $\varphi(x,\lambda) = \alpha\varphi(x',\lambda') \ \Rightarrow\ \alpha = 1, x = x', \lambda = \lambda'$

a12) $\varphi(x,\lambda) \rightharpoonup_{x\to\bar{x},\lambda\to+\infty} 0$ per $x \in A$ e $\bar{x} \in \bar{A}$

a13) $\exists \eta$ piccolo tale che $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ con $\|u\| = \sigma$ e $\inf_{\lambda>\eta^{-1}} \|u - \varphi(x,\lambda)\| < \eta$, allora u si scrive in modo unico come

$$u = \alpha\varphi(x,\lambda) + v$$

ove $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2), \lambda > (4\eta)^{-1}$ e $v \in E_{x,\lambda}$

Dimostriamo ora due lemmi puramente tecnici che daranno consistenza alla costruzione che stiamo facendo.

Lemma 2.1.2 *Supponiamo di avere una varietà Z che verifichi a1,a2,a3,a11,a12, allora*

$$Z_{L,\delta} := \{\alpha\varphi(x,\lambda) : x \in A, \lambda > L, \alpha \in (1-\delta, 1+\delta)\}$$

è una varietà (n+2)-dimensionale per $L \geq L_0$ *e* $\delta < \frac{1}{2}$.

Dimostrazione Sia $\psi : A \times (L, +\infty) \times (1-\delta, 1+\delta) \to H_0^1(\Omega)$

$$(x, \lambda, \alpha) \;\; \to \;\; \alpha\varphi(x,\lambda)$$

Chiaramente ψ è continua, per a11 iniettiva e suriettiva sull'immagine con inversa ψ^{-1} continua.

Supponiamo infatti che

$$\alpha_n\varphi(x_n, \lambda_n) = \alpha\varphi(x,\lambda) + o(1) \tag{2.4}$$

Modulo sottosuccessioni possiamo supporre inoltre che $x_n \to \bar{x} \in \bar{A}$ e

$\alpha_n \to \bar{\alpha} \geq 1 - \delta$.

Se per assurdo $\lambda_n \to +\infty$, moltiplichiamo (2.4) scalarmente per $\varphi(x_n, \lambda_n)$ ottenendo grazie a a3,a12

$$0 < c_1 \leq \alpha_n \|\varphi(x_n, \lambda_n)\|^2 = o(1) \;\; \Rightarrow \;\; \text{assurdo}$$

Quindi, modulo sempre sottosuccessioni, possiamo dire che $\lambda_n \to \bar{\lambda} \geq L$.

Passando al limite con $n \to +\infty$ la relazione (2.4), otteniamo

$$\alpha\varphi(x, \lambda) = \bar{\alpha}\varphi(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

e quindi per a11

$$(x_n, \lambda_n, \alpha_n) \to (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (x, \lambda, \alpha)$$

ossia ψ^{-1} è continua.

Lemma 2.1.3 *Supponiamo di avere una varietà Z che verifichi a1,a2,a3,a11,a12,a13 e un applicazione* $\forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$

$$v_\epsilon \in C(\bar{A} \times [L, +\infty) \times [1 - \delta, 1 + \delta], H_0^1(\Omega))$$

con $\bar{\epsilon} \leq \epsilon_0$, $\bar{L} \geq L_0$ *e* $\bar{\delta} \leq \delta_0$, *che a* (x, λ, α) *associa* $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} \in E_{x,\lambda}$ *con la proprietà*

$$\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$$

uniformemente per $x \in \bar{A}$. *Allora*

$$Z_{\epsilon,L,\delta} = \{\alpha\varphi(x, \lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} : x \in A, \lambda > L, \alpha \in (1 - \delta, 1 + \delta)\}$$

è una varietà (n+2)-dimensionale per ϵ,δ *piccoli e L grande.*

Dimostrazione Sia $h : A \times (L, +\infty) \times (1 - \delta, 1 + \delta) \to H_0^1(\Omega)$

$$(x, \lambda, \alpha) \to \alpha\varphi(x, \lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$$

Vogliamo far vedere che h è iniettiva.

Supponiamo che $u_1 = \alpha_1\varphi(x_1, \lambda_1) + v_{\epsilon,x_1,\lambda_1,\alpha_1}$ e $u_2 = \alpha_2\varphi(x_2, \lambda_2) + v_{\epsilon,x_2,\lambda_2,\alpha_2}$ siano uguali ossia $u_1 = u_2 = u$.

Consideriamo $\sigma\frac{u}{\|u\|}$ elemento di norma esattamente σ tale che, ad esempio:

$\|\sigma\frac{u}{\|u\|} - \varphi(x_1, \lambda_1)\| \leq \sigma\frac{\|v_{\epsilon,x_1,\lambda_1,\alpha_1}\|}{\|\alpha_1\varphi(x_1,\lambda_1)+v_{\epsilon,x_1,\lambda_1,\alpha_1}\|} + \|\varphi(x_1, \lambda_1)\|\cdot$

$\cdot \mid \frac{\sigma\alpha_1}{\|\alpha_1\varphi(x_1,\lambda_1)+v_{\epsilon,x_1,\lambda_1,\alpha_1}\|} - 1 \mid< \eta$

indipendentemente da x_1, x_2 per ϵ,δ piccoli e L grande.

Per a13 abbiamo che $\sigma\frac{u}{\|u\|}$ si scrive in modo unico della forma $\bar{\alpha}\varphi(\bar{x}, \bar{\lambda}) + \bar{v}$ ove $\bar{\alpha} \in (\frac{1}{2}, 2), \bar{\lambda} > (4\eta)^{-1}, \bar{v} \in E_{\bar{x},\bar{\lambda}}$.

Abbiamo che

$$\frac{\sigma\alpha}{\|\alpha\varphi(x, \lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|} \in (\frac{1}{2}, 2)$$

per ϵ,δ piccoli e L grande uniformemente in (x, λ, α).

Quindi per unicità di scrittura

$$\bar{\alpha} = \sigma\frac{\alpha_1}{\|u\|} = \sigma\frac{\alpha_2}{\|u\|}$$

allora $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\bar{x} = x_1 = x_2$,$\bar{\lambda} = \lambda_1 = \lambda_2$.

Quindi h è iniettiva.

Inoltre h è chiaramente continua, suriettiva sull'immagine con inversa h^{-1} anch'essa continua.

Supponiamo infatti di avere

$$\alpha_n \varphi(x_n, \lambda_n) + v_{\epsilon, x_n, \lambda_n, \alpha_n} = \alpha \varphi(x, \lambda) + v_{\epsilon, x, \lambda, \alpha} + o(1) \tag{2.5}$$

Modulo sottosuccessioni avremo $\alpha_n \to \bar{\alpha}$ e $x_n \to \bar{x} \in \bar{A}$.

Se per assurdo $\lambda_n \to +\infty$, moltiplicarndo scalarmente (2.5) per $\varphi(x_n, \lambda_n)$ ed usando il fatto che $v_{\epsilon, x_n, \lambda_n, \alpha_n} \in E_{x_n, \lambda_n}$, si giungerebbe a

$$\alpha_n \|\varphi(x_n, \lambda_n)\|^2 = o(1)$$

la qual cosa contraddice chiaramente a3.

Quindi $\lambda_n \to \bar{\lambda}$.

Passando al limite con $n \to +\infty$ in (2.5) otteniamo

$$\bar{\alpha} \varphi(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \alpha \varphi(x, \lambda)$$

che implica per a11

$$(x_n, \lambda_n, \alpha_n) \to (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}) = (x, \lambda, \alpha)$$

Quindi h^{-1} è continua.

Per poter dimostrare che $Z_{\epsilon, L, \delta}$ è un vincolo naturale dovremo fare ulteriori ipotesi sul problema perturbativo che consideriamo.

Vogliamo ora costruire una base ortonormale dello spazio tangente a $Z_{L,\delta}$ in αz

$$T_{\alpha z} Z_{L,\delta} = < z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, .., \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} >$$

Definiamo, mediante procedimento di ortonormalizzazione di Graham-Schmidt

$$h_1(z) = \frac{\partial z}{\partial x_1} \quad q_1(z)\frac{h_1(z)}{\|h_1(z)\|}$$

e poi induttivamente $\forall i \leq n$

$$h_i(z) = \frac{\partial z}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{i-1} < \frac{\partial z}{\partial x_i}, q_j > q_j \quad q_i(z) = \frac{h_i(z)}{\|h_i(z)\|}$$

Infine

$$h_{n+1}(z) = \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \sum_{j=1}^{n} < \frac{\partial z}{\partial \lambda}, q_j > q_j \quad q_{n+1}(z) = \frac{h_{n+1}(z)}{\|h_{n+1}(z)\|}$$

$$h_{n+2}(z) = z - \sum_{j=1}^{n+1} < z, q_j > q_j \quad q_{n+2}(z) = \frac{h_{n+2}(z)}{\|h_{n+2}(z)\|}$$

Si vede facilmente che la base ortonormale $\{q_1(z), ..., q_{n+2}(z)\}$ dipende in modo regolare da z.

I due seguenti enunciati chiariranno le ulteriori proprietà da richiedere al problema perturbativo che vogliamo studiare con questo metodo.

Lemma 2.1.4 *Sia Z varietà che verifica a1,..,a13 e sia* $\{q_1, .., q_{n+2}\}$ *la base sopra definita.*

Supponiamo che:

b1) $\|\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} |_{E_{x,\lambda}} \| \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0,\lambda\rightarrow+\infty,\alpha\rightarrow 1} 0$, $\|\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} |_{E_{x,\lambda}} \| \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0,\lambda\rightarrow+\infty,\alpha\rightarrow 1} 0$,

$\|\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} |_{E_{x,\lambda}} \| \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0,\lambda\rightarrow+\infty,\alpha\rightarrow 1} 0 \quad \forall i = 1, .., n$

uniformemente per $x \in \bar{A}$

b2) $\|G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\| \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0,\lambda\rightarrow+\infty,\alpha\rightarrow 1} 0$ *e* $\|G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial q_j}{\partial \lambda}\| \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0,\lambda\rightarrow+\infty,\alpha\rightarrow 1} 0$

$\forall j = 1, .., n+2, i = 1, .., n$ *uniformemente per* $x \in \bar{A}$

Allora

$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0,\ \|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$ *e*

$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0 \quad \forall i = 1, .., n$

uniformemente per $x \in \bar{A}$

Dimostrazione Consideriamo ad esempio la derivata rispetto a x_i di

$v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})$.

$\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} = \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial g}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})\frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} = -[\frac{\partial H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial v}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})]^{-1}\cdot$

$\cdot[\frac{\partial H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial g}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})]\frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} = -[\frac{\partial H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial v}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})]^{-1}\frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}$

Però

$\|\frac{\partial H_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial v}(g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})\| = \|A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}(R_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\mid_{E_{x,\lambda}})(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})\| \geq \|A_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| +$

$+o(1) \geq cost. > 0$

poiché $\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$ e per a10.

Quindi

$$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| = O(\|\frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|)$$

Ricordiamo però che

$$g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} - \sum_{j=1}^{n+2} < G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, q_j > q_j$$

e quindi derivando in x_i otteniamo

$\|\frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| = \|P_{E_{x,\lambda}}(\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}) + \sum_{j=1}^{n+2} < G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}, \frac{\partial q_j}{\partial x_i} > q_j + \sum_{j=1}^{n+2} < G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha},$

$, q_j > \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\| \leq \|\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\mid_{E_{x,\lambda}}\| + 2\sum_{j=1}^{n+2}\|G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$

unif. per $x \in \bar{A}$, ove abbiamo usato b1,b2.

Allora

$$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| \to_{\epsilon\to 0,\lambda\to+\infty,\alpha\to 1} 0$$

unif. per $x \in \bar{A}$.

Analogamente per le altre derivate.

Proposizione 2.1.5 *Sia Z che verifichi a1,..,a13 e consideriamo un problema di tipo perturbativo che verifichi b1,b2.*

Se inoltre Z e $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ soddisfano per $\epsilon \to 0$,$\lambda \to +\infty$,$\alpha \to 1$ uniformemente per $x \in \bar{A}$ le seguenti stime

c1) $< z, \frac{\partial z}{\partial x_i} >= o(\min(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2, 1))$ $\forall i = 1, .., n$ *e* $< z, \frac{\partial z}{\partial \lambda} >= o(\min(\|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|^2, 1))$

c2) $\max(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|, \|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|)\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha}\| = o(1)$, $\max(\|\frac{\partial z}{\partial x_j}\|, \|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|)\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| = o(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2)$ *e* $\max(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|, \|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|)\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda}\| = o(\|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|^2)$ $\forall i, j = 1, .., n$

c3) $< \frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} >= o(\min(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2, \|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|^2))$ *e* $< \frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial x_j} >= o(\|\frac{\partial z}{\partial x_j}\|^2)$ $\forall i, j = 1, ..n$ *con* $i \neq j$

Allora $Z_{\epsilon,L,\delta}$ per ϵ,δ piccoli e L grande è un vincolo naturale per G_ϵ ossia

$\alpha\varphi(x, \lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ è punto critico libero di G_ϵ $\Leftrightarrow$ $\alpha\varphi(x, \lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ è punto critico vincolato di G_ϵ lungo $Z_{\epsilon,L,\delta}$

Dimostrazione $\Leftarrow$) per costruzione abbiamo

$0 = \frac{\partial}{\partial v}(G_\epsilon(\alpha\varphi(x, \lambda) + v) |_{E_{x,\lambda}})(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = [\nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x, \lambda) + v)] |_{E_{x,\lambda}} (v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) =$

$= P_{E_{x,\lambda}}(\nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) \ \Rightarrow$

$$\nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) \in E_{x,\lambda}^{\perp} = T_{\alpha z} Z_{L,\delta} =< z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, .., \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} >$$

Quindi

$$\nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + a_{n+1}\frac{\partial z}{\partial \lambda} + a_{n+2} z \tag{2.6}$$

Se inoltre per ipotesi $\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ è un punto critico vincolato di G_ϵ lungo $Z_{\epsilon,L,\delta}$, allora

$\nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) \perp T_{\alpha z + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}} Z_{\epsilon,L,\delta} =< z + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha}, \alpha\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_1}, ..,$

$\alpha\frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_n}, \alpha\frac{\partial z}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} >$

Esplicitiamo in $n+2$ relazioni la precedente condizione di ortogonalità ed usando (2.6) otteniamo

1) $< \nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda) + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}), z + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} >= 0 \ \Rightarrow$

$\sum_{j=1}^{n} a_j < z, \frac{\partial z}{\partial x_j} > + a_{n+1} < z, \frac{\partial z}{\partial \lambda} > + a_{n+2}\|z\|^2 = -\sum_{j=1}^{n} a_j < \frac{\partial z}{\partial x_j},$

$\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} > - a_{n+1} < \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} > - a_{n+2} < z, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} >$

Dividiamo allora per $\|z\|^2$ e usando c1,c2 ed il fatto che

$$< z, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} >= \frac{\partial}{\partial \alpha}(< z, v_{\epsilon,x\lambda,\alpha} >) = 0$$

otteniamo

$$| a_{n+2} | \leq o(1)\|\underline{a}\|_1 \tag{2.7}$$

ove $\underline{a} = (a_1, .., a_{n+2})$, $\|\underline{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{n+2} | a_j |$ e $o(1) \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0, \lambda\rightarrow+\infty, \alpha\rightarrow 1} 0$ unif. per $x \in \bar{A}$ e per $\underline{a} \in R^{n+2}$.

2) $< \nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}), \alpha\frac{\partial z}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} >= 0 \Rightarrow$

$\alpha\sum_{j\neq i, j\leq n} a_j < \frac{\partial z}{\partial x_j}, \frac{\partial z}{\partial x_i} > +\alpha a_i \|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2 + \alpha a_{n+1} < \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial x_i} > +\alpha a_{n+2} < z, \frac{\partial z}{\partial x_i} >=$

$= -\sum_{j=1}^n a_j < \frac{\partial z}{\partial x_j}, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} > -a_{n+1} < \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} > -a_{n+2} < z, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} >$

Dividiamo allora per $\alpha\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2$ ed usando c1,c2,c3 ed il fatto che

$$< z, v_{\epsilon,x\lambda,\alpha} >= 0 \;\Rightarrow\; < z, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} >= - < \frac{\partial z}{\partial x_i}, v_{\epsilon,x\lambda,\alpha} >= 0$$

otteniamo $\forall i = 1,..,n$

$$| a_i | \leq o(1)\|\underline{a}\|_1 \tag{2.8}$$

3) $< \nabla G_\epsilon(\alpha\varphi(x,\lambda)+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}), \alpha\frac{\partial z}{\partial \lambda}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} >= 0 \Rightarrow$

$\alpha\sum_{j=1}^n a_j < \frac{\partial z}{\partial x_j}, \frac{\partial z}{\partial \lambda} > +\alpha a_{n+1}\|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|^2 + \alpha a_{n+2} < z, \frac{\partial z}{\partial \lambda} >= -\sum_{j=1}^n a_j < \frac{\partial z}{\partial x_j},$

$\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} > -a_{n+1} < \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} > -a_{n+2} < z, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} >$

Dividiamo allora per $\alpha\|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|^2$ ed usando c1,c2,c3 ed il fatto che

$$< z, v_{\epsilon,x\lambda,\alpha} >= 0 \;\Rightarrow\; < z, \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} >= - < \frac{\partial z}{\partial \lambda}, v_{\epsilon,x\lambda,\alpha} >= 0$$

otteniamo

$$| a_{n+1} | \leq o(1)\|\underline{a}\|_1 \tag{2.9}$$

Mettendo infine insieme (2.7),(2.8) e (2.9) abbiamo

$$\|\underline{a}\|_2 = (\sum_{j=1}^{n+2} a_j^2)^{\frac{1}{2}} \leq o(1)\|\underline{a}\|_1 \leq c_1 o(1)\|\underline{a}\|_2 < \|\underline{a}\|_2 \;\Rightarrow \underline{a} = \underline{0}$$

Quindi $\alpha\varphi(x,\lambda)+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ deve essere necessariamente anche un punto critico libero di G_ϵ poiché per ϵ,δ piccoli e L grande $c_1 o(1) < 1$ indipendentemente da $\underline{a}$.

$\Rightarrow$) ovvio.

2.2 Molteplicità per il problema di Brezis-Niremberg

Grazie al metodo descritto nel precedente paragrafo, è possibile riscrivere il risultato di Rey contenuto in [14] inquadrandolo in un contesto più generale.

Non entreremo nei dettagli, rinviando al prossimo paragrafo per ulteriori spiegazioni.

Considereremo per $n \geq 5$ il problema di trovare soluzioni positive di

$$-\triangle u = u^{\frac{n+2}{n-2}} + \epsilon u \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

studiando i punti critici di

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega v^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \mid v \mid^{p+1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Rey considerava il funzionale vincolato associato al problema mentre noi studieremo il funzionale libero J_ϵ.

Siano $x_0 \in \Omega$ punto critico di $H(x,x)$, $D = [n(n-2)]^{\frac{p+1}{p-1}} \int_{R^n} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+2}{2}}}$,
$E = [n(n-2)]^{\frac{2}{p-1}} \int_{R^n} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{n-2}}$, $F = \frac{n-2}{2}[n(n-2)]^{\frac{p+1}{p-1}} \int_{R^n} \frac{|z|^2-1}{(1+|z|^2)^{\frac{n+4}{2}}}$ e $r > 0$ tale che $B_{3r}(x_0) \subseteq \Omega$.

Sussistono allora i seguenti sviluppi $\forall x \in B_r(x_0)$, ϵ piccolo, λ grande e α vicino a 1:

$J_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = (\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^{p+1}}{p+1}) \int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} + (\alpha^{p+1} - \frac{\alpha^2}{2}) D \frac{H(x,x)}{\lambda^{n-2}} - \frac{\alpha^2}{2}\frac{\epsilon E}{\lambda^2} +$

$+ O(\frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2})$

$\frac{\partial}{\partial x_i}(J_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = (2\alpha^{p+1} - \alpha^2)\frac{D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} \cdot$

$\cdot \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{1}{3}}} \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid + \frac{\epsilon^2}{\lambda^{\frac{3}{2}}})$

$\frac{\partial}{\partial\lambda}(J_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))=\alpha^2\frac{\epsilon E}{\lambda^3}-[(\alpha^{p+1}-\alpha^2)\frac{n-2}{2}D+pF\alpha^{p+1}]\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}}+O(\frac{1}{\lambda^n}+$

$+\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}+\frac{\epsilon}{\lambda^2}\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+\frac{\epsilon^2}{\lambda^3})$

$\frac{\partial}{\partial\alpha}(J_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))=(\alpha-\alpha^p)\int_{R^n}U_{x,\lambda}^{p+1}+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon}{\lambda})$

Usando ripetutamente in modo opportuno il teorema della funzione implicita, si giunge a dimostrare il risultato di molteplicità di Rey come enunciato nel teorema 0.0.2 contenuto nell'introduzione.

2.3 Molteplicità per il problema di Dirichlet con dato al bordo strettamente positivo

In questo capitolo dimostreremo il seguente risultato.

Teorema 2.3.1 *Sia $\varphi\in C^1(\partial\Omega)>0$ e $x_0\in\Omega$ punto critico di*

$$K(x)=\frac{H(x,x)^{\frac{1}{2}}}{h(x)^{\frac{2pF}{(n-2)D}}}$$

ove $H(x,y)$ è la parte regolare della funzione di Green su Ω, h è l'estensione armonica di φ, $D=[n(n-2)]^{\frac{p+1}{p-1}}\int_{R^n}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{n+2}{2}}}$ e $F=\frac{n-2}{2}[n(n-2)]^{\frac{p+1}{p-1}}\int_{R^n}\frac{|z|^2-1}{(1+|z|^2)^{\frac{n+4}{2}}}$ sono costanti strettamente positive.

Per $n\geq 5$, il problema $-\triangle u=\tau u^p$ con dato al bordo $\epsilon\varphi$ per $0<\tau<\lambda(h)$ ammette *per ϵ piccolo almeno tante soluzioni positive quanti sono i punti critici non degeneri interni ad Ω di $K(x)$.*

Equivalentemente consideriamo la questione della molteplicità per il seguente problema: data $h \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ funzione armonica, trovare soluzioni positive di

$$-\triangle u = \tau(\epsilon h + u)^p \tag{2.10}$$

Se cerchiamo una soluzione di (2.10) della forma $u = \epsilon z$, il problema diventa equivalente a trovare z che soddisfi (1.2) per $\lambda = \epsilon^{p-1}\tau$, allora $u_\epsilon = \epsilon u_{\epsilon^{p-1}\tau}$ è soluzione di (2.10), minimale punto per punto fra tutte le soluzioni del problema e punto di minimo locale stretto di $E_\epsilon := E_{\epsilon h}$.

E' quindi chiaro il motivo per il quale prendiamo in (2.10) $\tau < \lambda(h)$.

Consideriamo $G_\epsilon := G_{\epsilon h}$ e u^ϵ punto di "mountain pass" di G_ϵ e supponiamo per semplicità che $\tau = 1$.

Studiamo il comportamento di u_ϵ e u^ϵ al tendere di ϵ a zero.

Osserviamo prima di tutto che $u_\epsilon \to 0$.

Infatti

$\|u_\epsilon\|^2 = \int_\Omega \mid \nabla u_\epsilon \mid^2 = \int_\Omega (\epsilon h + u_\epsilon)^p u_\epsilon = \epsilon^{p+1} \int_\Omega (h + u_{\epsilon^{p-1}\lambda})^p u_{\epsilon^{p-1}\lambda} \leq \epsilon^{p+1} \int_\Omega (h+$

$+u_\lambda)^p u_\lambda \to_{\epsilon \to 0} 0$

poiché dal punto (iii) del teorema 1.2.1 sappiamo che u_λ è crescente in λ punto per punto.

E' vero inoltre che $u^\epsilon \rightharpoonup 0$ debolmente ma non fortemente.

Procedendo come per (1.5), possiamo dire che esistono $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ e $z_0 > 0$ tali che

$$\forall z \geq z_0 \qquad \frac{1}{p+1}(\epsilon h + z)^{p+1} \leq z\theta(\epsilon h + z)^p$$

unif. in $\epsilon \leq 1$.

Quindi

$G_\epsilon(u^\epsilon) \geq \frac{1}{2}\|u^\epsilon\|^2 + o(1)\|u^\epsilon\| - \frac{1}{p+1}(\epsilon\|h\|_{\infty,\Omega} + z_0)^{p+1}\mu(\Omega) - \theta \int_{\{u^\epsilon + u_\epsilon \geq z_0\}}(u_\epsilon + u^\epsilon)(\epsilon h +$

$+ u_\epsilon + u^\epsilon)^p \geq (\frac{1}{2} - \theta)\|u^\epsilon\|^2 + o(1)\|u^\epsilon\| - c_1 \to_{\|u^\epsilon\| \to +\infty} +\infty$

Ma $G_\epsilon(u^\epsilon) < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} \;\Rightarrow\; \|u^\epsilon\| \leq cost.$

Modulo sottosuccessioni, possiamo supporre che $u^\epsilon \rightharpoonup u$ ove $u \geq 0$ come limite debole di funzioni ovunque positive.

Passando al limite con $\epsilon \to 0$ la relazione

$$-\triangle(u^\epsilon + u_\epsilon) = (\epsilon h + u^\epsilon + u_\epsilon)^p$$

otteniamo che u è soluzione debole positiva di

$$-\triangle u = u^p$$

Tale problema però su $\Omega \neq R^n$ ha come unica soluzione positiva la funzione $u = 0$.

Allora $u^\epsilon \rightharpoonup 0$.

Vogliamo ora far vedere che la convergenza non può essere forte.

Si può sempre supporre che esista il limite di $G_\epsilon(u^\epsilon)$ con $\epsilon \to 0$ e che

$$\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon(u^\epsilon) = \alpha \leq \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$$

Si può notare facilmente che u^ϵ è una successione di Palais-Smale al livello α per

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\ \nabla u\ |^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\ u\ |^{p+1}$$

Quindi, vedi [39],:

- se $\alpha < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} \ \Rightarrow\ u^\epsilon \to 0$

- se $\alpha = \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}} \ \Rightarrow\ u^\epsilon$ non tende fortemente a zero e $u^\epsilon = U_{x_\epsilon,\theta_\epsilon} + o_\epsilon(1)$ per opportuni $x_\epsilon \in \Omega$ e $\theta_\epsilon \to +\infty$.

In effetti non possono staccarsi più "spine" dalla successione u^ϵ poiché il livello energetico α ne consente la formazione di una soltanto e positiva.

Resta quindi da mostrare che u^ϵ non può tendere fortemente a zero.

Se cosi̇̀ non fosse dovremmo avere $\alpha = 0$.

Scegliamo u_1 tale che $G_\epsilon(u_1) < 0$ uniformemente in ϵ piccolo e consideriamo il "mountain pass" rispetto a tale u_1.

Abbiamo quindi

$$G_\epsilon(u^\epsilon) = \beta_\epsilon = \inf_{p\in P}\sup_{u\in p} G_\epsilon(u)$$

Ma

$G_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\ \nabla u\ |^2 + \int_\Omega(\epsilon h + u_\epsilon)^p u - \frac{1}{p+1}\int_\Omega[|\ \epsilon h + u + u_\epsilon\ |^{p+1} - (\epsilon h + u_\epsilon)^{p+1}] =$

$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\ \nabla u\ |^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\ u\ |^{p+1} + o_\epsilon(1)$

ove $o_\epsilon(1)$ è uniforme sui limitati di $H^1_0(\Omega)$.

Esiste quindi ϵ_0 e $R > 0$ tale che se $\|u\| = \delta$ e $\epsilon \le \epsilon_0$ allora $G_\epsilon(u) \ge R > 0$.

Quindi $\|u_1\| > \delta$ e

$$G_\epsilon(u^\epsilon) = \beta_\epsilon \geq R$$

se $\epsilon \leq \epsilon_0$. Allora $\alpha \geq R$.

Non si può avere dunque convergenza forte a zero.

Ha quindi senso aspettarsi che per ϵ piccolo, a causa di fenomeni di concentrazione, ci sia biforcazione di soluzioni a partire da opportune funzioni di $H_0^1(\Omega)$.

Considereremo, nello spirito del primo paragrafo del presente capitolo, lo studio, mediante tecniche di tipo perturbativo, dei punti critici di

$$G_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega [\mid u + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p+1} - (\epsilon h + u_\epsilon)^{p+1} - (p+1)(\epsilon h + u_\epsilon)^p u]$$

ove stiamo supponendo per semplicità che $\tau = 1$.

Sia $r > 0$ tale che $B_{3r}(x_0) \subseteq \Omega$ ove x_0 è punto critico non degenere interno ad Ω di $K(x)$.

Consideriamo il funzionale limite

$$G_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \mid u \mid^{p+1}$$

che ammette una varietà (n+1)-dimensionale di punti quasi critici

$$Z = \{PU_{x,\lambda} : x \in B_r(x_0), \lambda > L\}$$

Abbiamo quindi $A = B_r(x_0)$ aperto limitato di R^n e carta locale

$$\varphi : \overline{B_r(x_0)} \times [L, +\infty) \to H_0^1(\Omega)$$

che a (x, λ) associa $\varphi(x, \lambda) = PU_{x,\lambda}$.

Poniamo infine $G(\epsilon) = G_\epsilon - G_0$ e supporemo d'ora in poi $n \geq 5$.

Dobbiamo prima dimostrare alcuni risultati ausiliari che ci permetteranno di inquadrare il problema nel contesto astratto del primo paragrafo.

Proposizione 2.3.2 *Il problema perturbativo associato a G_ϵ con problema limite associato a G_0 e varietà critica limite Z verifica le proprietà a1,..,a13.*

In più, abbiamo la seguente stima:

$$\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| = O(\epsilon^p + \frac{\epsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) \tag{2.11}$$

Dimostrazione Poniamo $\psi_{x,\lambda} = U_{x,\lambda} - PU_{x,\lambda} > 0$.

Chiaramente a1 e a2 valgono mentre per a3

$$\int_\Omega \mid \nabla PU_{x,\lambda} \mid^2 = \int_\Omega U^p_{x,\lambda} PU_{x,\lambda} = \int_{R^n} U^{p+1}_{x,\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) \ \Rightarrow \ \|\varphi(x, \lambda)\| \to \sigma$$

uniformemente per $x \in \bar{A}$ con $\sigma = \int_{R^n} U^{p+1}_{x,\lambda}$.

Abbiamo usato (3.25),(3.26) e (3.27).

Per a4 invece

$\|\nabla G_0(\varphi(x, \lambda))\| = \sup_{\|k\|=1} \mid \int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda} \nabla k - \int_\Omega PU^p_{x,\lambda} k \mid = \sup_{\|k\|=1} \mid \int_\Omega (U^p_{x,\lambda} -$

$- PU^p_{x,\lambda}) k \mid \leq \|\psi_{x,\lambda}\|_\infty \|U_{x,\lambda}\|^{p-1}_{L^{\frac{(p-1)(p+1)}{p}}} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) \to_{\lambda \to +\infty} 0$

uniformemente per $x \in \bar{A}$.

Abbiamo usato $U^p_{x,\lambda} - PU^p_{x,\lambda} = O(U^{p-1}_{x,\lambda} \psi_{x,\lambda})$, (3.25) e (3.30).

Riguardo a a5

$$\|D^2G_0(\varphi(x,\lambda))\| = \sup_{\|l\|=\|k\|=1} \mid \int_\Omega \nabla l \nabla k - p\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1} lk \mid \leq cost.$$

uniformemente per $x \in \bar{A}$ e $\lambda \geq L$.

Per a6 invece ricordiamo l'espressione di $G(\epsilon)$

$$G(\epsilon) = -\frac{1}{p+1}\int_\Omega [\mid u+\epsilon h+u_\epsilon \mid^{p+1} - (\epsilon h+u_\epsilon)^{p+1} - (p+1)(\epsilon h+u_\epsilon)^p u - \mid u \mid^{p+1}]$$

Chiaramente $G(\epsilon)$ è continuo in (ϵ, u) e $G(0)(u) = 0$.

Inoltre

$\sup_{\|u\|\leq R} \|\nabla G(\epsilon)(u)\| = \sup_{\|u\|\leq R, \|k\|=1} \mid \int_\Omega [\mid u+\epsilon h+u_\epsilon \mid^{p-1} (u+\epsilon h+u_\epsilon) - (\epsilon h+u_\epsilon)^p -$

$- \mid u \mid^{p-1} u]k \mid \leq o_\epsilon(1) + p\sup_{\|u\|\leq R, \|k\|=1} \int_\Omega (\mid u \mid + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1} \mid k \mid (\epsilon h + u_\epsilon) = o_\epsilon(1).$

Per a7 e a8 andiamo a studiare $A_{0,x,\lambda,\alpha}$. E' vero che, vedi [14]

$$< A_{0,x,\lambda,\alpha}(v), v >= \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 - p\alpha^{p-1}\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1} v^2 \geq \rho\|v\|^2 \ \forall v \in E_{x,\lambda}$$

uniformemente per ϵ,δ piccoli e L grande, quindi sono vere sia a7 che a8.

Per a9

$\mid D^2G(\epsilon)(\alpha\varphi(x,\lambda)(v,k) \mid = p \mid \alpha^{p-1}\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1} vk - \int_\Omega (\alpha PU_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1} vk \mid =$

$= o_\epsilon(1)\|v\|\|k\|$

ove distingueremo il caso $p < 2$, per il quale useremo proprietà di hölderianità, e il caso $p \geq 2$, per il quale useremo invece il teorema di Lagrange.

Per a10 i conti sono pesanti ma ovvi, trattandosi infatti di mostrare essenzialmente l'uniformità delle stime.

Per tale motivo non ci dilunghiamo ulteriormente nella verifica.

Per a11 si usa l'uguaglianza $PU_{x,\lambda} = \alpha PU_{x',\lambda'}$, si passa ai laplaciani e si ottiene un'uguaglianza ovunque tra $U^p_{x,\lambda}$ e $\alpha U^p_{x',\lambda'}$, la quale ci fornisce in modo più o meno diretto il risultato cercato.

Per a12 osserviamo invece che, dalla limitatezza di $\|PU_{x,\lambda}\|$, discende che

$$PU_{x,\lambda} \rightharpoonup_{x\to\bar{x},\lambda\to+\infty} \bar{\psi}$$

Ma $0 < PU_{x,\lambda} < U_{x,\lambda} \to 0$ q.o., quindi $\bar{\psi} = 0$.

In ultimo a13 vale per motivi più generali, nei quali non entriamo in dettaglio, basta comunque far riferimento a [14] e [40].

Dobbiamo stimare infine in modo preciso la norma di $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$.

Consideriamo dapprima

$\|G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| = \sup_{\|v\|=1} \mid G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) \mid= \sup_{\|v\|=1} \mid \alpha \int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda}\nabla v - \int_\Omega(\alpha PU_{x,\lambda} + \epsilon h+$

$+u_\epsilon)^p v + \int_\Omega(\epsilon h + u_\epsilon)^p v \mid= O(\epsilon^p) + O(\sup_{\|v\|\le 1} \int_\Omega(PU_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1}(\epsilon h + u_\epsilon) \mid v \mid)+$

$+ \sup_{\|v\|=1} \mid \alpha \int_\Omega U^p_{x,\lambda} v - \alpha^p \int_\Omega PU^p_{x,\lambda} v \mid= O(\epsilon^p + \frac{\epsilon}{\lambda}) + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) + \alpha \sup_{\|v\|=1} \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid \cdot$

$\cdot \mid \int_\Omega U^p_{x,\lambda} v \mid= O(\epsilon^p + \frac{\epsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid)$

ove abbiamo usato (3.25) e (3.30).

Quindi

$\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| = O(\|g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|) = O(\sup_{v\in E_{x,\lambda},\|v\|=1} \mid G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}(v) \mid) = O(\epsilon^p + \frac{\epsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$

poiché

$$\int_\Omega U^p_{x,\lambda} v = \int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda}\nabla v = 0 \qquad \forall v \in E_{x,\lambda}$$

Ci servono adesso delle stime.

Lemma 2.3.3 *Data la varietà* $Z = \{PU_{x,\lambda} : x \in A, \lambda > L\}$ *e la base ortonormale* $\{q_1, .., q_{n+2}\}$, *come nel Lemma 1.2.3, si hanno le seguenti:*

1) $< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}, q_j >= O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})\ \forall i \leq n\ \forall j \leq i-1$

$< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda}, q_j >= O(\frac{1}{\lambda^{n}})\ \forall j \leq n$

$< PU_{x,\lambda}, q_j >= O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})\ \forall j \leq n+1$

2) $\|\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\| = O(\lambda)$ *e* $\|\frac{\partial q_i}{\partial \lambda}\| = O(\frac{1}{\lambda})\ \forall i = 1, .., n+2,\ \forall j = 1, .., n$

Dimostrazione Dimostriamo la prima di (1) per induzione forte su i:

- per $i = 1$ è ovvia

- vera per $j \leq i\ \Rightarrow$ se $i = n$ abbiamo finito mentre se $i < n$

$|< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_{i+1}}, q_j >| \leq \frac{O(\frac{1}{\lambda^{n-3}}) + \sum_{s \leq j-1} |< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j}, q_s >< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_{i+1}}, q_s >|}{\|\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j}\| - \sum_{s \leq j-1} |< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j}, q_s >|} \leq$
$\leq \frac{O(\frac{1}{\lambda^{n-3}}) + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) O(\lambda)}{c\lambda + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})} = O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) \qquad \forall j \leq i$

ove abbiamo usato l'ipotesi induttiva forte ,(3.40) e (3.41).

Analogamente possiamo dimostrare la seconda di (1), usando la prima di (1), l'induzione forte su j e (3.41),(3.42).

Otteniamo la terza di (1), dimostrando per induzione forte su j ed usando la prima e la seconda di (1) e (3.41),(3.43),(3.44).

Dimostriamo ora la prima di (2) per induzione forte su i, osservando preliminarmente che

$$\|\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\| = \|\frac{1}{\|h_i\|}\frac{\partial h_i}{\partial x_j} - \frac{h_i}{\|h_i\|^3} < h_i, \frac{\partial h_i}{\partial x_j} > \| = O(\frac{\|\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\|}{\|h_i\|})$$

Quindi:

- per $i = 1$

$$\|\frac{\partial q_1}{\partial x_j}\| = O(\frac{\|\frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial x_j \partial x_1}\|}{\|\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_1}\|}) \leq \frac{O(\lambda^2)}{c\lambda + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})} = O(\lambda)$$

grazie ad (3.41),(3.45)

- vera fino ad i, allora se $i + 1 \leq n$ abbiamo

$$\|\frac{\partial q_{i+1}}{\partial x_j}\| \leq O(\frac{\|\frac{\partial h_{i+1}}{\partial x_j}\|}{\|h_{i+1}\|}) \leq \frac{O(\lambda^2)}{c\lambda + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})} = O(\lambda)$$

per ipotesi induttiva, (3.41),(3.45) e punto (1);

se $i + 1 = n + 1$ allora

$$\|\frac{\partial q_{n+1}}{\partial x_j}\| \leq \frac{O(1)}{\frac{c}{\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})} = O(\lambda)$$

per ipotesi induttiva,(3.43),(3.46) e punto (1);

se $i + 1 = n + 2$ allora

$$\|\frac{\partial q_{n+2}}{\partial x_j}\| \leq \frac{O(\lambda)}{c + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})} = O(\lambda)$$

per ipotesi induttiva,(3.41), punto (1) e proprietà a3 di Z.

E' quindi vera (1) per induzione. Si procede analogamente per la seconda di (2).

Lemma 2.3.4 *Valgono le seguenti stime:*

$$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \epsilon + \lambda\epsilon^p + \lambda \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid)$$
$$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x\lambda,\alpha}}{\partial \lambda}\| = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}} + \frac{\epsilon}{\lambda^2} + \frac{\epsilon^{p-1}}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon^p}{\lambda} + \frac{\mid 1 - \alpha^{p-1} \mid}{\lambda})$$
$$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha}\| = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon}{\lambda}) \qquad (2.12)$$

Dimostrazione Ricordando la dimostrazione del Lemma 2.1.4, abbiamo che

$$\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| = O(\|\frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|) = O(\|\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} \mid_{E_{x,\lambda}} \| + \sum_{j=1}^{n+2} \|G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\| \|\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\|)$$

Consideriamo

$$\frac{\partial G_{\epsilon,x\lambda,\alpha}}{\partial x_i}(v) =< \frac{\partial G_{\epsilon,x\lambda,\alpha}}{\partial x_i}, v >= \alpha \int_\Omega \nabla(\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i})\nabla v - \alpha p \int_\Omega (\alpha PU_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1} \cdot$$

$\cdot \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} v$

Abbiamo quindi

$\|\frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} \mid_{E_{x,\lambda}} \| = \sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} \mid \alpha p \int_\Omega (\alpha PU_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1} \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} v \mid \leq$

$\leq \sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} \mid \alpha p \int_\Omega (\alpha PU_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} v \mid + O(\frac{\epsilon^{p-1}}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) \leq$

$\leq \sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} [\mid p \cdot \int_\Omega \alpha^p U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} v \mid + O(\int_\Omega (\alpha U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-2} \psi_{x,\lambda} \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid \cdot$

$\cdot \mid v \mid + \int_\Omega (\alpha U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-2} \cdot (\epsilon h + u_\epsilon) \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid)] + O(\frac{\epsilon^{p-1}}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$

ove ho usato (3.25),(3.30) e la formula $(x+y)^{p-1} - x^{p-1} = O((x+y)^{p-2} y)$ uniformemente per $x, y \geq 0$.

Distinguiamo due casi:

- $p \geq 2$

$\sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} O(\int_\Omega (\alpha U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-2} \psi_{x,\lambda} \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid + \int_\Omega (\alpha U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-2} \cdot$

$\cdot (\epsilon h + u_\epsilon) \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid) \leq O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \epsilon)$

- $p < 2$

$\sup_{v \in E_{x,\lambda}} O(\int_\Omega (\alpha U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-2} \psi_{x,\lambda} \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid + \int_\Omega (\alpha U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-2} \cdot$

$\cdot (\epsilon h + u_\epsilon) \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid) \leq \sup_{v \in E_{x,\lambda}} O(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-2} \psi_{x,\lambda} \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid + \int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-2} (\epsilon h +$

$+ u_\epsilon) \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v \mid) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \epsilon)$

grazie a $| \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} |= O(\lambda | U_{x,\lambda} |)$,(3.25),(3.30) e (3.31).

Quindi, ricordando che $\forall v \in E_{x,\lambda}$

$$p \int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} v = \frac{\partial}{\partial x_i} (\int_\Omega U_{x,\lambda}^p v) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\int_\Omega \nabla P U_{x,\lambda} \nabla v) =< \frac{\partial P U_{x,\lambda}}{\partial x_i}, v >= 0$$

otteniamo

$$\| \frac{\partial G_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} |_{E_{x,\lambda}} \| = O(\epsilon + \frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$$

Quindi infine

$$\| \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} \| = O(\epsilon + \frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \lambda \epsilon^p + \lambda | 1 - \alpha^{p-1} |)$$

Analogamente per $\| \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \lambda} \|$, usando il fatto che $p \int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda} v = 0 \ \forall v \in E_{x,\lambda}$,

la formula $(x+y)^{p-1} - x^{p-1} = O((x+y)^{p-2} y)$ uniformemente per $x, y \geq 0$,

$| \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda} |= O(\frac{1}{\lambda} U_{x,\lambda})$,(3.25),(3.30) e (3.31).

In ultimo

$\| \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} \| \leq O(\| \frac{\partial g_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha} \|) = O(\sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} | p \int_\Omega (\alpha P U_{x,\lambda} + \epsilon h + u_\epsilon)^{p-1} P U_{x,\lambda} v |) \leq$

$\leq O(\sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} | \int_\Omega P U_{x,\lambda}^p v |) + O(\frac{\epsilon}{\lambda}) = O(\sup_{v \in E_{x,\lambda}, \|v\|=1} | \int_\Omega U_{x,\lambda}^p v |) + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} +$

$+ \frac{\epsilon}{\lambda}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon}{\lambda})$

grazie a $(x+y)^{p-1} - x^{p-1} = O((x+y)^{p-2} y)$ e $(x+y)^p - x^p = O((x+y)^{p-1} y)$ unif. per $x, y \geq 0$,(3.25),(3.30) e (3.31).

Siamo ora interessati a sviluppare le derivate di $G_\epsilon(\alpha P U_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})$ rispetto a x, λ e α per cercare poi di costruire dei punti critici vincolati di tale funzionale lungo $Z_{\epsilon,L,\delta}$.

E' possibile ottenere

$G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}) = (\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^{p+1}}{p+1})\int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1}+(\alpha^{p+1}-\frac{\alpha^2}{2})D\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-2}}-\epsilon\alpha^p\frac{D}{[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\frac{h(x)}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+$
$+O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}+\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}+\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\epsilon^{p+1})$

Non dimostreremo tale relazione poiché in effetti non ci servirà ma questa fornisce un punto di partenza chiaro per il nostro successivo lavoro, dicendoci che cosa aspettarci da un possibile sviluppo delle derivate di $G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})$ rispetto a x, λ e α.

Ovviamente tali ragionamenti non hanno senso dal punto di vista puramente formale ma, se riuscissimo a dire che il termine di perturbazione non solo è piccolo in norma C^0 ma anche in norma C^1, allora saremmo in grado di fornire rigore a queste considerazioni.

La prossima proposizione viene a dare fondamento alla precedente osservazione.

Proposizione 2.3.5 *Abbiamo le seguenti stime:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})) = \frac{D}{\lambda^{n-2}}(2\alpha^{p+1}-\alpha^2)\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)-\frac{D}{[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\alpha^p\cdot \tag{2.13}$$

$\cdot\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)+O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}+\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon^2}{\lambda}+\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\epsilon^{p+1}+\lambda\epsilon^{2p}+\lambda\epsilon^p\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+\epsilon\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+$
$+\frac{|1-\alpha^{p-1}|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})) = -[\frac{n-2}{2}D(\alpha^{p+1}-\alpha^2)+pF\alpha^{p+1}]\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}}+ \tag{2.14}$$

$+\frac{n-2}{2}\alpha^p\frac{D}{[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\epsilon\frac{h(x)}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+O(\frac{1}{\lambda^n}+\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}+\frac{\epsilon^2}{\lambda^2}+\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon^{p+1}}{\lambda}+\epsilon^p\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+$

$+\frac{\epsilon}{\lambda} \mid 1-\alpha^{p-1} \mid + \frac{|1-\alpha^{p-1}|}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))=(\alpha-\alpha^p)\int_{R^n}U_{x,\lambda}^{p+1}+O(\frac{\epsilon}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\epsilon^p) \qquad (2.15)$$

Dimostrazione Dimostriamo prima di tutto (2.13)

$\frac{\partial}{\partial x_i}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))=\int_\Omega \nabla(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})\nabla(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})-$

$-\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon)(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})+$

$+\int_\Omega(\epsilon h+u_\epsilon)^p(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})$

Consideriamo il primo termine:

$\int_\Omega \nabla(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})\nabla(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})=\alpha^2\int_\Omega\nabla(PU_{x,\lambda})\nabla(\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i})+\alpha\cdot$

$\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda}\nabla v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})+O(\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|)=-\frac{D\alpha^2}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)+O(\frac{1}{\lambda^n}+\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\cdot$

$\cdot\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|)$ grazie a (3.44).

Il secondo termine per (3.50) mi fornisce

$\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon)(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})=$

$=-2\alpha^{p+1}\frac{D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)+\epsilon\alpha^p\frac{D}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)+O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}+\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon^2}{\lambda}+\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+$

$+\epsilon^{p+1}+\lambda\epsilon^{2p}+\lambda\epsilon^p \mid 1-\alpha^{p-1}\mid +\epsilon \mid 1-\alpha^{p-1} \mid + \frac{|1-\alpha^{p-1}|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$

Il terzo termine si stima facilmente:

$\int_\Omega(\epsilon h+u_\epsilon)^p(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})=O(\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\epsilon^p\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|)$

grazie a (3.33).

Abbiamo infine, grazie anche a (2.11) e (2.12), lo sviluppo completo di:

$\frac{\partial}{\partial x_i}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))=(2\alpha^{p+1}-\alpha^2)\frac{D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)-\alpha^p\frac{D}{[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)+$

$+O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}+\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon^2}{\lambda}+\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\epsilon^{p+1}+\lambda\epsilon^{2p}+\lambda\epsilon^p\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+\epsilon\mid 1-\alpha^{p-1}\mid+\frac{|1-\alpha^{p-1}|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$

Analogamente otteniamo (2.14) grazie alle relative formule in λ (3.44) e (3.51).

Infine abbiamo:

$\frac{\partial}{\partial\alpha}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})) = \int_\Omega \nabla(\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})\nabla(PU_{x,\lambda}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\alpha}) - \int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda}+$

$+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)(PU_{x,\lambda} + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\alpha}) + \int_\Omega(\epsilon h+$

$+u_\epsilon)^p(PU_{x,\lambda} + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\alpha}) = (\alpha-\alpha^p)\int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}} + \|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\alpha}\| + \frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+$

$+\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\alpha}\|) + O(\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda}+ \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid\mid^{p-1}\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid PU_{x,\lambda}) =$

$= (\alpha-\alpha^p)\int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon}{\lambda} + \epsilon^p)$

grazie alla relazione $\mid\mid x+y\mid^{p-1}(x+y) - x^p \mid = O((x+\mid y\mid)^{p-1}\mid y\mid$

unif. per $x \geq 0$ e $y \in R$,(2.11),(2.12),(3.26),(3.31),(3.36),(3.37) e (3.38).

Abbiamo messo a punto finalmente tutti gli strumenti per poter dimostrare il teorema (2.3.1).

Dimostrazione (Teorema 2.3.1)

La dimostrazione consiste di tre passi successivi. Supponiamo come sempre dall'inizio di questo paragrafo che per semplicità $\tau = 1$.

Passo 1) Consideriamo x_0 punto critico interno non degenere di $K(x)$ e $r > 0$ tale che $B_{3r}(x_0) \subseteq \Omega$.

In conseguenza del teorema 2.1.1, del lemma 2.1.3 e della proposizione 2.3.2, possiamo scegliere ϵ_1, δ_1 piccoli e L_1 grande tali che $\forall\epsilon \leq \epsilon_1, \delta \leq \delta_1$ e $L \geq L_1$ abbia senso considerare $v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}$ per $(x,\lambda,\alpha) \in \bar{B_r}(x_0) \times [L,+\infty) \times [1-\delta, 1+\delta]$ e $Z_{\epsilon,L,\delta}$ sia una varietà.

Vogliamo ora costruire a partire da (2.13),(2.14) e (2.15) dei punti critici di G_ϵ lungo $Z_{\epsilon,L,\delta}$ per ϵ,δ piccoli e L grande.

Poniamo

$$\lambda^\epsilon = \left(\frac{2pF[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}H(x_0,x_0)}{(n-2)Dh(x_0)}\right)^{\frac{2}{n-2}}\epsilon^{-\frac{2}{n-2}} = [n(n-2)]^{\frac{1}{2}}C(x_0)^{\frac{2}{n-2}}\epsilon^{-\frac{2}{n-2}}$$

Consideriamo dapprima $\theta : [1-\delta_1, 1+\delta_1] \times [0,\epsilon_1] \times \overline{B_r(x_0)} \times [\frac{1}{2},\frac{3}{2}] \to R$ che a (α,ϵ,x,z) associa $\frac{\partial}{\partial\alpha}[G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha})] \mid_{\lambda=\lambda^\epsilon z}$

Usando (2.15) otteniamo facilmente che

$$\theta(\alpha,\epsilon,x,z) = (\alpha-\alpha^p)\int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\epsilon^{\frac{n}{n-2}})$$

da cui discende

- $\theta(1,0,x_0,1) = 0$

-$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(1,0,x_0,1) = -(p-1)\int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} \neq 0$

Per il teorema delle funzioni implicite esistono $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$, $r_2 \leq r$, $\eta \leq \frac{1}{2}$ e un'applicazione regolare $\alpha : [0,\epsilon_2] \times \overline{B_{r_2}(x_0)} \times [1-\eta, 1+\eta] \to R$ tale che $(\alpha(\epsilon,x,z),\epsilon,x,z)$ siano tutti e soli gli zeri di θ in un intorno di $(1,0,x_0,1)$.

Da adesso in poi poniamo $\alpha = \alpha(\epsilon,x,z)$ e dal fatto che

$$(\alpha-\alpha^p)\int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} = O(\epsilon^{\frac{n}{n-2}})$$

discende

$$\mid 1-\alpha^{p-1} \mid = O(\epsilon^{\frac{n}{n-2}}) \tag{2.16}$$

Consideriamo adesso $\rho : [0, \epsilon_2] \times \overline{B_{r_2}(x_0)} \times [1-\eta, 1+\eta] \to R$ che a (ϵ, x, z) associa

$[-\frac{\lambda^{n-1}}{pF} \frac{\partial}{\partial \lambda}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))] \mid_{\lambda=\lambda^\epsilon z, \alpha=\alpha(\epsilon,x,z)}$

Osserviamo che per (2.14) e (2.16) abbiamo che

$$\rho(\epsilon, x, z) = H(x, x) - z^{\frac{n-2}{2}} \frac{H(x_0, x_0)}{h(x_0)} h(x) + o_\epsilon(1)$$

da cui discende che

- $\rho(0, x_0, 1) = H(x_0, x_0) - \frac{H(x_0,x_0)}{h(x_0)} h(x_0) = 0$

- $\frac{\partial \rho}{\partial z}(0, x_0, 1) = -\frac{n-2}{2} H(x_0, x_0) \neq 0$

Per il teorema delle funzioni implicite sappiamo che esistono $\epsilon_3 \leq \epsilon_2$, $r_3 \leq r_2$ e un'applicazione regolare $z : [0, \epsilon_3] \times \overline{B_{r_3}(x_0)} \to [1-\eta, 1+\eta] \subseteq R$ tale che $(\epsilon, x, z(\epsilon, x))$ siano tutti e soli gli zeri di ρ in un intorno di $(0, x_0, 1)$.

Infine definiamo $\xi : [0, \epsilon_3] \times \overline{B_{r_3}(x_0)} \to R^n$ che a (ϵ, x) associa $[\{[\frac{\lambda^{n-2}}{D} \frac{\partial}{\partial x_i}(G_\epsilon(\alpha PU_{x,\lambda} +$
$+ v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}))] \mid_{\lambda=\lambda^\epsilon z(\epsilon,x), \alpha=\alpha(\epsilon,x,z(\epsilon,x))}\}_{i=1,..,n}]$

Osserviamo che derivando K in x_i e ponendo $C = \frac{2pF}{(n-2)D}$ si ottiene

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}(x) h(x) - C \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) H(x,x)}{H(x,x)^{\frac{1}{2}} h(x)^{C+1}}$$

Quindi

x_0 è punto critico di $K(x) \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x_i}(x_0, x_0) - C(x_0) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, .., n$

Da (2.13),(2.16) otteniamo

$$(\xi(\epsilon, x))_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}(x, x) - C(x_0) z(\epsilon, x)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) + o_\epsilon(1)$$

Osserviamo che $z(0,x)$ è tale che

$$H(x,x) - z(0,x)^{\frac{n-2}{2}} \frac{H(x_0,x_0)}{h(x_0)} h(x) = 0$$

allora

$$z(0,x)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{h(x_0)}{H(x_0,x_0)} \frac{H(x,x)}{h(x)}$$

da cui discende immediatamente $\xi(0,x_0) = 0$.

Invece più laboriosi sono i conti per mostrare che $\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,x_0) \in Gl_n(R)$.

Abbiamo infatti

$(\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,x_0))_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) - C(x_0)\frac{h(x_0)}{H(x_0,x_0)}\frac{H(x,x)}{h(x)}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)](x_0) = 2\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,x_0) -$

$-C(x_0)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) - C(x_0)\frac{h(x_0)}{H(x_0,x_0)}[\frac{2}{h(x_0)}\frac{\partial H}{\partial x_j}(x_0,x_0) - \frac{H(x_0,x_0)}{(h(x_0))^2}\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_0)]\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) =$

$= 2\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,x_0) - C(x_0)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) - 2\frac{C(x_0)}{H(x_0,x_0)}\frac{\partial H}{\partial x_j}(x_0,x_0)\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) + \frac{C(x_0)}{h(x_0)}\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_0)\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)$

Calcoliamo adesso la derivata seconda di K rispetto a x_i e x_j in x_0, ricordando che

$\nabla H(x_0,x_0) = C(x_0)\nabla h(x_0)$

$\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{2\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,x_0)h(x_0) - C\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)H(x_0,x_0) + \frac{\partial H}{\partial x_i}(x_0,x_0)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_0) - 2C\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)\frac{\partial H}{\partial x_j}(x_0,x_0)}{H(x_0,x_0)h(x_0)^{2C+2}} \cdot$

$\cdot H(x_0,x_0)^{\frac{1}{2}}h(x_0)^{C+1} = \frac{2\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,x_0) - C(x_0)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_0,x_0)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_0)}{h(x_0)} - 2C\frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0)\frac{\partial H}{\partial x_j}(x_0,x_0)}{h(x_0)}}{H(x_0,x_0)^{\frac{1}{2}}h(x_0)^C} =$

$= \frac{(\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,x_0))_{ij}}{H(x_0,x_0)^{\frac{1}{2}}h(x_0)^C}$

Quindi

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(0,x_0) = [H(x_0,x_0)^{\frac{1}{2}}h(x_0)^C]\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x_0) \in Gl_n(R)$$

poiché x_0 è un punto critico non degenere di $K(x)$.

Per il teorema delle funzioni implicite esistono $\epsilon_4 \le \epsilon_3$ e un'applicazione regolare $x : [0,\epsilon_4] \to \overline{B_{r_3}(x_0)} \subseteq R^n$ tale che $(\epsilon, x(\epsilon))$ siano tutti e soli gli zeri di ξ in un intorno di $(0, x_0)$.

Se poniamo $x_\epsilon = x(\epsilon), \lambda_\epsilon = \lambda^\epsilon z(\epsilon, x_\epsilon)$ e $\alpha_\epsilon = \alpha(\epsilon, x_\epsilon, z(\epsilon, x_\epsilon))$, abbiamo che

$$\bar{u_\epsilon} = \alpha_\epsilon PU_{x_\epsilon,\lambda_\epsilon} + v_{\epsilon,x_\epsilon,\lambda_\epsilon,\alpha_\epsilon}$$

è per ϵ piccolo un punto critico vincolato di G_ϵ lungo $Z_{\epsilon,L,\delta}$.

Passo 2) Dobbiamo far vedere che effettivamente valgono le ipotesi c1,c2 e c3 della proposizione 2.1.5 per $(\epsilon, x_\epsilon, \lambda_\epsilon, \alpha_\epsilon)$ con $\epsilon \to 0$.

In realtà non faremo vedere che $Z_{\epsilon,L,\delta}$ è un vincolo naturale poiché in realtà, per poter affermare ciò, dovrei dimostrare le proprietà c1,c2 e c3 con $\epsilon \to 0$,$\lambda \to +\infty$ e $\alpha \to 1$ qualsiasi mentre invece noi stiamo scegliendo delle particolari successioni per le quali abbiamo un controllo di $\epsilon\lambda^{\frac{n-2}{2}}$.

Rileggendo però la dimostrazione della proposizione 2.1.5 risulta chiaro che è comunque sufficiente dimostrare le ipotesi per la nostra successione per poter affermare che per ϵ piccolo $\bar{u_\epsilon}$ è un punto critico libero di G_ϵ.

Cominciamo con c1:

- $< z, \frac{\partial z}{\partial x_i} >= O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) = o(1) = o(\min(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2, 1))$

per (3.41) e (3.44)

- $< z, \frac{\partial z}{\partial \lambda} >= O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}) = o(\frac{1}{\lambda^2}) = o(\min(\|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|^2, 1))$

per (3.43) e (3.44)

Invece con c2 viene chiaramente fuori perché abbiamo bisogno di $\lambda = \lambda_\epsilon$:

- $\max(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|, \|\frac{\partial z}{\partial \lambda}\|)\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial \alpha}\| = O(\lambda)O(\frac{\epsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) = O(\epsilon + \frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}) = o(1)$

- $\max(\|\frac{\partial z}{\partial x_j}\|,\|\frac{\partial z}{\partial\lambda}\|)\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| = O(\lambda)O(\epsilon+\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\lambda\epsilon^p+\lambda\mid 1-\alpha^{p-1}\mid) = O(\epsilon\lambda+$

$+\frac{1}{\lambda^{\frac{n-4}{2}}}+\lambda^2\epsilon^p+\lambda^2\mid 1-\alpha^{p-1}\mid) = o(\lambda^2) = o(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2)$

- $\max(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|,\|\frac{\partial z}{\partial\lambda}\|)\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\| = O(\lambda)O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}+\frac{\epsilon}{\lambda^2}+\frac{\epsilon^{p-1}}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+\frac{\epsilon^p}{\lambda}+\frac{|1-\alpha^{p-1}|}{\lambda}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}+$

$+\frac{\epsilon}{\lambda}+\frac{\epsilon^{p-1}}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\epsilon^p+\mid 1-\alpha^{p-1}\mid) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) = o(\frac{1}{\lambda^2}) = o(\|\frac{\partial z}{\partial\lambda}\|^2)$

ove abbiamo usato $\epsilon\lambda^{\frac{n-2}{2}} \leq cost.$, (2.16) del primo passo della dimostrazione e (2.12),(3.41),(3.43).

Infine per c3 abbiamo:

- $<\frac{\partial z}{\partial x_i},\frac{\partial z}{\partial\lambda}>= O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}) = o(\frac{1}{\lambda^2}) \leq o(\min(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2,\|\frac{\partial z}{\partial\lambda}\|^2))$

per (3.41),(3.42) e (3.43)

- $<\frac{\partial z}{\partial x_i},\frac{\partial z}{\partial x_j}>= O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) = o(\lambda^2) \leq o(\|\frac{\partial z}{\partial x_i}\|^2)\ \forall i\neq j$

per (3.40) e (3.41).

Osserviamo che (3.40) può essere migliorata. Infatti

$<\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i},\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j}>= p\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j} = O(\int_{\Omega\setminus B_r(x)}U_{x,\lambda}^{p-1}\mid\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\|\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_j}\mid)-$

$-p\int_{B_r(x)}U_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}O(\frac{|y-x|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})+O(\frac{1}{\lambda^n}) = O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})$

ove abbiamo usato argomenti di disparità delle funzioni integrande.

Passo 3)Mostriamo che $\bar{u}_\epsilon$ è positiva.

Usando il fatto che per ϵ piccolo tali funzioni rappresentano non solo dei punti critici vincolati di G_ϵ lungo $Z_{\epsilon,L,\delta}$ ma anche liberi del funzionale, allora

$$-\triangle\bar{u}_\epsilon = \mid\bar{u}_\epsilon+\epsilon h+u_\epsilon\mid^{p-1}(\bar{u}_\epsilon+\epsilon h+u_\epsilon)-(\epsilon h+u_\epsilon)^p$$

Da questa relazione e dal teorema di Lagrange otteniamo che $\forall \rho \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla \bar{u}_\epsilon \nabla \rho = p \int_\Omega \mid \xi + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p-1} \bar{u}_\epsilon \rho$$

ove $\mid \xi(x) \mid \leq \mid \bar{u}_\epsilon(x) \mid$.

Scegliamo $\rho = -(\bar{u}_\epsilon)^-$, ottenendo

$\int_\Omega \mid \nabla (\bar{u}_\epsilon)^- \mid^2 = p \int_\Omega \mid \xi + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p-1} (\bar{u}_\epsilon{}^-)^2 \leq c_1[\epsilon^{p-1} \int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^2 + \int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1}] \leq$

$\leq c_2 \epsilon^{p-1} (\int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1})^{\frac{2}{p+1}} + c_2 \int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1}$

Allora grazie alla disuguaglianza di Sobolev

$$S(\int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1})^{\frac{2}{p+1}} \leq c_2 \epsilon^{p-1} (\int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1})^{\frac{2}{p+1}} + c_2 \int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1} \tag{2.17}$$

Osserviamo che

$$\mid \bar{u}_\epsilon{}^- \mid \leq \mid v_{\epsilon, x_\epsilon, \lambda_\epsilon, \alpha_\epsilon} \mid$$

poiché $PU_{x_\epsilon, \lambda_\epsilon} > 0$.

Quindi, se per assurdo $\bar{u}_\epsilon{}^- \neq 0$ con ϵ comunque piccolo, possiamo semplificare in (2.17) ed ottenere

$$S \leq c_2 \epsilon^{p-1} + c_2 (\int_\Omega (\bar{u}_\epsilon{}^-)^{p+1})^{\frac{p-1}{p+1}} \leq c_2 \epsilon^{p-1} + c_3 \| v_{\epsilon, x_\epsilon, \lambda_\epsilon, \alpha_\epsilon} \|^{p-1}$$

e passando al limite con $\epsilon \to 0$ arrivare alla relazione assurda

$$S \leq 0$$

Quindi per ϵ piccolo $\bar{u}_\epsilon \geq 0$ e per principio del massimo forte $\bar{u}_\epsilon > 0$.

Otteniamo quindi che le funzioni $\bar{u}_\epsilon + u_\epsilon$ sono soluzioni regolari positive del problema

$$-\triangle u = (\epsilon h + u)^p$$

che è equivalente al problema dell'enunciato poiché h è armonica in Ω.

Per ogni punto critico non degenere x_0 di $K(x)$ interno ad Ω troviamo una successione di soluzioni, costruite con il metodo sopra illustrato, che tendono a concentrarsi in x_0 e quindi per ϵ piccolo tali successioni dovranno essere tutte distinte e daranno quindi luogo a tante soluzioni del problema considerato quanti sono i punti critici interni ad Ω non degeneri di $K(x)$.

Capitolo 3

Il problema di Yamabe

3.1 Introduzione e preliminari

Nel 1960 Yamabe annunciò nel suo articolo [1] che per ogni varietà Riemanniana compatta (M, g) di dimensione $n \geq 3$ esiste sempre una metrica conforme a g a curvatura scalare costante.

Nel 1968 Trudinger in [2] mise in evidenza una leggerezza non irrilevante nella dimostrazione di Yamabe legata , come sempre in problemi al critico, alla mancanza di compattezza di certe applicazioni d'inclusione.

Ci si trovò dunque di fronte ad una difficoltà non facilmente sormontabile, per la risoluzione della quale era necessario cercare di comprendere meglio tale tipo di fenomeni.

L'influenza di questo problema sullo sviluppo dell'analisi non lineare fu quindi considerevole.

Il problema di Yamabe, così come l'abbiamo sopra formulato in termini puramente geometrici, è equivalente a mostrare che, data una qualsiasi (M, g) varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$, esistono sempre $\lambda \in R$ e $u \in C^{\infty}(M)$ strettamente positiva tali che

$$-\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.1}$$

Tutta la difficoltà nel risolvere tale problema viene dalla perdita di compattezza dell'inclusione di $H_1^2(M)$ in $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$.

Da qui l'idea, già presente nel lavoro di Yamabe, di approssimare l'equazione (3.1) con delle equazioni sottocritiche per le quali, recuperando proprietà di compattezza, è possibile trovare soluzioni strettamente positive.

A questo punto si passa al limite, in senso debole, lungo questa successione di soluzioni sottocritiche, le quali dovranno necessariamente convergere ad una soluzione di (3.1).

Ci si accorge però ben presto che con tale approccio si va incontro ad una seria difficoltà, bisogna riuscire ad evitare che tale limite debole sia la soluzione identicamente nulla.

Aubin nel 1976 in [3] riconduce il problema allo studio di una diseguaglianza fine sull'invariante detto di Yamabe.

In pratica, si devono riuscire a costruire delle opportune funzioni in modo tale che, non appena testiamo il funzionale adattato al problema su tali funzioni, si trovi un valore inferiore rispetto ad un dato valore limite, dipendente solo da n.

Aubin diede poi nel medesimo articolo una risposta positiva nel caso di varietà non localmente conformemente piatta di dimensione $n \geq 6$.

Purtroppo la natura locale delle funzioni test scelte da Aubin non permetteva la risoluzione di (3.1) nella sua generalità e il problema di Yamabe diventava così la congettura di Yamabe, restando comunque irrisolti ancora molti casi.

Per la risoluzione di questi ultimi si comprese sempre più la necessità di dover passare per delle funzioni test veicolanti un'informazione sulla geometria globale della varietà.

Il problema venne completamente risolto nel 1984 da Schoen in [4], il quale mise in evidenza il ruolo inaspettato e fondamentale del teorema della massa positiva.

Restava solo da unificare tali approcci costruendo una famiglia di funzioni test che funzionasse in entrambi i casi così come hanno fatto Lee e Parker in [11], Hebey e Vaugon in [10].

Richiamiamo adesso alcune nozioni elementari che ci saranno utiili nel seguito.

Definizione 3.1.1 *Una metrica Riemanniana su una varietà M è un $C^\infty-$campo di tensori due volte covarianti su M che definisce in ogni punto x di M un prodotto scalare su T_xM.*

Una varietà Riemanniana è una coppia (M, g) costituita da una varietà M e da una *metrica Riemanniana g su M.*

Vogliamo ora introdurre la nozione di connessione lineare.

Definizione 3.1.2 *Sia M una varietà e $\Gamma(M)$ lo spazio dei $C^\infty-$campi di vettori su M. Una connessione su M è un'applicazione $D : T(M) \times \Gamma(M) \to T(M)$, ove $T(M)$ è il fibrato tangente, che verifica*

(i) $\forall x \in M$, se $X \in T_x M$ e $Y \in \Gamma(M)$, allora $D(X, Y) \in T_x M$

(ii) $\forall x \in M$, D ristretta a $T_x(M) \times \Gamma(M)$ è bilineare

(iii) $\forall x \in M, \forall X \in T_x(M), \forall Y \in \Gamma(M)$, se $f : M \to R$ è differenziabile, allora

$$D(X, fY) = X(f)Y(x) + f(x)D(X, Y)$$

(iv) $\forall X, Y \in \Gamma(M)$ e $k \in N$, se X e Y sono rispettivamente di classe C^k e C^{k+1} su M, allora $D(X, Y)$ è di classe C^k su M, ove $D(X, Y)$ è il campo di vettori su M definito $\forall x \in M$ dalla relazione $D(X, Y)(x) = D(X(x), Y)$

Data una connessione D, si usa generalmente come notazione $D_X(Y)$ al posto di $D(X, Y)$, denominando tale scrittura come la derivata covariante di Y per rapporto a X.

Definizione 3.1.3 *Data una varietà M e D una connessione lineare su M, i simboli di Christoffel della connessione D, che si indicano con Γ_{ij}^k, sono definiti in una qualsiasi carta (Ω, ϕ) di M come i coefficienti di $D((\frac{\partial}{\partial x_i})_x, (\frac{\partial}{\partial x_j})) \in T_x M$ rispetto* *alla base* $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, .., (\frac{\partial}{\partial x_n})_x\}$, *ossia*

$$D((\frac{\partial}{\partial x_i})_x, (\frac{\partial}{\partial x_j})) = \sum_k \Gamma^k_{ij}(\frac{\partial}{\partial x_k})_x \ \forall i, j = 1, .., n$$

Definizione 3.1.4 *Data una varietà M, la torsione T di una connessione D è il* $C^\infty-$*campo di tensori due volte covariante ed una volta controvariante di componenti in una qualsiasi carta* (Ω, ϕ) *di M*

$$T^k_{ij}(x) = \Gamma^k_{ij}(x) - \Gamma^k_{ji}(x)$$

Definizione 3.1.5 *Data una varietà M, la curvatura R di una connessione D è il* $C^\infty-$*campo di tensori tre volte covariante ed una volta controvariante di componenti in una qualsiasi carta* (Ω, ϕ) *di M*

$$R^l_{ijk}(x) = (\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x_j})_x - (\frac{\partial \Gamma j i^l}{\partial x_k})_x + \sum_\alpha [\Gamma^l_{j\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ki}(x) - \Gamma^l_{k\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ji}(x)]$$

Si può estendere la nozione di derivata covariante per rapporto a $X \in T_xM \subseteq T(M)$ dai campi differenziabili di vettori ai campi differenziabili di tensori ponendo in una carta locale (Ω, ϕ) di M

$$D_X(T) = \sum_i X^i(\nabla_i T)$$

ove

$$X = \sum_i X^i(\frac{\partial}{\partial x_i})_x$$

e

$$(\nabla_i T)^{j_1..j_q}_{i_1..i_p} = (\frac{\partial T^{j_1..j_q}_{i_1..i_p}}{\partial x_i})_x - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \Gamma^\alpha_{ii_k}(x)T(x)^{j_1..j_q}_{i_1..i_{k-1}\alpha i_{k+1}..i_p} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} \Gamma^{j_k}_{i\alpha}(x)T(x)^{j_1..j_{k-1}\alpha j_{k+1}..j_q}_{i_1..i_p} \tag{3.2}$$

ove $T(x)^{j_1..j_q}_{i_1..i_p}$ sono le componenti di T in (Ω, ϕ).

Proposizione 3.1.6 *Sia (M, g) varietà Riemanniana. Esiste un'unica connessione su M a torsione nulla, che chiamiamo connessione di Levi-Civita di g, per la quale la metrica g è a derivata covariante nulla.*

I suoi coefficienti di Christoffel in una carta (Ω, ϕ) di M sono dati da

$$\Gamma^k_{ij}(x) = \frac{1}{2}\sum_m [(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i})_x + (\frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j})_x - (\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m})_x] g^{mk}(x) \tag{3.3}$$

ove g_{ij} e g^{ij} sono rispettivamente le componenti di g e le componenti della matrice inversa di $(g_{ij})_{ij}$ nella carta scelta.

Definizione 3.1.7 *Siano (M, g) varietà Riemanniana e R la curvatura associata alla connessione di Levi-Civita. Poniamo allora:*

(i) la curvatura di Riemann de g, che indichiamo con Rm_g, come il $C^\infty-$campo di tensori quattro volte covariante di componenti in una carta (Ω, ϕ) di M

$$R_{ijkl}(x) = \sum_\alpha g_{i\alpha}(x) R^\alpha_{jkl}(x)$$

(ii) la curvatura di Ricci de g, che indichiamo con Ric_g, come il $C^\infty-$campo di tensori due volte covariante di componenti in una carta (Ω, ϕ) di M

$$R_{ij}(x) = \sum_\alpha R^\alpha_{i\alpha j}(x)$$

(iii) la curvatura scalare de g, che indichiamo con $Scal_g$, come la funzione C^∞ su M che in una carta (Ω, ϕ) di M vale

$$Scal_g(x) = \sum_{i,j} R_{ij}(x) g^{ij}(x)$$

E' possibile introdurre su una varietà Riemanniana la nozione di integrale a partire dalla nozione di integrale di Lebesgue in R^n e di partizione dell'unità.

Definizione 3.1.8 *Sia M una varietà e $A = (\Omega_i, \phi_i)_{i\in I}$ un atlante di M. Diremo che la famiglia $(\Omega_j, \phi_j, \alpha_j)_{j\in J}$ è una partizione dell'unità subordinata ad A se:*

(i) $\forall j \in J, \alpha_j : M \to R$ *è di classe* C^∞ *su* M

(ii) $\forall j \in J, \forall x \in M \;\; 0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$

(iii) $\forall x \in M$, $\exists V$ *intorno aperto di* x *tale che* $Supp\alpha_j \cap V = \emptyset$ *salvo che per un numero finito di* j

(iv) $\forall x \in M$, $\sum_{j\in J} \alpha_j(x) = 1$

(v) $Supp\alpha_j \subseteq \Omega_j$

(vi) $(\Omega_j, \phi_j)_{j\in J}$ *è un sottoatlante di* A

L'esistenza di una partizione dell'unità subordinata ad un atlante A è un risultato classico.

Proposizione 3.1.9 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione n e sia $f : M \to R$ una funzione continua a supporto compatto in M.*

Se $A = (\Omega_i, \phi_i)_{i\in I}$ è un atlante di M, poniamo

$$\int_M f dv(g) = \sum_{j\in J} \int_{\phi_j(\Omega_j)} (\alpha_j \sqrt{| \, g \, |} f) \circ \phi_j^{-1} dx$$

ove $(\Omega_j, \phi_j, \alpha_j)_{j\in J}$ è una partizione dell'unità subordinata ad A, $| \, g \, |$ è il determinante della matrice formata dalle componenti di g in (Ω_j, ϕ_j).

Allora l'integrale così definito è ben posto poiché la definizione non dipende né dalla scelta dell'atlante A né dalla scelta della partizione dell'unità subordinata ad A e prende il nome di integrale Riemanniano.

Definiamo ora la nozione di laplaciano su varietà Riemanniana (M, g), ponendo in una qualsiasi carta locale (Ω, ϕ) di M

$$\triangle_g f(x) = \sum_{i,j} g^{ij}(x)[(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_x - \sum_k \Gamma^k_{ij}(x)(\frac{\partial f}{\partial x_k})_x] \ \forall f \in C^2(M) \tag{3.4}$$

ove $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_x = D^2_{ij}(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))$.

Vale il seguente risultato.

Proposizione 3.1.10 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e $u, v \in C^2(M)$. Allora*

$$-\int_M (\triangle_g u) v dv(g) = \int_M < \nabla u, \nabla v >_g dv(g) = -\int_M u(\triangle_g v) dv(g)$$

ove $< \nabla u, \nabla v >_g = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}$.

Non perderemo tempo nel definire gli spazi di Sobolev su varietà, rinviando per dettagli a [6].

3.2 Approccio variazionale

Sia (M, g) varietà Riemanniana. Ricordiamo che la classe conforme $[g]$ di g è l'insieme delle metriche Riemanniane su M della forma fg con $f \in C^\infty(M)$ strettamente positiva.

Se g e $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ sono due metriche conformi, allora per $n \geq 3$ abbiamo

$$-\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.5}$$

Il termine di sinistra in (3.5) definisce quello che chiameremo l'operatore laplaciano conforme L_g calcolato in u.

Il senso di tale terminologia diventa chiaro dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.2.1 *Sia (M, g) varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 3$ e L_g l'operatore laplaciano conforme definito $\forall \phi \in C^2(M)$ come*

$$L_g(\phi) = -\triangle_g \phi + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u$$

Se $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ è una metrica conforme a g, allora

$$u^{\frac{n+2}{n-2}} L_{\tilde{g}}(\phi) = L_g(u\phi) \quad \forall \phi \in C^2(M)$$

Da (3.5) risulta evidente che il problema di trovare una metrica conforme alla metrica g della varietà Riemanniana (M, g) a curvatura scalare costante è del tutto equivalente a provare che esistono una costante $\lambda \in R$ e una funzione strettamente positiva $u \in C^\infty(M)$ soluzione dell' equazione

$$-\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Per studiare (3.1) introdurremo i seguenti funzionali su $H_1^2(M) \backslash \{0\}$:

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 \, dv(g) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_g u^2 dv(g) \tag{3.6}$$

$$J_q(u) = \frac{I(u)}{(\int_M \mid u \mid^q dv(g))^{\frac{2}{q}}} \quad \forall 2 < q < \frac{2n}{n-2} J(u) = \frac{I(u)}{(\int_M \mid u \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{n-2}{n}}} \tag{3.7}$$

Per omogeneità di J e J_q, otteniamo facilmente:

$$\inf_{u \in H_q} I(u) = \inf_{u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} J_q(u) \qquad \inf_{u \in H} I(u) = \inf_{u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} J(u) \tag{3.8}$$

ove gli insiemi H_q e H sono definiti da

$$H_q = \{u \in H_1^2(M) : \int_M \mid u \mid^q dv(g) = 1\} \; H = \{u \in H_1^2(M) : \int_M \mid u \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) = 1\}$$

Dimostriamo ora l'esistenza di soluzioni nel caso sottocritico, basandoci essenzialmente sull'inclusione compatta di $H_1^2(M)$ in L^q per $2 < q < \frac{2n}{n-2}$.

Teorema 3.2.2 *Sia (M, g) un varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$. Per ogni reale $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$, esiste una funzione strettamente positiva $u_q \in C^\infty(M)$ che è soluzione dell'equazione*

$$-\triangle_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u_q = \lambda_q u_q^{q-1} \tag{3.9}$$

con $u_q \in H_q$ e $\lambda_q = \inf_{u \in H_q} I(u)$.

In particolare λ_q è finito e assunto da u_q.

Dimostrazione

Passo 1) λ_q è finito

Infatti $\forall u \in H_q$ grazie alla disuguaglianza di Hölder

$$\mid \int_M Scal_g u^2 dv(g) \mid \leq \|Scal_g\|_\infty \int_M u^2 dv(g) \leq \|Scal_g\|_\infty v_g^{\frac{q-2}{q}}$$

ove $\upsilon_g = \int_M dv(g)$ indica il volume di (M, g).

Otteniamo così

$$\lambda_q \geq -\frac{n-2}{4(n-1)} \|Scal_g\|_\infty \upsilon_g^{\frac{q-2}{q}}$$

e quindi λ_q è finito.

Passo 2) esiste $u_q \in H_q$ positiva quasi ovunque che realizza λ_q

Sia infatti $\{v_i\}$ una successione minimizzante di I lungo H_q, ossia tale che

$$\lim_{i \to +\infty} I(v_i) = \lambda_q$$

Poiché $| \nabla | u || = | \nabla u | \, \forall u \in H_1^2(M)$, modulo sostituire la successione minimizzante $\{v_i\}$ con la successione ancora minimizzante $\{| \ v_i \ |\}$, possiamo supporre che le funzioni v_i siano positive quasi ovunque.

Notiamo che le v_i devono essere limitate in $H_1^2(M)$.

Supponendo infatti che $I(v_i) \leq \lambda_q + 1$, abbiamo

$\|v_i\| = \sqrt{\int_M | \nabla v_i |^2 \, dv(g) + \int_M v_i^2 dv(g)} \leq \sqrt{1 + \lambda_q + \frac{n-2}{4(n-1)} \|Scal_g\|_\infty \upsilon^{\frac{q-2}{q}} + \upsilon^{\frac{q-2}{q}}}$

poiché $v_i \in H_q$.

Per riflessività di $H_1^2(M)$, modulo sottosuccessioni, possiammo supporre che $v_i \rightharpoonup u_q$ in $H_1^2(M)$, $v_i \to u_q$ in L^q e quasi ovunque.

Quindi $u_q \in H_q$ ed inoltre

$$I(u_q) = \int_M | \nabla u_q |^2 \, dv(g) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_g u_q^2 dv(g) \leq \liminf_{i \to +\infty} I(v_i) = \lambda_q$$

Quindi $I(u_q) = \lambda_q$ con u_q positiva quasi ovunque come limite di funzioni positive quasi ovunque.

Passo 3) u_q è soluzione strettamente positiva C^∞ di (3.9)

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, u_q è soluzione debole di

$$-\triangle_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u_q = \alpha u_q^{q-1}$$

Se moltiplichiamo tale relazione per u_q, otteniamo

$$\lambda_q = I(u_q) = \alpha \int_M u_q^q dv(g) = \alpha$$

poiché $u_q \in H_q$.

Quindi u_q è soluzione debole di

$$-\triangle_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u_q = \lambda_q u_q^{q-1}$$

Con tecniche di "bootstrap" si ottiene che u_q è soluzione C^∞ di (3.9).

Useremo adesso il seguente lemma, per la dimostrazione del quale rinviamo a [6].

Lemma 3.2.3 *Siano (M, g) varietà Riemanniana compatta e $u \in C^2(M)$ funzione positiva. Supponiamo che $\forall x \in M$*

$$(-\triangle_g u)(x) \geq u(x) f(x, u(x))$$

ove $f : M \times R \to R$ è una funzione continua. Allora u è identicamente nulla oppure è strettamente positiva ovunque.

La funzione u_q non può essere identicamente nulla in quanto $u_q \in H_q$, allora u_q deve essere strettamente positiva ovunque, ottenenedo così la tesi.

Data (M,g) varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$, poniamo

$$\mu_g = \inf_{u \in H_1^2(M)\setminus\{0\}} J(u) = \inf_{u \in H} I(u) \tag{3.10}$$

Con gli stessi argomenti usati nel passo 1 della dimostrazione del teorema 3.2.2 è possibile mostrare che μ_g è finito e tale grandezza prende il nome di invariante di Yamabe.

Il senso di questa terminologia risulta chiaro dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.2.4 *Data (M,g) varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$, l'invariante di Yamabe è un invariante conforme, ossia $\forall \tilde{g} \in [g]$*

$$\mu_{\tilde{g}} = \mu_g$$

Dimostrazione

Sia $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, allora $dv(\tilde{g}) = u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)$. Dalla proposizione 3.2.1 abbiamo

$$u^{\frac{n+2}{n-2}} L_{\tilde{g}}(\phi) = L_g(u\phi) \quad \forall \phi \in C^\infty(M)$$

Moltiplichiamo tale relazione per $u\phi$ ed integriamo su M in rapporto a $dv(g)$

$\int_M \mid \nabla\phi \mid_{\tilde{g}}^2 dv(\tilde{g}) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_{\tilde{g}} \phi^2 dv(\tilde{g}) = \int_M \mid \nabla(u\phi) \mid_g^2 dv(g) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_g (u\phi)^2 dv(g)$

Inoltre è vero anche che $\forall \phi \in C^\infty(M)$

$$\int_M \mid \phi \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(\tilde{g}) = \int_M \mid u\phi \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)$$

Quindi, dalla due precedenti relazioni, otteniamo che $\forall \phi \in C^\infty(M)\setminus\{0\}$

$$J_{\tilde{g}}(\phi) = J_g(u\phi)$$

Poiché M compatta, $H_1^2(M)$ non dipende dal punto di vista insiemistico dalla metrica Riemanniana scelta e per costruzione $C^\infty(M)$ è denso in $H_1^2(M)$, allora $\forall \phi \in H_1^2(M)$

$$J_{\tilde{g}}(\phi) = J_g(u\phi)$$

Passando all'inf e ricordando (3.10) otteniamo la tesi.

E' possibile ottenere il precedente risultato anche per un'altra via.

Proposizione 3.2.5 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$. E' vera la seguente caratterizzazione di μ_g*

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\mu_g = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \upsilon_{\tilde{g}}^{-\frac{n-2}{n}} \int_M Scal_{\tilde{g}} dv(\tilde{g}) \tag{3.11}$$

Dimostrazione Abbiamo che vale

$$\mu_g = \inf_{u \in C_+^\infty(M)} J(u) \tag{3.12}$$

$\leq$)ovvio

$\geq$)Sia $\epsilon_0 \in R_+$ fissato. Per densità di $C^\infty(M)$ in $H_1^2(M)$, possiamo ottenere l'esistenza di $u \in C^\infty(M)\backslash\{0\}$ tale che

$$J(u) = J(\mid u \mid) < \mu_g + \epsilon_0$$

Osserviamo che $u \in H_1^q(M)$ $\forall q > 1$, allora $\mid u \mid \in H_1^q(M)$ $\forall q > 1$.

Se consideriamo ora $v_\epsilon = \mid u \mid + \epsilon$ con $\epsilon \in R_+$ abbiamo che valgono le seguenti:

- $v_\epsilon \in H_1^q(M)$ $\forall q > 1$ e in particolare $v_\epsilon \in H_1^{2n}(M)$

- $J(v_\epsilon) < \mu_g + \epsilon_0$ per ϵ piccolo.

Per densità di $C^\infty(M)$ in $H_1^{2n}(M)$, esiste una successione $\{v_i^\epsilon\} \subseteq C^\infty(M)$ tale che $v_i^\epsilon \to v_\epsilon$ in $H_1^{2n}(M)$.

Per il teorema di Sobolev, $H_1^{2n}(M)$ si include con continuità in $C(M)$ e quindi $v_i^\epsilon \to v_\epsilon \geq \epsilon > 0$ in norma $\| \cdot \|_\infty$. Allora $v_i^\epsilon \in C_+^\infty(M)$ per i grande.

Poiché M è compatta, otteniamo che $v_i^\epsilon \to v^\epsilon$ in $H_1^2(M)$, allora $J(v_i^\epsilon) < \mu_g + \epsilon_0$ per i grande ed ϵ piccolo.

Quindi

$$\inf_{u \in C_+^\infty(M)} J(u) < \mu_g + \epsilon_0$$

Passando al limite con $\epsilon_0 \to 0$

$$\inf_{u \in C_+^\infty(M)} J(u) \leq \mu_g$$

Sia adesso $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g \in [g]$. Se moltiplichiamo (3.5) per u ed integriamo su M in rapporto a $dv(g)$, tenendo presente che $dv(\tilde{g}) = u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)$, otteniamo

$$\frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_{\tilde{g}} dv(\tilde{g}) = \int_M \mid \nabla u \mid^2 dv(g) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_g u^2 dv(g)$$

Tenendo presente che $v_{\tilde{g}} = \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)$, dalla precedente relazione otteniamo

$$v_{\tilde{g}}^{-\frac{n-2}{n}} \int_M Scal_{\tilde{g}} dv(\tilde{g}) = \frac{4(n-1)}{n-2} J(u)$$

A questo punto passando all'inf su $\tilde{g} \in [g]$, che a secondo membro si traduce in un inf su $u \in C_+^\infty(M)$, ed usando (3.12), otteniamo la caratterizzazione voluta.

Mostreremo ora che (3.8) è continuo con $q \to \frac{2n}{n-2}$. Sussiste il seguente risultato.

Lemma 3.2.6 *Siano (M,g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ e μ_g il suo invariante di Yamabe. Ricordando che $\forall q \in (2, \frac{2n}{n-2})$*

$$\lambda_q = \inf_{u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} J_q(u) = \inf_{u \in H_q} I(u)$$

allora

$$\lim_{q \to \frac{2n}{n-2}} \lambda_q = \mu_g$$

Dimostrazione Siano $\epsilon > 0$ e $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$ tali che $J(u) \leq \mu_g + \epsilon$.

Poiché $| u |^q \leq \max(1, | u |^{\frac{2n}{n-2}}) \in L^1(M)$, otteniamo per il teorema di convergenza equidominata di Lebesgue

$$\lim_{q \to \frac{2n}{n-2}} (\int_M | u |^q \, dv(g))^{\frac{2}{q}} = (\int_M | u |^{\frac{2n}{n-2}} \, dv(g))^{\frac{n-2}{n}}$$

Da ciò segue

$$\limsup_{q \to \frac{2n}{n-2}} \lambda_q \leq \limsup_{q \to \frac{2n}{n-2}} J_q(u) = J(u) \leq \mu_g + \epsilon$$

Passiamo al limite con $\epsilon \to 0$

$$\limsup_{q \to \frac{2n}{n-2}} \lambda_q \leq \mu_g$$

D'altra parte per la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$1 = \int_M u_q^q dv(g) \leq (\int_M u_q^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{q(n-2)}{2n}} v_g^{1 - \frac{q(n-2)}{2n}}$$

ove u_q è come nel teorema 3.2.2.

Quindi

$$\liminf_{q \to \frac{2n}{n-2}} \int_M u_q^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) \geq \liminf_{q \to \frac{2n}{n-2}} (v_g^{\frac{q(n-2)}{2n}-1})^{\frac{2n}{q(n-2)}} = 1$$

Ma

$$\mu_g(\int_M u_q^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{n-2}{n}} \leq J(u_q)(\int_M u_q^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{n-2}{n}} = I(u_q) = \lambda_q$$

Quindi

$$\liminf_{q \to \frac{2n}{n-2}} \lambda_q \geq \mu_g$$

La tesi è così dimostrata.

Segnaliamo inoltre il seguente teorema.

Teorema 3.2.7 *Siano (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$, $[g]$ la classe conforme di g e μ_g l'invariante di Yamabe di (M, g). Allora*

$$\mu_g > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tilde{g} \in [g] \text{ tale che } Scal_{\tilde{g}} > 0$$

$$\mu_g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tilde{g} \in [g] \text{ tale che } Scal_{\tilde{g}} = 0$$

$$\mu_g < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tilde{g} \in [g] \text{ tale che } Scal_{\tilde{g}} < 0$$

Dimostrazione Analizziamo la prima equivalenza.

$\Leftarrow$) Per il teorema di Sobolev, sappiamo che $\exists A$ tale che $\forall u \in H_1^2(M)$

$$(\int_M | u |^{\frac{2n}{n-2}} dv(\tilde{g}))^{\frac{n-2}{n}} \leq A(\int_M | \nabla u |_{\tilde{g}}^2 dv(\tilde{g}) + \int_M u^2 dv(\tilde{g}))$$

Osserviamo che da questa relazione discende

$$\frac{\int_M \mid \nabla u \mid_{\tilde{g}}^2 dv(\tilde{g}) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_{\tilde{g}} u^2 dv(\tilde{g})}{(\int_M \mid u \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(\tilde{g}))^{\frac{n-2}{n}}} \geq \frac{1}{A} \min(1, \frac{n-2}{4(n-1)} \min_{x\in M} Scal_{\tilde{g}}(x))$$

Quindi

$$\mu_g = \mu_{\tilde{g}} \geq \frac{1}{A} \min(1, \frac{n-2}{4(n-1)} \min_{x\in M} Scal_{\tilde{g}}(x)) > 0$$

$\Rightarrow$) Siano $\forall q \in (2, \frac{2n}{n-2})$ λ_q e u_q come nella dimostrazione del teorema 3.2.2.

In virtù del lemma 3.2.6 se $\mu_g > 0$ allora per q vicino a $\frac{2n}{n-2}$ abbiamo $\lambda_q > 0$.

D'altra parte u_q soddisfa (3.9), quindi

$$-\triangle_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u_q = \frac{n-2}{4(n-1)} [\frac{4(n-1)}{n-2} \lambda_q u_q^{q-\frac{n+2}{n-2}}] u_q^{\frac{n+2}{n-2}}$$

da cui discende che se poniamo $\tilde{g} = u_q^{\frac{4}{n-2}} g$, allora

$$Scal_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda_q u_q^{q-\frac{n+2}{n-2}} > 0$$

per q vicino a $\frac{2n}{n-2}$.

Verifichiamo ora la terza equivalenza.

$\Leftarrow$) ovvio per la proposizione 3.2.5

$\Rightarrow$) si procede in modo del tutto analogo all'implicazione verso destra della prima equivalenza.

Per la seconda equivalenza abbiamo invece

$\Leftarrow$) Sia $\tilde{g}$ tale che $Scal_{\tilde{g}} = 0$. Se $\bar{g} = u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{g} \in [\tilde{g}]$, allora moltiplicando la relazione (3.5) relativa a $\tilde{g}$ e $\bar{g}$ per u ed integrando in $dv(\tilde{g})$

$$0 \leq \int_M \mid \nabla u \mid_{\tilde{g}}^2 dv(\tilde{g}) = \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_{\bar{g}} u^{\frac{2n}{n-2}} dv(\tilde{g}) = \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_{\bar{g}} dv(\bar{g})$$

Quindi $\mu_g = \mu_{\tilde{g}} = 0$ per la proposizione 3.2.5.

$\Rightarrow$) Siano $\mu_g = 0$ e q qualsiasi con $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$. Se $\lambda_q > 0$ (rispett. $\lambda_q < 0$), allora con le stesse manipolazioni dell'implicazione verso destra della prima (rispett. della terza) equivalenza, potremmo dimostrare che $\tilde{g} = u_q^{\frac{4}{n-2}} g$ ha curvatura scalare

$$Scal_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda_q u_q^{q-\frac{n+2}{n-2}} > 0 \quad \text{(rispett. } < 0)$$

Quindi per l'implicazione verso sinistra della prima (ripett. della terza) equivalenza, otterremmo $\mu_g > 0$ (rispett. $\mu_g < 0$), contraddicendo $\mu_g = 0$.
Quindi λ_q deve essere nullo, allora $Scal_{\tilde{g}} = 0$ se $\tilde{g} = u_q^{\frac{4}{n-2}} g$.

Ritorniamo adesso allo studio delle u_q con l'obiettivo di dimostrare il risultato provato da Aubin in [3].

Ricordiamo che

$$K(n,2) = \sqrt{\frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}}$$

ove ω_n rappresenta il volume della sfera unità standard n-dimensionale, è la migliore prima costante per l'inclusione di $H_1^2(M)$ in $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$.

Teorema 3.2.8 *Siano (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ e μ_g il suo invariante di Yamabe. Se $\mu_g < \frac{1}{K(n,2)^2}$, allora esiste una funzione strettamente positiva $u \in H \cap C^\infty(M)$ che è soluzione dell'equazione*

$$-\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = \mu_g u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.13}$$

In particolare μ_g è assunto e $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ è una metrica conforme a g con curvatura scalare costante $\frac{4(n-1)}{n-2}\mu_g$.

La dimostrazione di questo teorema farà uso dei seguenti tre lemmi.

Lemma 3.2.9 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ e μ_g il suo invariante di Yamabe. Esiste una successione di reali $\{q_i\} \subseteq (2, \frac{2n}{n-2})$ con*

$$\lim_{i \to +\infty} q_i = \frac{2n}{n-2}$$

la cui successione corrispondente di funzioni u_{q_i}, ove u_{q_i} è come nel Teorema 3.2.2, converge debolmente in $H_1^2(M)$ e fortemente in $L^2(M)$ verso una funzione positiva $u \in H_1^2(M)$ soluzione debole di (3.13)

Dimostrazione

Notiamo prima di tutto che le u_q sono uniformemente limitate in norma $H_1^2(M)$ per q vicino a $\frac{2n}{n-2}$.

Usando infatti il fatto che le $u_q \in H_q$ sono soluzioni di (3.9), otteniamo

$\|u_q\|^2 = \int_M \mid \nabla u_q \mid^2 dv(g) + \int_M u_q^2 dv(g) = \lambda_q + \int_M (1 - \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g) u_q^2 dv(g) \leq$

$\leq \mu_g + \delta + \|1 - \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g\|_\infty \upsilon_g^{\frac{q-2}{q}}$

per q prossimo a $\frac{2n}{n-2}$ in vista del lemma 3.2.6.

Per riflessività di $H_1^2(M)$ e di $L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$, per il teorema di immersione compatta di Sobolev, è possibile, mediante estrazioni successive, trovare una successione $q_i \in (2, \frac{2n}{n-2})$ convergente a $\frac{2n}{n-2}$ e $u \in H_1^2(M)$ tale che

a) $u_{q_i} \rightharpoonup u$ in $H_1^2(M)$

b) $u_{q_i} \to u$ in $L^2(M)$

c) $u_{q_i} \to u$ quasi ovunque

d) $u_{q_i}^{q_i-1} \rightharpoonup u^{\frac{n+2}{n-2}}$ in $L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$

Osserviamo che è possibile supporre che $\lim_{i\to+\infty} q_i = \frac{2n}{n-2}$.

E' infatti sufficiente partire da $\{u_{\tilde{q}_i}\}$ con $\lim_{i\to+\infty} \tilde{q}_i = \frac{2n}{n-2}$ ed usare per questa successione proprietà di riflessività.

Il punto (d) è vero poiché

$$\|u_q^{q-1}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)}^{\frac{n+2}{2n}} \leq v_g + \|u_q\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^{\frac{n-2}{2n}} \leq cost.$$

per il teorema di immersione di Sobolev e le stime precedenti.

Quindi, per riflessività di $L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$, modulo sottosuccessioni, possiamo dire che $u_{q_i}^{q_i-1} \rightharpoonup \bar{u}$ debolmente in $L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$ ove dovremo avere per il punto (c) $\bar{u} = u^{\frac{n+2}{n-2}}$.

A questo punto passiamo al limite con $i \to +\infty$ in (3.9) e ricordando che per il lemma 3.2.6 $\lim \lambda_{q_i} = \mu_g$ otteniamo che u è soluzione debole di (3.13).

Inoltre per il punto (c) u è positiva quasi ovunque.

Adesso sono due le questioni ancora da risolvere: la regolarità di u, per la quale non potranno più funzionare, trattandosi di problemi con esponente critico di Sobolev, argomenti standard di "bootstrap", e la stretta positività di u, che per il lemma 3.2.3 si tradurrà nel dimostrare che u non può essere identicamente nulla.

Lemma 3.2.10 *Sia (M,g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$, allora la funzione u data dal lemma 3.2.9 è di classe C^∞ su M ed in particolare soluzione forte di (3.13).*

Dimostrazione Le tecniche di "bootstrap" falliscono al critico. Si può però osservare che se riuscissimo a dire che $u \in L^s(M)$ con $s > \frac{2n}{n-2}$, allora gli argomenti classici per dimostrare la regolarità di u riprenderebbero a funzionare.

E' su questo che si appoggia tutta la dimostrazione del lemma.

Dato L un reale strettamente positivo, consideriamo le seguenti funzioni reali di variabile reale definite come

$F_L(t) = \{ | t |^{\frac{n}{n-2}} \; se \mid t \mid\leq L \qquad \frac{n}{n-2} L^{\frac{2}{n-2}} \mid t \mid - \frac{2}{n-2} L^{\frac{n}{n-2}} se \mid t \mid > L$

$G_L(t) = \{ | t |^{\frac{n+2}{n-2}} \; se \mid t \mid\leq L \qquad \frac{n}{n-2} L^{\frac{4}{n-2}} \mid t \mid - \frac{2}{n-2} L^{\frac{n+2}{n-2}} se \mid t \mid > L$

Poiché $\| \frac{\partial F_L}{\partial t} \|_{\infty,R} = \frac{n}{n-2} L^{\frac{2}{n-2}}$ e $\| \frac{\partial G_L}{\partial t} \|_{\infty,R} = \frac{n+2}{n-2} L^{\frac{4}{n-2}}$, le funzioni F_Le G_L sono lipschitziane e $\tilde{F_L} = F_L(u)$, $\tilde{G_L} = G_L(u)$ sono in $L^2(M)$. Quindi $\tilde{F_L}$ e $\tilde{G_L}$ sono in $H_1^2(M)$.

D'altra parte si può notare facilmente che per ogni $t \geq 0$

$$F_L(t) \leq t^{\frac{n}{n-2}}, G_L(t) \leq t^{\frac{n+2}{n-2}}, F_L(t)^2 \geq tG_L(t), (F_L'(t))^2 \leq \frac{n}{n-2} G_L'(t)$$

Applichiamo la relazione (3.13) a $\tilde{G_L}$, ottenendo

$$\int_M G_L'(u) \mid \nabla u \mid^2 dv(g) + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_g \tilde{G_L} u dv(g) = \mu_g \int_M u^{\frac{n+2}{n-2}} \tilde{G_L} dv(g)$$

Da ciò segue che esistono costanti strettamente positive C_1 e C_2 indipendenti da L tali che

$$\frac{n-2}{n}\int_M \mid \nabla \tilde{F}_L \mid^2 dv(g) \leq \int_M G'_L(u) \mid \nabla u \mid^2 dv(g) \leq C_1 + C_2 \int_M u^{\frac{n+2}{n-2}} \tilde{G}_L dv(g) \leq$$

$\leq C_1 + C_2 \int_M u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g)$

Grazie alle disuguaglianze di Hölder e Sobolev, possiamo scrivere che

$\int_M u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g) = \int_{\{u \leq K\}} u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g) + \int_{\{u>K\}} u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g) = \int_{\{u \leq K\}} u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2$ $dv(g) + (\int_{\{u>K\}} u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}} (\int_{\{u>K\}} \tilde{F_L}^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_{\{u \leq K\}} u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g) + \epsilon(K) (\int_M \tilde{F_L}^{\frac{2n}{n-2}}$ $dv(g))^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_{\{u \leq K\}} u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g) + \epsilon(K)(A \int_M \mid \nabla \tilde{F}_L \mid^2 dv(g) + B \int_M \tilde{F_L}^2 dv(g))$

ove per $K > 0$ abbiamo posto $\epsilon(K) = (\int_{\{u>K\}} u^{\frac{2n}{n-2}})^{\frac{2}{n}}$.

Sapendo che $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$, possiamo dire che $\epsilon(K)$ tende a zero al crescere di K.

Scegliamo quindi un K sufficientemente grande tale che $\frac{n}{n-2} C_2 A \epsilon(K) < 1$.

Se scegliamo ora $L > K$ otteniamo

$$\int_{\{u \leq K\}} u^{\frac{4}{n-2}} \tilde{F_L}^2 dv(g) \leq K^{2\frac{n+2}{n-2}} \upsilon_g$$

Quindi

$$\int_M \mid \nabla \tilde{F}_L \mid^2 dv(g) \leq \frac{n}{n-2} C_1 + \frac{n}{n-2} K^{2\frac{n+2}{n-2}} C_2 \upsilon_g + \frac{n}{n-2} \epsilon(K) B C_2 \int_M \tilde{F_L}^2 dv(g) +$$

$$+ \frac{n}{n-2} \epsilon(K) A C_2 \int_M \mid \nabla \tilde{F}_L \mid^2 dv(g) \leq C_4 + C_5 \int_M \mid \nabla \tilde{F}_L \mid^2 dv(g)$$

ove $C_4 > 0$ e $1 > C_5 > 0$ sono due costanti positive.

Da ciò otteniamo

$$\int_M \mid \nabla \tilde{F}_L \mid^2 dv(g) \leq \frac{C_4}{1 - C_5}$$

Quindi esiste una costante C_6 indipendente da L per la quale

$$\int_M \tilde{F_L}^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) \leq C_6$$

Utilizzando il teorema di convergenza di Beppo-Levi in vista della convergenza monotona crescente di $\tilde{F_L}^{\frac{2n}{n-2}} \uparrow \mid u \mid^{(\frac{n}{n-2})(\frac{2n}{n-2})}$ con $L \to +\infty$, otteniamo che

$$u \in L^{(\frac{n}{n-2})(\frac{2n}{n-2})}(M) = L^s(M)$$

ove $s = \frac{n}{n-2}\frac{2n}{n-2} > \frac{2n}{n-2}$ e quindi la tesi.

Lemma 3.2.11 *Siano (M,g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ e μ_g il suo invariante di Yamabe. Se $\mu_g < \frac{1}{K(n,2)^2}$, allora la funzione u data dal lemma 3.2.9 è strettamente positiva ovunque.*

Dimostrazione

Per i risultati relativi alla prima migliore costante della disuguaglianza di Sobolev su varietà, sappiamo che esiste $B > 0$ tale che $\forall \phi \in H_1^2(M)$

$$\left(\int_M \mid \phi \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq K(n,2)^2\left(\int_M \mid \nabla\phi \mid^2 dv(g) + B\int_M \phi^2 dv(g)\right)$$

D'altra parte $u_{q_i} \in H_{q_i}$, quindi $\forall i$

$1 = (\int_M u_{q_i}^{q_i} dv(g))^{\frac{2}{q_i}} \leq (\int_M u_{q_i}^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{n-2}{n}} \upsilon_g^{2(\frac{1}{q_i}-\frac{n-2}{2n})} \leq \upsilon_g^{2(\frac{1}{q_i}-\frac{n-2}{2n})} K(n,2)^2 \cdot$

$\cdot(\int_M \mid \nabla u_{q_i} \mid^2 dv(g) + B\int_M u_{q_i}^2 dv(g)) \leq \upsilon_g^{2(\frac{1}{q_i}-\frac{n-2}{2n})} K(n,2)^2 (I(u_{q_i}) + B\int_M u_{q_i}^2 dv(g) -$

$-\frac{n-2}{4(n-1)}\int_M Scal_g u_{q_i}^2 dv(g)) \leq \upsilon_g^{2(\frac{1}{q_i}-\frac{n-2}{2n})} K(n,2)^2(\lambda_{q_i} + C\int_M u_{q_i}^2 dv(g))$

ove C è un'opportuna costante reale positiva.

Per passaggio al limite nella precedente stima e in virtù del lemma 3.2.6 otteniamo

$$1 \le K(n,2)^2 \mu_g + D \int_M u^2 dv(g)$$

ove $D = K(n,2)^2 C$.

D'altra parte per ipotesi

$$K(n,2)^2 \mu_g < 1$$

da cui segue

$$\int_M u^2 dv(g) > 0$$

Quindi la funzione u non potrà mai essere identicamente nulla e per i lemmi 3.2.3 e 3.2.10 dovrà essere strettamente positiva ovunque.

Siamo ora pronti per dare la dimostrazione del teorema 3.2.8

Dimostrazione (Teorema 3.2.8) Abbiamo già mostrato grazie ai tre precedenti lemmi che se $\mu_g < \frac{1}{K(n,2)^2}$ allora esiste una funzione $u \in C^\infty(M)$ strettamente positiva soluzione forte di (3.13).

Resta da verificare che $u \in H$ e che u realizza il minimo di J su $H_1^2(M) \backslash \{0\}$.

Ricordiamo che dal punto (d) del lemma 3.2.9 avevamo $u_{q_i}^{q_i-1} \rightharpoonup u^{\frac{n+2}{n-2}}$ in $L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$.

Poiché $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$, otteniamo

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) = \lim_{i \to +\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} u dv(g)$$

Con Hölder abbiamo

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) \leq \lim_{i \to +\infty} [(\int_M u_{q_i}^{q_i} dv(g))^{\frac{q_i-1}{q_i}} (\int_M u^{q_i} dv(g))^{\frac{1}{q_i}}] = (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{n-2}{2n}}$$

per convergenza equidominata.

Quindi $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) \leq 1$ poiché u è ovunque strettamente positiva.

D'altra parte ricordando che u è soluzione di (3.13), moltiplichiamo tale relazione per u ed integriamo su M, ottenendo

$$I(u) = \mu_g \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g)$$

e di conseguenza

$$J(u) = \mu_g (\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{\frac{2}{n}} \leq \mu_g$$

Quindi $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) = 1$ sennò $J(u) < \mu_g$ e $J(u) = \mu_g$.

La dimostrazione è così completata.

3.3 Il teorema della massa positiva e risoluzione completa del problema di Yamabe

Il teorema 3.2.8 riconduce la risoluzione del problema di Yamabe per una data varietà Riemanniana compatta (M, g) alla disuguaglianza $\mu_g < \frac{1}{K(n,2)^2}$ ove μ_g denota l'invariante di Yamabe di (M, g).

Da ciò si deduce facilmente che nel caso $\mu_g \leq 0$ il problema di Yamabe è sempre risolubile: per questo ci restringeremo d'ora in poi al caso $\mu_g > 0$ che rappresenta l'unico veramente difficile.

La seguente proposizione, che non dimostreremo poiché i conti sono laboriosi e quasi del tutto simili a quelli del teorema 3.3.12, ci dice che la disuguaglianza non stretta è sempre vera.

Proposizione 3.3.1 *Sono vere le due asserzioni:*

(i) per ogni varietà Riemanniana compatta (M, g) di dimensione $n \geq 3$ abbiamo

$$\mu_g \leq \frac{1}{K(n,2)^2}$$

(ii) se S^n denota la sfera unità standard di R^n e h la metrica standard, allora

$$\mu_h = \frac{1}{K(n,2)^2}$$

Diamo ora due definizioni che saranno utilissime in seguito.

Definizione 3.3.2 *Siano M_1 una varietà, (M_2, g) una varietà Riemanniana e ϕ un diffeomorfismo di M_1 in M_2. E' possibile definire una metrica su M_1, ottenuta come pull-back della metrica g attraverso l'applicazione ϕ e che indicheremo con ϕ^*g, nel modo seguente.*

Siano (Ω_1, φ_1) e (Ω_2, φ_2) carte locali rispettivamente in M_1 e M_2 con la proprietà $\phi(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$, allora poniamo

$$\phi^*g(x)(X, Y) = g(\phi_{*,x}X, \phi_{*,x}Y)$$

$\forall X, Y \in T_xM$ e $\forall x \in M$, ove $\phi_{*,x}$ indica il differenziale di ϕ in x.

Definizione 3.3.3 *Siano (M_1, g_1) e (M_2, g_2) due varietà Riemanniane e $\phi : M_1 \to M_2$ diffeomorfismo. ϕ si dirà diffeomorfismo conforme se $\phi^* g_2 \in [g_1]$ e le due varietà si diranno conformemente diffeomorfe.*

Definizione 3.3.4 *Una varietà Riemanniana (M, g) si dice localmente conformemente piatta se $\forall x \in M$ esiste un intorno aperto Ω e $\tilde{g} \in [g]$ tale che $\tilde{g}$ è la metrica euclidea su Ω.*

Aubin in [3] congetturò che per ogni varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ non conformemente diffeomorfa a (S^n, h) fosse vera la disuguaglianza stretta. Poiché nel caso della sfera unità n-dimensionale la metrica standard h ha già curvatura scalare costante pari a $n(n-1)$, dalla congettura di Aubin risulterebbe completamente risolto il problema di Yamabe.
La principale difficoltà però risiede nel riuscire a tradurre la condizione di non diffeomorfismo conforme con (S^n, h) in modo più facilmente utilizzabile.
Bisogna riuscire quindi a trovare dei criteri che isolino e distinguano la sfera rispetto a tutte le altre varietà Riemanniane compatte.
Il primo criterio è dovuto allo stesso Aubin in [3] il quale osservò che ogni varietà non localmente conformemente piatta non può essere conformemente diffeomorfa a (S^n, h). Dimostrò poi la validità della propria congettura in tale caso specifico.
Per la risoluzione completa del problema, si deve attendere il lavoro di Schoen il

quale in [4] mise in evidenza il ruolo giocato dal teorema della massa positiva. Questo teorema, nato dalle congetture poste dai fisici teorici Arnowitt, Deser e Misner negli anni '60, riprese da Gibbons, Hawking e Perry verso la fine degli anni '70, viene dimostrato da Schoen e Yau in [7] e [8], mettendo cosi̇̀ fine al problema di Yamabe.

Diamo ora la definizione di varietà asintoticamente piatta.

Definizione 3.3.5 *Una varietà Riemanniana (M, g) di dimensione n è detta asintoticamente piatta d'ordine $\tau > 0$ se esistono $K \subseteq M$ compatto e un diffeomorfismo ϕ di $M \backslash K$ su $R^n \backslash \bar{B_R}(0)$ per un opportuno $R > 0$ tali che nel sistema di coordinate $\{z_i\}$ indotto da ϕ su $M \backslash K$ si abbia*

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(\frac{1}{r^\tau}) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial z_k} = O(\frac{1}{r^{\tau+1}}) \quad \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial z_k \partial z_m} = O(\frac{1}{r^{\tau+2}}) \quad \forall i, j, k, m$$

Si dice anche che il sistema $\{z_i\}$ è un sistema di coordinate asintotiche su M.

Introduciamo adesso la nozione di massa di una varietà asintoticamente piatta.

Definizione 3.3.6 *Sia (M, g) una varietà asintoticamente piatta di dimensione n e $\{z_i\}$ un sistema di coordinate asintotiche su M. Defiamo la massa m(g) della varietà ponendo*

$$m(g) = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{i,j} \int_{\partial B_0(R)} (\frac{\partial g_{ij}}{\partial z_i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial z_j}) d\sigma$$

Non è assolutamente ovvio dalla precedente definizione che $m(g)$ sia ben definita, ossia esista e non dipenda che da g.

Bartnik in [5] dimostra che $m(g)$ è ben definita per ogni varietà asintoticamente piatta d'ordine $\tau > \frac{n-2}{2}$ con la proprietà $Scal_g \in L^1(M)$.

Abbiamo quindi il seguente teorema, che è noto come forma forte del teorema della massa positiva.

Teorema 3.3.7 *Sia (M,g) una varietà di dimensione $n \geq 3$ asintoticamente piatta d'ordine $\tau > \frac{n-2}{2}$ la cui curvatura scalare è ovunque positiva e in $L^1(M)$. La sua massa $m(g)$ è allora positiva con la proprietà supplementare che $m(g) = 0$ se e soltanto se (M,g) è isometrica a (R^n, δ).*

Consideriamo (M,g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$.

Per $h \in C^\infty(M)$ strettamente positiva si può mostrare l'esistenza $\forall x \in M$ di una funzione G_x definita e di classe C^∞ su $M \backslash \{x\}$ che verifica nel senso delle distribuzioni l'equazione

$$-\triangle_{g,dist.} G_x + hG_x = \delta_x$$

ove δ_x rappresenta la misura di Dirac nel punto x.

La precedente è equivalente ad affermare che G_x soddisfa $\forall u \in C^2(M)$

$$\int_M G_x(-\triangle_g u + hu)dv(g) = u(x)$$

La funzione G_x è per definizione la funzione di Green nel punto x dell'operatore che ad $u \in C^2(M)$ associa $-\triangle_g u + hu$ ed è unica in quanto soluzione delle equazioni sopra citate.

Supporemo inizialmente di prendere $h = \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g$ con $Scal_g > 0$ ove tale scelta è possibile modulo cambio conforme di metrica per il teorema 3.2.7 e rispetto a tale metrica esiste G_x.

Per invarianza conforme del laplaciano conforme, si può mostrare che se $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, allora $\tilde{G_x}(y) = \frac{G_x(y)}{u(x)u(y)}$ definisce una funzione di Green di $L_{\tilde{g}}$ nel punto x che risulta comunque essere unica.

L'esistenza quindi di G_x funzione di Green di L_g in x è assicurata anche per le metriche g con curvatura scalare non strettamente positiva.

Consideriamo adesso il caso in cui (M, g) sia localmente conformemente piatta.

Dato un punto x, modulo un cambiamento conforme di metrica, potremo supporre che g sia euclidea in un intorno $B_{2\eta}(x)$ di x, per un opportuno $\eta > 0$.

Sia $f \in C^\infty(R, R_{\geq 0})$ positiva con supporto contenuto in $[-2\eta, 2\eta]$ e identicamente 1 su $[-\eta, \eta]$ e sia H_x la funzione su $M \backslash \{0\}$ definita da

$$H_x(y) = \frac{f(r)}{(n-2)\omega_{n-1} r^{n-2}}$$

ove r denota la distanza da x. Si può verificare che

$$-\triangle_g H_x(y) = \frac{(n-3)f'(r) - rf''(r)}{(n-2)\omega_{n-1} r^{n-1}} \quad \text{su} \quad B_{2\eta}(x) \backslash \{0\}$$

$$-\triangle_g H_x(y) = 0 \quad \text{su} \quad M \backslash B_{2\eta}(x)$$

da cui si può ricavare che $-\triangle_g H_x$ si prolunga in una funzione C^∞ su M.

Si può inoltre verificare che nel senso delle distribuzioni

$$-\triangle_{g,dist.} H_x = -\triangle_g H_x + \delta_x$$

ossia $\forall u \in C^2(M)$

$$-\int_M H_x(\triangle_g u)dv(g) = -\int_M (\triangle_g H_x)udv(g) + u(x)$$

Il calcolo non presenta particolari difficoltà, basta partire dal fatto che per lo spazio euclideo (R^n, δ) si ha

$$-\triangle_{\delta,dist.}(\frac{1}{r^{n-2}}) = (n-2)\omega_{n-1}\delta_x$$

Se adesso $\alpha_x \in C^\infty(M)$ rappresenta l'unica soluzione di

$$-\triangle_g \alpha_x + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g \alpha_x = \triangle_g H_x$$

la cui esistenza s'ottiene con metodi variazionali standard, allora la funzione di Green G_x di L_g nel punto x è data da $G_x = H_x + \alpha_x$.

Infatti

$$-\triangle_{g,dist.} G_x + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g G_x = -\triangle_g H_x + \delta_x + \triangle_g H_x + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g H_x = \delta_x$$

poiché $H_x = 0$ su $M \backslash B_{2\eta}(x)$ e $Scal_g = 0$ su $B_{2\eta}(x)$.

Tale ultima affermazione è vera in quanto abbiamo supposto all'inizio che g fosse euclidea su $B_{2\eta}(x)$.

Per definizione α_x è detta la parte regolare di G_x e $\alpha_x(x)$ è detta l'energia di g nel punto x.

Se g e $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ sono due metriche conformi piatte in un intorno di x, si può mostrare che $\tilde{\alpha_x}(x) = \frac{\alpha_x(x)}{u(x)^2}$ ove α_x e $\tilde{\alpha_x}$ sono le parti regolari delle funzioni di Green

G_x e $\tilde{G}_x$ nel punto x degli operatori L_g e $L_{\tilde{g}}$.

Quindi il segno dell'energia nel punto x è un invariante conforme nella classe delle metriche piatte in un intorno di x: per maggiori dettagli su tali questioni rinviamo a [9].

Il fatto importante a questo punto, sottolineato per la prima volta da Schoen in [4], è l'esistenza di una costante C strettamente positiva tale che

$$\alpha_x(x) = Cm(G_x^{\frac{4}{n-2}} g) \tag{3.14}$$

ove $m(G_x^{\frac{4}{n-2}} g)$ denota la massa della varietà asintoticamente piatta $(M \backslash \{x\}, G_x^{\frac{4}{n-2}} g)$.

Quindi, come conseguenza di tale relazione e del teorema della massa positiva, si può affermare che l'energia $\alpha_x(x)$ è sempre positiva ed è nulla se e soltanto se (M, g) è conformemente diffeomorfa a (S^n, h).

Questo risultato relativo all'energia $\alpha_x(x)$, al quale ci si riferisce con il termine di forma debole del teorema della massa positiva, è stato comunque dimostrato indipendentemente da (3.14) nell'articolo di Schoen e Yau [9].

Teorema 3.3.8 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta localmente conformemente piatta di dimensione $n \geq 3$ il cui invariante di Yamabe μ_g è strettamente positivo. Dato un punto $x \in M$ e $\tilde{g}$ una metrica conforme a g piatta in un intorno di x, allora l'energia $\alpha_x(x)$ di $\tilde{g}$ nel punto x è positiva. Se inoltre esiste un punto $x \in M$ e $\tilde{g}$ conforme a g piatta in un intorno di x tale che l'energia in x è nulla, allora (M, g) è conformemente diffeomorfa alla sfera standard (S^n, h).*

Abbiamo bisogno però adesso di una caratterizzazione più operativa dell'energia $\alpha_x(x)$. Rinviamo a [10] per la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 3.3.9 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta localmente conformemente piatta di dimensione $n \geq 3$ il cui invariante di Yamabe μ_g è strettamente positivo. Dato un punto $x \in M$ e $\tilde{g}$ una metrica conforme a g piatta su $B_\delta(x)$ per un opportuno $\delta > 0$, l'energia $\alpha_x(x)$ di $\tilde{g}$ in x vale*

$$\alpha_x(x) = \frac{4(n-1)}{n-2} \sup\{[\int_M Scal_{g'} dv(g')]^{-1} - [4(n-1)\omega_{n-1}\rho^{n-2}]^{-1}\} \tag{3.15}$$

ove il sup *è preso sui reali $\rho \in (0, \delta)$ e sulle metriche $g' \in [g]$ che soddisfano $g' = \tilde{g}$ su $B_\delta(x)$.*

Indipendentemente per varietà Riemanniane non localmente conformemente piatte di dimensione 3, 4 o 5 è possibile ritrovare uno sviluppo della funzione di Green in un punto x del laplaciano conforme simile a quello per varietà localmente conformemente piatte.

E' quindi posibile definire l'energia $\alpha_x(x)$ e grazie a (3.14) ritrovare anche in questo caso la validità della forma debole del teorema della massa positiva.

Inoltre è possibile ritrovare una caratterizzazione di $\alpha_x(x)$ simile a (3.15).

Sia $x \in M$ e sia $\tilde{g} \in [g]$ tale che $\mid \tilde{g} \mid = 1 + O(\tilde{r}^m)$ con $m >> 1$ in un intorno di x, si trova allora che

$$\alpha_x(x) = \frac{4(n-1)}{n-2} \limsup_{\rho \to 0} \sup\{[\int_M Scal_{g'} dv(g')]^{-1} - [4(n-1)\omega_{n-1}\rho^{n-2}]^{-1}\} \tag{3.16}$$

ove il sup è preso sulle metriche $g' \in [g]$ che verificano $g' = \tilde{g}$ su $B_\rho(x)$.

L'esistenza della metrica $\tilde{g}$ è legata al teorema di Cartan e mi permette di definire $\alpha_x(x)$. Per queste asserzioni rinviamo a [11].

Aubin inizialmente dimostrò $\mu_g < \frac{1}{K(n,2)^2}$ per varietà Riemanniane compatte non localmente conformemente piatte.

In [3] introdusse una famiglia particolare di funzioni test di $H_1^2(M)$ per le quali mostrò che il valore del funzionale J scendeva sotto la soglia $\frac{1}{K(n,2)^2}$. Utilizzò a tal fine l'esistenza di un punto x_0 tale che $Weyl_g(x_0) \neq 0$.

Ricordiamo la definizione di $Weyl_g$.

Definizione 3.3.10 *La curvatura di Weyl di g, che indichiamo con $Weyl_g$, è il $C^\infty-$campo di tensori quattro volte covarianti su M di componenti W_{ijkl} in una carta locale (Ω, ϕ) di M definite come*

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) + \frac{Scal_g}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

ove R_{ijkl},R_{ij} indicano le componenti della curvatura rispettivamente di Riemann e di Ricci nella carta scelta.

Richiamiamo un risultato utile a proposito della curvatura di Weyl.

Teorema 3.3.11 *Una varietà Riemanniana (M, g) di dimensione $n \geq 4$ è localmente conformemente piatta se e soltanto se la sua curvatura di Weyl è nulla in ogni punto di M.*

Schoen invece in [4] risolse i restanti casi introducendo a sua volta una famiglia particolare di funzioni test ed utilizzando il teorema della massa positiva.

Introduciamo adesso un approccio unificato al problema considerando una sola famiglia di funzioni test.

Teorema 3.3.12 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$ non conformemente diffeomorfa alla sfera unità standard (S^n, h) con invariante di Yambe $\mu_g > 0$. Dati un punto $x_0 \in M$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ piccolo fissato, introduciamo le funzioni u_ϵ definite da*

$$u_\epsilon(x) = (\epsilon + r^2)^{-\frac{n-2}{2}} \quad se \quad r \leq \delta$$

$$u_\epsilon(x) = (\epsilon + \delta^2)^{-\frac{n-2}{2}} \quad se \quad r \geq \delta$$

Questa famiglia di funzioni test fornisce la disuguaglianza $\mu_g < \frac{1}{K(n,2)^2}$.

Risulta quindi completamente risolto il problema di Yamabe.

Dobbiamo adesso fare necessariamente dei richiami per poter introdurre delle carte locali molto particolari, le carte esponenziali.

Definizione 3.3.13 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana e $\gamma : [a, b] \to M$ un cammino di classe C^1.*

Definiamo $L(\gamma)$ la lunghezza di γ ponendo

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t))((\frac{d\gamma}{dt})_t, (\frac{d\gamma}{dt})_t)}dt$$

ove in una carta locale (Ω, ϕ) *di coordinate* $(x_1, .., x_n)$

$$(\frac{d\gamma}{dt})_t = \sum_i (\gamma^i)'(t)(\frac{\partial}{\partial x_i})_{\gamma(t)}$$

Se supponiamo adesso γ C^1 *a tratti, definiamo la sua lunghezza come la somma delle lunghezze dei cammini* C^1 *che lo compongono.*

Definizione 3.3.14 *Sia* (M, g) *una varietà Riemanniana e* $\gamma : [a, b] \to M$ *un cammino di classe* C^∞*. Diremo che* γ *è una geodesica se per qualsiasi carta locale* (Ω, ϕ) *di* M *e* $\forall t \in [a, b]$ *tale che* $\gamma(t) \in \Omega$*, allora* $\forall k = 1, .., n$

$$(\gamma^k)''(t) + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t) = 0 \tag{3.17}$$

ove γ^k *e* Γ^k_{ij} *denotano rispettivamente le coordinate di* γ *e i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita nella carta* (Ω, ϕ)*.*

La proprietà fondamentale di una geodesica γ è che $\|(\frac{d\gamma}{dt})_t\|_g$ non dipende da t e quindi in particolare $L(\gamma) = (b - a)\|(\frac{d\gamma}{dt})_a\|_g$.

Se fissiamo adesso un punto $x \in M$, $\forall X \in T_xM$ denotiamo con $\gamma_x(X, t)$ l'unica geodesica con $t \in [0, \epsilon(X))$ che verifica $\gamma_x(X, 0) = x$ e $(\frac{d\gamma_x}{dt})(X, 0) = X$ con $\epsilon(X)$ massimale.

L'esistenza di una tale geodesica, almeno per tempi piccoli, ci viene assicurata dalla teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.

Poniamo poi $\epsilon(X)$ come il sup degli ϵ tali che $\gamma(X, t)$ è definita su $[0, \epsilon]$.

Esistono inoltre r e ϵ_0 tali che se $\|X\|_g = \sqrt{g(x)(X, X)} < r$ allora $\epsilon(X) > \epsilon_0$.

Essendo banalmente vero che $\forall\lambda > 0$ e $\forall X \in T_xM$ $\gamma_x(\lambda X, t) = \gamma_x(X, \lambda t)$, possiamo supporre che $\epsilon_0 > 1$ modulo diminuire il valore di r.

Se denotiamo con $\Omega_x(M) = \{X \in T_xM : \epsilon_0(X) > 1\}$, abbiamo chiaramente che $\Omega_x(M) \neq \emptyset$ e $B_0^x(r) = \{X \in T_xM : \|X\|_g < r\} \subseteq \Omega_x(M)$.

Indichiamo adesso con $\{e_1, .., e_n\}$ una base ortonormale di $(T_xM, g(x))$ e con Φ l'isometria vettoriale da $(T_xM, g(x))$ in (R^n, δ) che a $X \in T_xM$ associa le componenti di tale vettore nella base otonormale scelta. Poniamo $U = \Phi(\Omega_x)$.

Definizione 3.3.15 *Con le notazioni precedenti, l'esponenziale nel punto x è l'applicazione exp_x di U in M che a $(x_1, .., x_n)$ associa $\gamma_x(\sum_i x_i e_i, 1)$.*

Si può dimostrare che exp_x è un diffeomorfismo locale in $0 \in U$, quindi exp_x è un diffeomorfismo da un intorno aperto $B_0(\epsilon)$ di $0 \in U$ in un intorno aperto Ω di x.

Definiamo così in ogni punto $x \in M$ una carta locale (Ω, exp_x^{-1}) che prende il nome di carta esponenziale in x.

Osserviamo che in ogni caso la carta esponenziale che costruiamo dipende dalla scelta della base ortonormale $\{e_1, .., e_n\}$.

Le coordinate associate alla carta esponenziale in x prendono il nome di coordinate geodesiche normali in x.

In tali coordinate le geodesiche γ che uniscono x ad un punto $y \in \Omega$ diventano dei segmenti uscenti dall'origine con vettore di direzione $\Phi((\frac{d\gamma}{dt})(0))$.

Si può verificare che la carta (Ω, exp_x^{-1}) è normale in x, ossia in tale carta $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$

e $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ $\forall i, j, k$ e che $\forall y \in \Omega$ di coordinate $(y_1, .., y_n)$ nella carta esponenziale in x si ha

$$d(x, y) = L(\gamma) = \|(y_1, .., y_n)\|$$

ove $\gamma(t) = exp_x(ty_1, .., ty_n)$ è un cammino C^∞ dell'intervallo $[0, 1]$ in M.

In ultimo sussiste il seguente sviluppo di Taylor per la metrica g nella carta esponenziale $(\Omega, exp_{x_0}^{-1})$. Per x vicini a x_0 e $\forall i, j$ si ha

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta} R_{i\alpha\beta j}(x_0)x_\alpha x_\beta + \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} R_{i\alpha\beta j,\gamma}(x_0)x_\alpha x_\beta x_\gamma +$$

$$+\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\lambda}\left(\frac{1}{20}R_{i\alpha\beta j,\gamma\lambda}(x_0) + \frac{2}{45}\sum_m R_{i\alpha\beta m}(x_0)R_{j\gamma\lambda m}(x_0)\right)x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\lambda + O(r^5)$$

ove g_{ij} e R_{ijkl} denotano le componenti rispettivamente di g e di Rm_g nella carta esponenziale in x_0, $(x_1, .., x_n)$ sono le coordinate geodesiche normali in x_0, $r^2 = \sum_i x_i^2$, $R_{ijkl,m} = (\nabla Rm_g)_{mijkl}$ e $R_{ijkl,mn} = (\nabla_m(\nabla Rm_g))_{nijkl}$ con ∇Rm_g il $C^\infty-$campo di tensori cinque volte covariante con componenti in una carta

$$(\nabla Rm_g)_{mijkl} = (\nabla_m Rm_g)_{ijkl}$$

Quindi, dal precedente sviluppo, si può ottenere con semplici passaggi lo sviluppo di $\sqrt{|\ g(x)\ |}$ nella carta esponenziale in x_0

$\sqrt{|\ g(x)\ |} = 1 - \frac{1}{6}\sum_{i,j} R_{ij}(x_0)x_i x_j - \frac{1}{12}\sum_{i,j,k} R_{ij,k}(x_0)x_i x_j x_k + \frac{1}{24}\sum_{i,j,k,l}(-\frac{3}{5}R_{ij,kl}(x_0) -$
$-\frac{2}{15}\sum_{p,m} R_{pijm}(x_0)R_{pklm}(x_0) + \frac{1}{3}R_{ij}(x_0)R_{kl}(x_0))x_i x_j x_k x_l + O(r^5)$

ove R_{ij} e R_{ijkl} rappresentano rispettivamente le componenti di Ric_g e Rm_g nella carta, $R_{ij,k} = (\nabla Ric_g)_{kij}$ e $R_{ij,kl} = (\nabla_k(\nabla Ric_g))_{lij}$ con ∇Ric_g il $C^\infty-$campo di tensori tre volte covariante con componenti in una qualsiasi carta

$$(\nabla Ric_g)_{kij} = (\nabla_k Ric_g)_{ij}$$

Se indichiamo adesso con

$$G(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \sqrt{\mid g(exp_{x_0}(r\theta)) \mid} d\theta$$

ove $\theta \in S^{n-1}$ indica la variabile angolare in R^n e r è tale che $S^{n-1}(r)$ sia contenuto nell'insieme di definizione della carta esponenziale in x_0, possiamo ottenere con conti non banali

$G(r) = 1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n} r^2 + \frac{1}{360n(n+2)}(-18\triangle_g Scal_g(x_0) + 8 \mid Ric_g(x_0) \mid_g^2 -$

$-3 \mid Rm_g(x_0) \mid_g^2 + 5Scal_g(x_0)^2) r^4 + O(r^5)$

ove il modulo quadrato di un $C^\infty-$campo di tensori T p volte covariante è definito come $\mid T(x) \mid_g^2 = \sum_{i_1,..,i_p,j_1,..,j_p} g^{i_1 j_1}(x)..g^{i_p j_p}(x) T_{i_1..i_p}(x) T_{j_1..j_p}(x)$.

Per ottenere la precedente relazione abbiamo usato le seguenti

$$r^2 \int_{S^{n-1}} \theta_i \theta_j d\theta = \{0 \text{ se } i \neq j \ \ \frac{\omega_{n-1}}{n} r^2 \text{ se } i = j$$

$$r^3 \int_{S^{n-1}} \theta_i \theta_j \theta_k d\theta = 0 \ \forall i,j,k$$

$$r^4 \int_{S^{n-1}} \theta_i \theta_j \theta_k \theta_l d\theta = \{0 \text{ se } \#(\{i,j,k,l\}) = 3,4 \ \ \frac{\omega_{n-1}}{n(n+2)} r^4 \text{ se } \#(\{i,j,k,l\}) = 2$$

$$\frac{3\omega_{n-1}}{n(n+2)} r^4 \text{ se } \#(\{i,j,k,l\}) = 1$$

Per maggiori dettagli riguardo alle precedenti relazioni rinviamo a [3].

Abbiamo adesso pronti tutti gli strumenti per poter dimostrare il teorema 3.3.12.

Dimostrazione (Teorema 3.3.12) Caso 1) Consideriamo una varietà Riemanniana (M, g) non localmente conformemente piatta di dimensione $n \geq 6$.

Siano $x_0 \in M$ un punto qualsiasi e $\delta > 0$ tale che su $B_\delta(x_0)$ sia possibile definire $(x_1, .., x_n)$ un sistema di coordinate geodesiche normali in x_0.

Per invarianza conforme del problema, affermiamo che è possibile scegliere g tale che $Ric_g(x_0) = 0$.

Scegliamo una funzione $f \in C^\infty(M)$ strettamente positiva in almeno un punto di M e tale che $f(x_0) = 0$.

Per ogni $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$ esiste una funzione $u_q \in C^\infty(M)$ strettamente positiva soluzione di

$$-\triangle_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u_q = \lambda_q(f) f u_q^{q-1}$$

ove $\lambda_q(f)$ è una costante dipendente solo da q e f.

Se adesso prendiamo una metrica $\tilde{g} = u_q^{\frac{4}{n-2}} g$ otteniamo che

$$\frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{\tilde{g}} u_q^{\frac{n+2}{n-2}} = \lambda_q(f) f u_q^{q-1}$$

da cui discende

$$Scal_{\tilde{g}}(x_0) = 0$$

Modulo quindi un cambio conforme, possiamo supporre $Scal_g(x_0) = 0$.

Consideriamo $\phi \in C^\infty(M)$ definita localmente in un intorno di x_0 in coordinate geodesiche normali in x_0 da

$$\phi(x) = \frac{1}{n-2} \sum_{i,j} Ric_g(x_0)_{ij} x_i x_j$$

e poi prolungata in modo C^∞ su M.

Se poniamo $\tilde{g} = e^\phi g$, si può ottenere che

$$Ric_{\tilde{g}}(x_0)_{ij} = Ric_g(x_0)_{ij} - \frac{n-2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) - \frac{1}{2} g(x_0)_{ij} [\sum_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2}(x_0)] = Ric_g(x_0)_{ij} -$$

$-Ric_g(x_0)_{ij} - \frac{1}{n-2} g(x_0)_{ij} [\sum_k Ric_g(x_0)_{kk}] = -\frac{1}{n-2} g(x_0)_{ij} Scal_g(x_0) = 0$

e

$$Scal_{\tilde{g}}(x_0) = Scal_g(x_0) - (n-1) \sum_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2}(x_0) = 0$$

Quindi, modulo sempre un cambio conforme di metrica, è possibile supporre

$Ric_g(x_0) = 0$ e $Scal_g(x_0) = 0$.

Chiaramente se scegliamo delle coordinate geodesiche normali in x_0 rispetto a tale metrica g otteniamo

$$G(r) = 1 + \frac{1}{360n(n+2)} (-18 \triangle_g Scal_g(x_0) - 3 \mid Weyl_g(x_0) \mid_g^2) r^4 + O(r^5) = \quad (3.18)$$

$$= 1 + C(x_0) r^4 + O(r^5)$$

poiché $\|Rm_g(x_0)\|_g = \|Weyl_g(x_0)\|_g$ essendo $Ric_g(x_0) = 0$.

Poniamo $I_p^q = \omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{s^q}{(1+s^2)^p} ds \ \forall p, q$ tali che $2p > q+1$.

Sviluppiamo ora in ϵ la quantità $J(u_\epsilon)$. Stimiamo per primo il termine

$$\int_M \mid \nabla u_\epsilon \mid^2 dv(g)$$

Abbiamo che

$$| \nabla u_\epsilon |=| -(n-2)r(\epsilon+r^2)^{-\frac{n}{2}}\nabla r |= (n-2)r(\epsilon+r^2)^{-\frac{n}{2}} \qquad \text{su } B_\delta(x_0)$$

poiché $| \nabla r |= 1$ quasi ovunque.

Quindi

$\int_M | \nabla u_\epsilon |^2 \, dv(g) = (n-2)^2 \int_{B_\delta(x_0)} r^2(\epsilon+r^2)^{-n} dv(g) = (n-2)^2 \int_{B_\delta(0)} \|y\|^2(\epsilon+$

$+\|y\|^2)^{-n}(\sqrt{| g(exp_{x_0}(y)) |})dy = (n-2)^2 \int_0^\delta r^{n+1}(\epsilon+r^2)^{-n}[\int_{S^{n-1}} \sqrt{| g(exp_{x_0}(r\theta)) |}$

$d\theta]dr = (n-2)^2\omega_{n-1} \int_0^\delta r^{n+1}(\epsilon+r^2)^{-n}G(r)dr$

Se facciamo il cambio di variabile $r = \sqrt{\epsilon}s$ otteniamo

$\int_M | \nabla u_\epsilon |^2 \, dv(g) = (n-2)^2\omega_{n-1}\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{s^{n+1}}{(1+s^2)^n}[1+\epsilon^2C(x_0)s^4 + O(\epsilon^{\frac{5}{2}}s^5)]ds =$

$= (n-2)^2\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}[I_n^{n+1} + O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) + \epsilon^2C(x_0)\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{s^{n+5}}{(1+s^2)^n}ds + O(\epsilon^{\frac{5}{2}} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{s^{n+6}}{(1+s^2)^n}ds)]$

Per il secondo termine abbiamo

$\int_M Scal_g u_\epsilon^2 = O(1)+\int_{B_\delta(0)}[\sum_l \frac{\partial Scal_g}{\partial x_l}(x_0)x_l + \frac{1}{2}\sum_{s,t} \frac{\partial^2 Scal_g}{\partial x_s \partial x_t}(x_0)x_sx_t + \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^3 Scal_g}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}(x_0)$

$x_\alpha x_\beta x_\gamma + O(r^4)](\epsilon+\|x\|^2)^{-(n-2)}[1-\frac{1}{6}\sum_{i,j} R_{ij}(x_0)x_ix_j + O(r^3)]dx = \frac{1}{2}\sum_{s,t} \frac{\partial^2 Scal_g}{\partial x_s \partial x_t}(x_0)$

$\int_{B_\delta(0)}(\epsilon+\|x\|^2)^{-(n-2)}x_sx_tdx + O(\int_0^\delta r^{n+3}(\epsilon+r^2)^{-(n-2)}dr) = +\frac{1}{2n}\triangle_g Scal_g(x_0)\omega_{n-1}$

$\int_0^\delta r^{n+1}(\epsilon+r^2)^{-(n-2)}dr + O(\epsilon^{-\frac{n-8}{2}} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} s^{n+3}(1+s^2)^{-(n-2)}ds) = +\frac{1}{2n}\epsilon^{-\frac{n-6}{2}}\omega_{n-1}\triangle_g Scal_g(x_0)$

$\int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} s^{n+1}(1+s^2)^{-(n-2)}ds + O(1) + (\text{se } n = 8 \rightarrow)O(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$

In ultimo stimiamo il denominatore di $J(u_\epsilon)$

$\int_M | u_\epsilon |^{\frac{2n}{n-2}} dv(g) = O(1) + \int_{B_\delta(x_0)}(\epsilon+r^2)^{-n}dv(g) = O(1) + \omega_{n-1} \int_0^\delta r^{n-1}(\epsilon+$

$+r^2)^{-n}G(r)dr = O(1) + \omega_{n-1}\epsilon^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} s^{n-1}(1+s^2)^{-n}[1+\epsilon^2C(x_0)s^4 + O(\epsilon\frac{5}{2}s^5)]ds =$

$= O(1) + \omega_{n-1}\epsilon^{-\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} s^{n-1}(1+s^2)^{-n}[1+\epsilon^2C(x_0)s^4 + O(\epsilon\frac{5}{2}s^5)]ds = \epsilon^{-\frac{n}{2}}[I_n^{n-1}+$

$+\epsilon^2 C(x_0) I_n^{n+3} + o(\epsilon^2)]$

Quindi otteniamo come contributo del denominatore

$(\int_M \mid u_\epsilon \mid^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{-\frac{n-2}{n}} = \epsilon^{\frac{n-2}{2}}[(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} - \frac{n-2}{n}(I_n^{n-1})^{-2\frac{n-1}{n}} I_n^{n+3} C(x_0)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)]$

Mettendo insieme le precedenti stime otteniamo per $n > 6$

$J(u_\epsilon) = [(n-2)^2 I_n^{n+1} + (n-2)^2 I_n^{n+5} C(x_0)\epsilon^2 + \frac{n-2}{8n(n-1)} I_{n-2}^{n+1} \triangle_g Scal_g(x_0)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)]\cdot$

$\cdot[(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} - \frac{n-2}{n}(I_n^{n-1})^{-2\frac{n-1}{n}} I_n^{n+3} C(x_0)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)] = (n-2)^2 I_n^{n+1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} - [\frac{(n-2)^3}{n}\cdot$

$\cdot I_n^{n+1}(I_n^{n-1})^{-2\frac{n-1}{n}} I_n^{n+3} C(x_0) - \frac{n-2}{8n(n-1)} I_{n-2}^{n+1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} \triangle_g Scal_g(x_0) - (n-2)^2 I_n^{n+5} C(x_0)\cdot$

$\cdot(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}}]\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$

Osserviamo adesso che

$$(n-2)^2 I_n^{n+1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} = (\int_{R^n} \mid \nabla\phi \mid^2)(\int_{R^n} \phi^{\frac{2n}{n-2}})^{-\frac{n-2}{n}} = K(n,2)^{-2}$$

ove $\phi(x) = (1 + \mid x \mid^2)^{-\frac{n-2}{2}}$.

Usando inoltre il seguente lemma

Lemma 3.3.16 $I_{p+1}^q = \frac{2p-q-1}{2p} I_p^q$ *e* $I_{p+1}^{q+2} = \frac{q+1}{2p-q-1} I_{p+1}^q$ $\forall p, q$ *con* $2p > q+1$

otteniamo

$$(n-2)^2 I_n^{n+1}(I_n^{n-1})^{-2\frac{n-1}{n}} I_n^{n+3} = \frac{n(n+2)}{(n-2)(n-4)} K(n,2)^{-2}$$

$$I_{n-2}^{n+1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} = \frac{4(n-1)}{(n-2)(n-4)(n-6)} K(n,2)^{-2}$$

$$(n-2)^2 I_n^{n+5}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} = \frac{(n+2)(n+4)}{(n-4)(n-6)} K(n,2)^{-2}$$

Quindi $\forall n > 6$

$J(u_\epsilon) = K(n,2)^{-2}[1 + (-\frac{n+2}{n-4} C(x_0) + \frac{(n+2)(n+4)}{(n-4)(n-6)} C(x_0) + \frac{1}{2n(n-4)(n-6)} \triangle_g Scal_g(x_0))\epsilon^2 +$

$+o(\epsilon^2)] = K(n,2)^{-2}[1 + \frac{10(n+2)}{(n-4)(n-6)}C(x_0)\epsilon^2 + \frac{1}{2n(n-4)(n-6)}\triangle_g Scal_g(x_0))\epsilon^2 + o(\epsilon^2)] =$

$= K(n,2)^{-2}[1 - \frac{|Weyl_g(x_0)|_g^2}{12n(n-4)(n-6)}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)] < K(n,2)^{-2}$

per ϵ piccolo e per x_0 tale che $Weyl_g(x_0) \neq 0$.

Effettivamente, poichè la varietà in considerazione non è localmente conformemente piatta e $\mid Weyl_g(x_0) \mid$ è un invariante conforme, deve esistere un x_0 tale che $Weyl_g(x_0) \neq 0$.

Nel caso $n = 6$ poniamo

$$C_\delta = -\lim_{\epsilon \to 0} \omega_5 (\ln \epsilon)^{-1} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} s^{11}(1+s^2)^{-6} ds > 0$$

ed osserviamo che grazie ad un'integrazione iterata per parti

$$C_\delta = -\lim_{\epsilon \to 0} \omega_5 (\ln \epsilon)^{-1} \int_0^{\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} s^{7}(1+s^2)^{-4} ds$$

Quindi nel caso $n = 6$

$J(u_\epsilon) = [16 I_6^7 - 16 C_\delta C(x_0)\epsilon^2 \ln\epsilon - \frac{1}{60} C_\delta \triangle_g Scal_g(x_0)\epsilon^2 \ln\epsilon + o(\epsilon^2 \ln\epsilon)][(I_6^5)^{-\frac{2}{3}} + o(\epsilon^2 \ln\epsilon)] =$

$= K(6,2)^{-2} + \frac{1}{360} C_\delta (I_6^5)^{-\frac{2}{3}} \mid Weyl_g(x_0) \mid_g^2 \epsilon^2 \ln\epsilon + o(\epsilon^2 \ln\epsilon) < K(n,6)^{-2}$

per motivi analoghi al caso $n > 6$.

Caso 2) Supponiamo adesso che la varietà Riemanniana (M,g) sia conformemente piatta di dimensione $n \geq 3$ e non conformemente diffeomorfa a (S^n, h).

Modulo un cambio conforme di metrica e una scelta di un δ sufficientemente piccolo, possiamo supporre che g sia piatta su $B_\delta(x_0)$ e sia $(x_1, .., x_n)$ il sistema di coordinate su $B_\delta(x_0)$ tale che g diventa esattamente euclidea e x_0 viene mandato in zero.

Stimiamo il primo termine

$\int_M \mid \nabla u_\epsilon \mid^2 dv(g) = \int_{B_\delta(x_0)} \mid \nabla u_\epsilon \mid^2 dv(g) = \int_{B_\delta(0)} \mid \nabla[(\epsilon + \|x\|^2)^{-\frac{n-2}{2}}] \mid^2 dx =$

$= -\int_{B_\delta(0)} \triangle[(\epsilon + \|x\|^2)^{-\frac{n-2}{2}}](\epsilon + \|x\|^2)^{-\frac{n-2}{2}} dx + \int_{\partial B_\delta(0)} [\nabla(\epsilon + \|x\|^2)^{-\frac{n-2}{2}}] \cdot n$

$(\epsilon + \|x\|^2)^{-\frac{n-2}{2}} d\sigma = n(n-2)\epsilon \int_{B_\delta(0)} (\epsilon + \|x\|^2)^{-n} - (n-2)\omega_{n-1}\delta^n(\epsilon + \delta^2)^{-(n-1)}$

Poiché

$$\int_{B_\delta(0)} (\epsilon + \|x\|^2)^{-n} = \epsilon^{-\frac{n}{2}}[I_n^{n-1} + O(\epsilon^{\frac{n}{2}})]$$

otteniamo che

$$\int_M \mid \nabla u_\epsilon \mid^2 dv(g) = n(n-2)\epsilon^{-\frac{n-2}{2}} I_n^{n-1} - (n-2)\omega_{n-1}\delta^{-(n-2)} + o(1)$$

Per il secondo termine

$\int_M Scal_g u_\epsilon^2 dv(g) = (\epsilon + \delta^2)^{-(n-2)} \int_{M \setminus B_\delta(x_0)} Scal_g dv(g) = \delta^{-2(n-2)} \int_M Scal_g dv(g) + o(1)$

poiché $Scal_g = 0$ su $B_\delta(x_0)$.

Per il denominatore invece otteniamo

$(\int_M u_\epsilon^{\frac{2n}{n-2}} dv(g))^{-\frac{n-2}{n}} = (\epsilon^{-\frac{n}{2}} I_n^{n-1} + O(1))^{-\frac{n-2}{n}} = \epsilon^{\frac{n-2}{2}}[(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} + O(\epsilon^{\frac{n}{2}})]$

Infine

$J(u_\epsilon) = n(n-2)I_n^{n-1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} + (I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} \epsilon^{\frac{n-2}{2}} \delta^{-2(n-2)}[\frac{n-2}{4(n-1)} \int_M Scal_g dv(g) - (n-$

$-2)\omega_{n-1}\delta^{n-2}] + o(\epsilon^{\frac{n-2}{2}}) < K(n,2)^{-2}$

poiché per il teorema della massa positiva in forma debole e per la caratterizzazione di $\alpha_{x_0}(x_0)$ del teorema 3.3.9 possiamo supporre che, modulo la scelta di un δ sufficientemente piccolo e un cambiamento conforme di metriche coincidenti su

$B_\delta(x_0)$

$$\frac{n-2}{4(n-1)}\int_M Scal_g dv(g) - (n-2)\omega_{n-1}\delta^{n-2} < 0$$

Osserviamo che

$$n(n-2)I_n^{n-1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} = (n-2)^2 I_n^{n+1}(I_n^{n-1})^{-\frac{n-2}{n}} = K(n,2)^{-2}$$

Caso 3) Per varietà Riemanniane non localmente conformementi piatte si può trovare uno sviluppo simile ai precedenti e concludere grazie al teorema della massa positiva usando la caratterizzazione (3.16).

Verifichiamo adesso la validità del lemma che abbiamo usato nel corso della precedente dimostrazione.

Dimostrazione (Lemma 3.3.16) Procediamo mediante integrazione per parti

$I_{p+1}^{q+2} = \omega_{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{s^{q+2}}{(1+s^2)^{p+1}}ds = -\frac{1}{2p}\omega_{n-1}\frac{s^{q+1}}{(1+s^2)^p}\Big|_0^{+\infty} + \frac{q+1}{2p}\omega_{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{s^q}{(1+s^2)^p}ds = \frac{q+1}{2p}I_p^q$

poiché $2p > q+1$.

Inoltre si può osservare che

$$I_{p+1}^q + I_{p+1}^{q+2} = \omega_{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{s^q(1+s^2)}{(1+s^2)^{p+1}}ds = I_p^q$$

Quindi

$$I_{p+1}^q = I_p^q - \frac{q+1}{2p}I_p^q = \frac{2p-q-1}{2p}I_p^q$$

$$I_{p+1}^q = I_p^q - I_{p+1}^{q+2} = \frac{2p}{q+1}I_{p+1}^{q+2} - I_{p+1}^{q+2} = \frac{2p-q-1}{q+1}I_{p+1}^{q+2}$$

3.4 Unicità e molteplicità per il problema di Yamabe

Data (M, g) varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$, sappiamo ormai che esiste sempre $\tilde{g} \in [g]$ a curvatura scalare costante.

Una domanda naturale che ci si pone è di sapere se ne esistano più di una o se invece $\tilde{g}$ è unica modulo cambiamenti omotetici di metrica.

Il seguente risultato è dovuto ad Aubin (vedi [12]).

Teorema 3.4.1 *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$. Se $\mu_g \leq 0$, ove μ_g indica l'invariante di Yamabe di (M, g), e se $g_1, g_2 \in [g]$ sono due metriche a curvatura scalare costante, allora esiste un reale $\lambda > 0$ tale che $g_2 = \lambda g_1$.*

Dimostrazione Osserviamo prima di tutto che se $g_2 = \lambda g_1 = (\lambda^{\frac{n-2}{4}})^{\frac{4}{n-2}} g_1$ allora da (3.5) abbiamo

$$Scal_{g_1} = Scal_{g_2} (\lambda^{\frac{n-2}{4}})^{\frac{n+2}{n-2}-1} = \lambda Scal_{g_2}$$

E' quindi chiaro che la questione dell'unicità è ben posta modulo cambiamenti omotetici di metrica.

Scriviamo adesso g_2 della forma $g_2 = u^{\frac{4}{n-2}} g_1$ ove $u \in C^\infty(M)$ è strettamente positiva.

Consideriamo prima il caso $\mu_g = 0$.

Possiamo supporre per il teorema 3.2.7 che $Scal_{g_2} = 0$ per poi dimostrare che ogni altra metrica conforme a g a curvatura scalare costante deve essere omotetica a g_2. Quindi u è soluzione di

$$-\triangle_{g_1} u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{g_1} u = 0 \tag{3.19}$$

Allora

$$\int_M |\nabla u|^2 \, dv(g_1) = -\frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{g_1} \int_M u^2 dv(g_1)$$

Quindi $Scal_{g_1} \leq 0$. Affermiamo che $Scal_{g_1} = 0$.

Se così non fosse allora $Scal_{g_1} < 0$.

Supponiamo che y_0 sia punto di minimo assoluto per u, quindi

$$-\triangle_{g_1} u(y_0) \leq 0$$

Da (3.19) otteniamo

$$Scal_{g_1}(y_0) u(y_0) \geq 0$$

Ma $Scal_{g_1} < 0$ e $u > 0$, allora $u(y_0) = 0$, la qual cosa contraddice la stretta positività di u.

Ma se $Scal_{g_1} = 0$, allora u è soluzione di

$$-\triangle_{g_1} u = 0$$

Quindi $u = \eta > 0$ e $g_2 = (\eta)^{\frac{4}{n-2}} g_1 = \lambda g_1$.

Nel caso invece $\mu_g < 0$ possiamo supporre per il teorema 3.2.8 di prendere g_2 metrica soluzione del problema di Yamabe con $Scal_{g_2} = \frac{4(n-1)}{n-2}\mu_g < 0$.

Come prima, faremo vedere che se g_1 è un'altra metrica conforme a g a curvatura scalare costante allora deve essere necessariamente omotetica a g_2.

In questo caso avremo

$$-\triangle_{g_1} u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{g_1} u = \mu_g u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.20}$$

Se per assurdo $Scal_{g_1} \geq 0$, allora

$$0 < \int_M \mid \nabla u \mid^2 dv(g_1) + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_{g_1} \int_M u^2 dv(g_1) = \mu_g \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv(g_1) < 0$$

Quindi $Scal_{g_1} < 0$ e modulo un cambio omotetico di metrica, possiamo supporre

$$Scal_{g_1} = \frac{4(n-1)}{n-2}\mu_g$$

Quindi u è soluzione di

$$-\triangle_{g_1} u + \mu_g u = \mu_g u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Siano x_0 e y_0 rispettivamente punto di massimo e minimo assoluto per u, allora $-\triangle_{g_1} u(x_0) \geq 0$ e $-\triangle_{g_1} u(y_0) \leq 0$ e dall'equazione soddisfatta da u si deduce che $u(x_0) \leq 1$ e $u(y_0) \geq 1$.

Quindi u è la funzione identicamente uguale ad uno e la dimostrazione del teorema è così completa.

Citiamo il seguente risultato di unicità dovuto a Bidaut-Veron e Veron per la cui dimostrazione rinviamo a [32].

Teorema 3.4.2 *Sia (M,g) una varietà Riemanniana compatta di dimensione $n \geq 3$. Dati $\lambda > 0$ e $q > 2$ due numeri reali, supponiamo che*

(i) $Ric_g \geq \frac{n-1}{n}(q-2)\lambda g$ in quanto forme quadratiche

(ii) $q \leq \frac{2n}{n-2}$

con una delle due precedenti disuguaglianze stretta nel caso in cui (M,g) è conformemente diffeomorfa alla sfera standard (S^n, h).

La sola soluzione strettamente positiva $u \in C^\infty(M)$ dell'equazione

$$-\triangle_g u + \lambda u = u^{q-1}$$

è allora la funzione costante $u = \lambda^{\frac{1}{q-2}}$.

In particolare nel caso in cui scegliamo

$$(M,g) = (S^n, h) \;\; q = \frac{2n}{n-2} \;\; 0 < \lambda < \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_h = \frac{n(n-2)}{4}$$

per il quale

$Ric_h = (n-1)h = \frac{n-1}{n}\frac{4}{n-2}\frac{n-2}{4(n-1)}[n(n-1)]h = \frac{n-1}{n}(q-2)\frac{n-2}{4(n-1)}Scal_h h >$

$> \frac{n-1}{n}(q-2)\lambda h$

otteniamo dal teorema precedente che l'unica soluzione di

$$-\triangle_h u + \lambda u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

con $0 < \lambda < \frac{n(n-2)}{4}$ è la funzione costante $u = \lambda^{\frac{n-2}{4}}$.

Il risultato non è più vero nel caso $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$, per il quale Aubin in [12] e Hebey in

[37] dimostrano che le funzioni

$$u_{x_0,\beta} = (\frac{n(n-2)}{4})^{\frac{n-2}{4}}(\beta^2-1)^{\frac{n-2}{4}}(\beta-\cos r)^{-\frac{n-2}{2}}$$

ove $r = d(x, x_0)$, descrivono al variare di (β, x_0) in $(1, +\infty) \times S^n$ tutte le soluzioni di

$$-\triangle_h u + \frac{n(n-2)}{4} u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

3.5 Questioni legate al teorema di Bidaut-Veron e Veron

Nel precedente paragrafo abbiamo riportato un risultato dovuto a Bidaut-Veron e Veron che afferma sussistere unicità per le soluzioni positive del problema

$$-\triangle_h u + \lambda u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.21}$$

ove λ è una costante reale tale che $0 < \lambda < \frac{n(n-2)}{4}$ e (S^n, h) è la sfera n-dimensionale dotata della metrica standard.

La funzione costante $u = \lambda^{\frac{n-2}{4}}$ è quindi l'unica soluzione del problema sopra citato.

Consideriamo adesso una generalizzazione dell'equazione (3.21) al caso in cui λ non sia una funzione costante ma vicina in norma L^∞ alla costante $\frac{n(n-2)}{4}$.

Sia quindi

$$\lambda_\epsilon = \frac{n(n-2)}{4} + \epsilon f + o(\epsilon) \in C^1(S^n)$$

ove $f \in C^1(S^n)$ e $\lim_{\epsilon \to 0} \| \frac{\lambda_\epsilon - \frac{n(n-2)}{4} - \epsilon f}{\epsilon} \|_\infty = 0$.

Per $n \geq 4$ consideriamo il problema

$$-\triangle_h u + \lambda_\epsilon(x) u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{3.22}$$

$$u \in H_1^2(S^n) \quad u > 0$$

I risultati che possiamo ottenere con tecniche perturbative sono i seguenti.

Teorema 3.5.1 *Sia* $\lambda_\epsilon = \frac{n(n-2)}{4} + \epsilon f + o(\epsilon) \in C^1(S^n)$ *con* $o(\epsilon)$ *nella norma uniforme di* $C(S^n)$ *e* $f \in C^1(S^n)$ *una funzione verificante*

1) $\bar{f} = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^n} f dv(h) > 0$ *e* $\inf_{S^n} f < 0$

o

2) $\bar{f} = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^n} f dv(h) < 0$ *e* $\sup_{S^n} f > 0$

allora il problema (3.22) ammette una soluzione regolare per ϵ *sufficientemente piccolo.*

Teorema 3.5.2 *Sia* $\lambda_\epsilon = \frac{n(n-2)}{4} + \epsilon f + o(\epsilon) \in C^1(S^n)$ *con* $o(\epsilon)$ *nella norma uniforme di* $C(S^n)$ *e* $f \in C^1(S^n)$ *una funzione non identicamente nulla tale che*

$$\bar{f} = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^n} f dv(h) = 0$$

allora il problema (3.22) ammette almeno due soluzioni regolari distinte per ϵ *sufficientemente piccolo.*

Il metodo al quale faremo riferimento è descritto in modo dettagliato in [15] e [16]. Riporteremo il contenuto rinviando per la dimostrazione ai sopra citati articoli.

Consideriamo una famiglia di funzionali $\{f_\epsilon\}$ definiti su uno spazio di Hilbert E della forma

$$f_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - F(u) + G(\epsilon, u) = f_0(u) + G(\epsilon, u)$$

ove $F : E \to R$ e $G : R \times E \to R$.

Indichiamo con $\|\cdot\|$ e $(\cdot \mid \cdot)$ rispettivamente la norma e il prodotto scalare in E.

Assumiamo che

(F_0) $F \in C^2$

(F_1) esiste una varietà Z C^2 e d-dimensionale con $d \geq 1$ di punti critici di f_0 ad un livello energetico fissato b che prende il nome di varietà critica

(F_2) $F''(z) : E \to E$ è compatto $\forall z \in Z$

(F_3) $T_z Z = Ker[I_E - F''(z)]$ $\forall z \in Z$

(G_0) G è continuo in $(\epsilon, u) \in R \times E$ e $G(0, u) = 0$ $\forall u \in E$

(G_1) G è di classe C^2 rispetto ad $u \in E$

(G_2) le mappe $(\epsilon, u) \to G'(\epsilon, u)$ e $(\epsilon, u) \to G''(\epsilon, u)$ sono continue come mappe da $R \times E$ rispettivamente in E e $L(E, E)$

(G_3) esistono $\alpha > 0$ e una funzione continua $\Gamma : Z \to R$ tali che

$$\Gamma(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{G(\epsilon, z)}{\epsilon^\alpha}$$

$$G'(\epsilon, z) = o(\epsilon^{\frac{\alpha}{2}})$$

uniformemente sui limitati di Z, ove indichiamo con $F'(u)$ e $G'(\epsilon, u)$ gli operatori definiti ponendo rispettivamente

$$(F'(u) \mid v) = DF(u)[v] \quad \forall v \in E$$

$$(G'(\epsilon, u) \mid v) = D_u G(\epsilon, u)[v] \quad \forall v \in E$$

e similmente con $F''(u)$ e $G''(\epsilon, u)$ le mappe a valori in $L(E, E)$ definite ponendo rispettivamente

$$(F''(u)v \mid w) = D^2 F(u)[v, w] \quad \forall v, w \in E$$

$$(G''(\epsilon, u)v \mid w) = D^2_{uu} G(\epsilon, u)[v, w] \quad \forall v, w \in E$$

Sotto le precedenti ipotesi si può usare il teorema della funzione implicita per mostrare l'esistenza per ϵ piccolo di $w = w(\epsilon, z) \in (T_z Z)^\perp$ tale che

$$f'_\epsilon(z + w) \in T_z Z$$

$$\|w(\epsilon, z)\| = o(\epsilon^{\frac{\alpha}{2}})$$

uniformemente sui limitati di Z.

Ponendo $Z_\epsilon = \{z + w(\epsilon, z)\}$ si ottiene una varietà C^2 e d-dimensionale localmente diffeomorfa a Z tale che ogni punto critico di f_ϵ vincolato lungo Z_ϵ sia anche per ϵ piccolo un punto stazionario di f_ϵ.

A partire dallo sviluppo di Z di f_ϵ lungo Z_ϵ

$f_\epsilon(u) = f_\epsilon(z + w(\epsilon, z)) = f_0(z) + (f'_0(z) \mid w(\epsilon, z)) + O(\|w(\epsilon, z)\|^2) + G(\epsilon, z) +$

$+(G'(\epsilon,z) \mid w(\epsilon,z)) + O(\|w(\epsilon,z)\|^2) = b + \epsilon^\alpha \Gamma(z) + o(\epsilon^\alpha)$

uniformemente sui limitati di Z, si ottiene

Teorema 3.5.3 *Supponiamo che valgano* $(F_0 - F_3)$ *e* $(G_0 - G_3)$ *e che esistano* $z^* \in Z$ *e* A *intorno aperto di* z^* *in* Z *tali che*

$$\min_{\partial A} \Gamma(z) > \Gamma(z^*)$$

oppure

$$\max_{\partial A} \Gamma(z) < \Gamma(z^*)$$

allora f_ϵ *ha un punto critico* $u_\epsilon \in Z_\epsilon$ *per* ϵ *sufficientemente piccolo.*

Abbiamo bisogno di due lemmi per poter dimostrare i teoremi 3.5.1 e 3.5.2.

Ricordiamo la definizione di $u_{x_0,\beta}$ fornita alla fine del paragrafo precedente.

Poniamo $\forall \beta > 1$ e $\forall x_0 \in S^n$

$$u_{x_0,\beta} = (\frac{n(n-2)}{4})^{\frac{n-2}{4}} (\beta^2 - 1)^{\frac{n-2}{4}} (\beta - \cos r)^{-\frac{n-2}{2}}$$

ove $r = d(x, x_0)$.

Lemma 3.5.4 *Sia* $f \in C^1(S^n)$ *e* $\Gamma(x,\beta) = \frac{1}{2}\int_{S^n} f(y) u^2_{x,\beta}(y) dv(y)$ $\forall \beta > 1$ *e* $\forall x \in S^n$. *Allora* $\Gamma(x,\beta)$ *ammette per* β *vicino ad uno uniformemente in* $x \in S^n$ *il seguente sviluppo*

$$\Gamma(x,\beta) = c_1 c_n^2 \omega_{n-1} 2^{n-1} \frac{\beta - 1}{\beta + 1} f(x) + o(\beta - 1) \quad \textit{per} \quad n \geq 5$$

$$\Gamma(x,\beta) = 8c_2c_4^2\omega_3\frac{\beta-1}{\beta+1} \mid \ln(\beta-1) \mid f(x) + o((\beta-1)(\ln(\beta-1))) \quad per \quad n=4$$

ove $c_n = [\frac{n(n-2)}{4}]^{\frac{n-2}{4}}$, $c_1 = \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z^2)^{n-2}}dz$ *e*
$c_2 = -\lim_{\beta\to 1^+} \int_0^{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}L} \frac{z^3}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{(1+\frac{\beta-1}{\beta+1}z^2)^2}(\ln(\beta-1))^{-1}$ *con* L *numero reale positivo opportunamente piccolo.*

Dimostrazione Possiamo supporre di scegliere δ sufficientemente piccolo, uniformemente in $x \in S^n$ per compattezza di S^n, in modo tale che su $B_\delta(x)$ sia definita un sistema di coordinate geodesiche normali in x $\{x_1,..,x_n\}$.

Abbiamo quindi $\forall y \in B_\delta(x)$ per il teorema di Lagrange

$$f(y) = (f \circ exp_x)(exp_x^{-1}(y)) = \tilde{f}(exp_x^{-1}(y)) = \tilde{f}(0) + \nabla_r\tilde{f}(\xi)\cdot exp_x^{-1}(y)$$

ove $\|\xi\| \leq \|exp_x^{-1}(y)\|$.

Ma, uniformemente per $x \in S^n$

$$\mid \nabla_r\tilde{f}(\xi)\cdot exp_x^{-1}(y) \mid = \mid \nabla f(exp_x(\xi))\cdot exp_x^{-1}(y) \mid \leq \|f\|_{C^1(S^n)}\|exp_x^{-1}(y)\| = O(r)$$

poiché in un sistema di coordinate geodesiche normali in x

$$\|exp_x^{-1}(y)\| = d(y,x) = r$$

Quindi $\forall y \in B_\delta(x)$ ed uniformemente per $x \in S^n$

$$f(y) = \tilde{f}(0) + O(r) = f(x) + O(\sin r)$$

per δ piccolo.

Abbiamo

$$\Gamma(x,\beta)=\frac{1}{2}\int_{S^n\setminus B_\delta(x)}f(y)u^2_{x,\beta}(y)dv(y)+\frac{f(x)}{2}\int_{B_\delta(x)}u^2_{x,\beta}(y)dv(y)+$$

$$+O(\int_{B_\delta(x)}\sin r u^2_{x,\beta}dv(h))$$

Consideriamo i vari termini. Per il primo abbiamo

$\int_{S^n\setminus B_\delta(x)}f(y)u^2_{x,\beta}(y)dv(y)=O((\beta-1)^{\frac{n-2}{2}})$

Per il secondo invece

$\int_{B_\delta(x)}u^2_{x,\beta}(y)dv(y)=c_n^2(\beta^2-1)^{\frac{n-2}{2}}\int_{B_\delta(x)}(\beta-\cos r)^{-(n-2)}dv(h)=c_n^2(\beta^2-1)^{\frac{n-2}{2}}\omega_{n-1}\cdot$

$\cdot\int_0^d(\sin r)^{n-1}(\beta-\cos r)^{-(n-2)}dr=c_n^2(\beta^2-1)^{\frac{n-2}{2}}\omega_{n-1}2^n\int_0^L\frac{y^{n-1}}{[(\beta-1)+(\beta+1)y^2]^{n-2}}\frac{dy}{(1+y^2)^2}=$

$=c_n^2(\beta^2-1)^{\frac{n-2}{2}}\omega_{n-1}2^n(\frac{\beta-1}{\beta+1})^{\frac{n}{2}}(\beta-1)^{-(n-2)}\int_0^{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}L}\frac{z^{n-1}}{(1+z^2)^{n-2}}\frac{dz}{(1+\frac{\beta-1}{\beta+1}z^2)^2}=c_n^2\omega_{n-1}2^n\frac{\beta-1}{\beta+1}\cdot$

$\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}L}\frac{z^{n-1}}{(1+z^2)^{n-2}}\frac{dz}{(1+\frac{\beta-1}{\beta+1}z^2)^2}$

ove abbiamo effettuato il passaggio in coordinate riemanniane polari, poi abbiamo usato il cambio di variabile $y=\tan(\frac{r}{2})$ e $z=\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}y$.

Abbiamo posto $L=\tan(\frac{d}{2})$.

Ma se $n\geq 5$ per equidominatezza

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}L}\frac{z^{n-1}}{(1+z^2)^{n-2}}\frac{dz}{(1+\frac{\beta-1}{\beta+1}z^2)^2}\rightarrow_{\beta\to 1^+}c_1$$

Quindi per $n\geq 5$

$$\int_{B_\delta(x)}u^2_{x,\beta}(y)dv(y)=c_1c_n^2\omega_{n-1}2^n\frac{\beta-1}{\beta+1}+o(\beta-1)$$

Invece se $n = 4$

$$\int_{B_\delta(x)} u^2_{x,\beta}(y)dv(y) = 16c_2c_4^2\omega_3\frac{\beta-1}{\beta+1}\mid \ln(\beta-1)\mid +o((\beta-1)\mid \ln(\beta-1)\mid)$$

ove c'è da osservare unicamente che

$$c_2 = -\lim_{\beta\to 1^+}\int_0^{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}L}\frac{z^3}{(1+z^2)^2}\frac{dz}{(1+\frac{\beta-1}{\beta+1}z^2)^2}(\ln(\beta-1))^{-1}$$

esiste finito e positivo.

Infine per il terzo termine abbiamo, procedendo come sopra

$\int_{B_\delta(x)}\sin r u^2_{x,\beta}dv(h) = O((\beta-1)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^d(\sin r)^n(\beta-\cos r)^{-(n-2)}dr) = O((\beta-1)^{\frac{n-2}{2}}\cdot$
$\cdot\int_0^L\frac{y^n}{[(\beta-1)+(\beta+1)y^2]^{n-2}}dy) = O((\beta-1)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}}L}\frac{z^n}{(1+z^2)^{n-2}}dz)$

Abbiamo quindi per $n \geq 5$

$$\int_{B_\delta(x)}\sin r u^2_{x,\beta}dv(h) = O((\beta-1)^{\frac{3}{2}}\mid \ln(\beta-1)\mid) = o(\beta-1)$$

mentre per $n = 4$

$$\int_{B_\delta(x)}\sin r u^2_{x,\beta}dv(h) = O((\beta-1)^{\frac{3}{2}}(\beta-1)^{-\frac{1}{2}}) = o((\beta-1)\mid \ln(\beta-1)\mid)$$

Mettendo insieme le precedenti stime otteniamo la tesi.

Lemma 3.5.5 *Dati $x_0 \in S^n$ e $\beta_0 > 1$, l'equazione*

$$-\triangle_h u + \frac{n(n-2)}{4}u = \frac{n+2}{n-2}u_{x_0,\beta_0}^{\frac{4}{n-2}}u \tag{3.23}$$

ammette uno spazio vettoriale S di soluzioni (n+1)-dimensionale della forma

$$S = \{\sum_i \alpha_i\frac{\partial u_{x,\beta}}{\partial x_i}\mid_{x_0,\beta_0} + \alpha_{n+1}\frac{\partial u_{x,\beta}}{\partial\beta}\mid_{x_0,\beta_0} : \alpha_i \in R\}$$

Dimostrazione Introduciamo la carta di proiezione steorografica $(S^n \backslash \{N\}, \pi_N)$ ove $N = (0, .., 0, 1)$ e

$$\pi_N : S^n \backslash \{N\} \to R^n$$

$$(x_1, .., x_{n+1}) \to \pi_N(x) = (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, .., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}})$$

Ricordando che $h = i_* \delta$ ove $i : S^n \to R^{n+1}$ è l'applicazione di inclusione e δ la metrica euclidea standard di R^{n+1}, si può ottenere con conti semplici ma laboriosi che in $(S^n \backslash \{N\}, \pi_N)$

$$h = \frac{4}{(1+ \mid r \mid^2)^2} \delta$$

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{2}{(1+ \mid r \mid^2)} (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij})$$

ove $r = \pi_N(x)$ e δ_{ij} sono i simboli di Kronecker.

Osserviamo che, se $u \in C^\infty(S^n)$ e indichiamo con $\tilde{u} = u \circ \pi_N^{-1}$

$-\triangle_h u + \frac{n(n-2)}{4} u \mid_{r=\pi_N(x)} = -\sum_{i,j} \frac{(1+|r|^2)^2}{4} \delta_{ij} [\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r_i \partial r_j} + \frac{2}{(1+|r|^2)} \sum_k (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik} - r_k \delta_{ij}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r_k}] + + \frac{n(n-2)}{4} \tilde{u} = -\frac{(1+|r|^2)^2}{4} \triangle \tilde{u} - \frac{1+|r|^2}{2} \sum_{i,k} (2 r_i \delta_{ik} - r_k) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r_k} + \frac{n(n-2)}{4} \tilde{u} = -\frac{(1+|r|^2)^2}{4} \triangle \tilde{u} + (n- -2) \frac{1+|r|^2}{2} r \cdot \nabla \tilde{u} + \frac{n(n-2)}{4} \tilde{u}$

Sappiamo che u_{x_0, β_0} è soluzione regolare di

$$-\triangle_h u_{x_0,\beta_0} + \frac{n(n-2)}{4} u_{x_0,\beta_0} = u_{x_0,\beta_0}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

quindi in coordinate stereografiche rispetto al polo nord

$\tilde{u}_{x_0,\beta_0}^{\frac{n+2}{n-2}} = -\frac{(1+|r|^2)^2}{4} \triangle \tilde{u}_{x_0,\beta_0} + (n-2) \frac{1+|r|^2}{2} r \cdot \nabla \tilde{u}_{x_0,\beta_0} + \frac{n(n-2)}{4} \tilde{u}_{x_0,\beta_0} = -(\frac{1+|r|^2}{2})^{\frac{n+2}{2}} \cdot$
$\cdot [(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \triangle \tilde{u}_{x_0,\beta_0} - (n-2)(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n}{2}} r \cdot \nabla \tilde{u}_{x_0,\beta_0} - \frac{n(n-2)}{4} (\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n+2}{2}} \tilde{u}_{x_0,\beta_0}] =$

$= -(\frac{1+|r|^2}{2})^{\frac{n+2}{2}} \triangle [(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}_{x_0,\beta_0}]$

Quindi

$$-\triangle[(\frac{1+\mid r\mid^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}_{x_0,\beta_0}] = [(\frac{1+\mid r\mid^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}_{x_0,\beta_0}]^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Poiché le soluzioni positive della precedente equazione sono conosciute esplicitamente, possiamo affermare che esistono allora $\bar{z} \in R^n$ e $\bar{\mu} > 0$ tali che

$$(\frac{1+\mid r\mid^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}_{x_0,\beta_0}(r) = U_{\bar{z},\bar{\mu}}(r)$$

ove $U_{z,\mu}$ è la talentiana centrata in z con concentrazione μ.

Supponiamo adesso che u sia soluzione di (3.23).

Allora usando una procedura analoga a quella sopra descritta, si ottiene che in coordinate stereografiche rispetto al polo nord

$-\triangle[(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}] = \frac{n+2}{n-2}[(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}_{x_0,\beta_0}]^{\frac{4}{n-2}} [(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}] =$

$= \frac{n+2}{n-2} U_{\bar{z},\bar{\mu}}^{\frac{4}{n-2}} [(\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}]$

Quindi, ricordando il risultato concernente le soluzioni della precedente equazione su R^n, vedi [23] e [14], otteniamo che

$$(\frac{1+\mid r\mid^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u} \in < \frac{\partial U_{z,\mu}}{\partial z_1} \mid_{\bar{z},\bar{\mu}}, .., \frac{\partial U_{z,\mu}}{\partial z_n} \mid_{\bar{z},\bar{\mu}}, \frac{\partial U_{z,\mu}}{\partial \mu} \mid_{\bar{z},\bar{\mu}} >= \tilde{S}$$

Chiaramente

$$\{\frac{\partial u_{x,\beta}}{\partial x_1} \mid_{x_0,\beta_0}, .., \frac{\partial u_{x,\beta}}{\partial x_n} \mid_{x_0,\beta_0}, \frac{\partial u_{x,\beta}}{\partial \beta} \mid_{x_0,\beta_0}\} \subseteq S$$

da cui discende dimS$\geq n+1$.

D'altra parte l'applicazione $u \to (\frac{1+|r|^2}{2})^{-\frac{n-2}{2}} \tilde{u}$ è un applicazione lineare da S in $\tilde{S}$, quindi dimS$\leq$dim$\tilde{S} = n + 1$.

Si ottiene così che S è uno spazio vettoriale (n+1)-dimensionale consistente di tutte e sole le combinazioni lineari delle derivate in x e β di $u_{x,\beta}$ calcolate in x_0 e β_0.

Siamo ora pronti per la dimostrazione dei teoremi 3.5.1 e 3.5.2.

Dimostrazione (Teorema 3.5.1) Usiamo il teorema 3.5.3 nel seguente caso.

Consideriamo $E = H_1^2(S^n)$ dotato della norma

$$\|u\|^2 = \int_{S^n} \mid \nabla u \mid_h^2 dv(h) + \frac{n(n-2)}{4} \int_{S^n} u^2 dv(h)$$

equivalente alla norma usuale di $H_1^2(S^n)$ e indotta dal prodotto scalare

$$(u \mid v) = \int_{S^n} (\nabla u \mid \nabla v)_h dv(h) + \frac{n(n-2)}{4} \int_{S^n} uvdv(h)$$

e $F(u) = \frac{1}{p+1} \int_{S^n} u_+^{p+1} dv(h)$ ove $u_+ = \max\{u, 0\}$, $G(\epsilon, u) = \frac{\epsilon}{2} \int_{S^n} fu^2 dv(h) +$
$+ \frac{1}{2} \int_{S^n} (\lambda_\epsilon - \frac{n(n-2)}{4} - \epsilon f) u^2 dv(h)$.

Le proprietà $(F_0 - F_3)$ e $(G_0 - G_3)$ sono verificate. Infatti

(F_0) ovvia

(F_1) $Z = \{u_{x,\beta} : x \in S^n, \beta > 1\}$ è una C^2 varietà critica (n+1)-dimensionale di

$$f_0(u) = \frac{1}{2} \int_{S^n} \mid \nabla u \mid_h^2 dv(h) + \frac{n(n-2)}{8} \int_{S^n} u^2 dv(h) - \frac{1}{p+1} \int_{S^n} u_+^{p+1} dv(h)$$

al livello

$$b = f_0(u_{x,\beta}) = \frac{1}{n} \int_{S^n} u_{x,\beta}^{p+1} dv(h) = \frac{1}{n} c_n^{\frac{2n}{n-2}} \omega_n$$

(vedi [37])

(F_2) se $v_n \rightharpoonup v$ otteniamo

$\sup_{\|w\|=1} \mid (F''(u_{x,\beta})(v_n - v) \mid w) \mid= p \mid \int_{S^n} u_{x,\beta}^{p-1}(v_n - v) w dv(h) \mid=$

$= O(\|v_n - v\|_{L^2}) \to 0$

per regolarità di $u_{x,\beta}$ e teoremi di inclusione compatta, allora

$$F''(u_{x,\beta})v_n \to F''(u_{x,\beta})v$$

e quindi $F''(z)$ è compatto $\forall z \in Z$

(F_3) discende immediatamente dal lemma 3.5.5 poiché $u \in Ker[I_E - F''(z)]$ se e solo se $\forall w \in H_1^2(S^n)$ $(u - F''(z)u \mid w) = 0$ se e solo se u è soluzione di (3.23) se e solo se $u \in S = T_z Z$

$(G_0 - G_2)$ ovvie

(G_3) scegliamo $\alpha = 1$ e troviamo

$$\Gamma(x, \beta) = \frac{1}{2} \int_{S^n} f(y) u_{x,\beta}(y)^2 dv(y)$$

Osserviamo che per equidominatezza

$$\lim_{\beta \to +\infty} \Gamma(x, \beta) = \frac{1}{2} c_n^2 \bar{f}$$

Per concludere, se $\bar{f} > 0$ e $\inf_{S^n} f < 0$, abbiamo che per il lemma 3.5.4 $\Gamma(x, \beta)$ è negativa per β vicini ad uno non appena scegliamo un punto x in cui f è negativa e $\Gamma(x, \beta)$ tende ad essere positiva per β grandi.

E' possibile quindi trovare (x^*, β^*) punto di minimo assoluto negativo di $\Gamma(x, \beta)$ su $S^n \times (1, +\infty)$ e $A = S^n \times (\beta_1, \beta_2)$ intorno aperto di (x^*, β^*) tali che

$$\inf_{\partial A} \Gamma(x, \beta) = \inf_{S^n \times \{\beta_1, \beta_2\}} \Gamma(x, \beta) > \Gamma(x^*, \beta^*)$$

per β_1 piccolo e β_2 grande.

Per il teorema 3.5.3 esiste allora una soluzione del problema (3.22).

Troviamo infatti una soluzione forte $u_\epsilon \in Z_\epsilon$ di

$$-\triangle_h(u_\epsilon) + \lambda_\epsilon(x)u_\epsilon = (u_\epsilon)_+^{\frac{n+2}{n-2}}$$

Se però per assurdo u_ϵ non fosse positiva, potremmo trovare y_0 punto di minimo assoluto di u_ϵ su S^n con $u_\epsilon(y_0) < 0$ e $\triangle_h u_\epsilon(y_0) \geq 0$. Quindi

$$\lambda_\epsilon(y_0)u_\epsilon(y_0) = (u_\epsilon)_+(y_0)^{\frac{n+2}{n-2}} + \triangle_h u_\epsilon(y_0) \geq 0$$

allora per ϵ piccolo $u(y_0) \geq 0$ che contraddice l'ipotesi iniziale.

La funzione u_ϵ deve essere positiva e per il lemma 3.2.3 sarà identicamente nulla oppure strettamente positiva.

Però u_ϵ non può essere identicamente nulla per ϵ piccolo poiché il suo livello energetico è vicino al livello $b > 0$.

Il caso $\bar{f} < 0$ e $\sup_{S^n} f > 0$ si tratta in modo del tutto analogo, trovando invece che un punto di minimo assoluto negativo di $\Gamma(x, \beta)$ un punto di massimo assoluto positivo.

La dimostrazione del teorema 3.5.2 è uguale alla dimostrazione del teorema precedente.

Osserviamo soltanto che se $\bar{f} = 0$ e f non è identicamente nulla, allora

$$\inf_{S^n} f < 0 < \sup_{S^n} f$$

da cui discende che la funzione $\Gamma(x, \beta)$ ha un punto sia di massimo assoluto positivo sia di minimo assoluto negativo.

Troviamo quindi per il teorema 3.5.3 due soluzioni strettamente positive di (3.22) e distinte.

Basterà scegliere un insieme A per il quale f_ϵ ammetta su

$$A_\epsilon = \{u_{x,\beta} + v_{\epsilon,x,\beta} : (x, \beta) \in A\}$$

sia un punto di massimo che di minimo, i quali dovranno quindi necessariamente fornire due soluzioni distinte di (3.22).

Appendice

Raccogliamo in questo paragrafo tutte le formule che abbiamo usato per il problema di Dirichlet con dato al bordo strettamente positivo e crescita critica di Sobolev. Ricordiamo che

$$U_{x,\lambda}(y) = [n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

è soluzione su R^n di

$$-\triangle u = u^p$$

Si può ottenere facilmente che:

$$\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}(y) = [n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}(n-2)\lambda^{\frac{n+2}{2}} \frac{y_i - x_i}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^{\frac{n}{2}}} = O(\lambda U_{x,\lambda}(y)) \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda}(y) = [n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{n-2}{2} \lambda^{\frac{n-4}{2}} \frac{1-\lambda^2 \mid y-x \mid^2}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^{\frac{n}{2}}} = O(\frac{U_{x,\lambda}(y)}{\lambda})$$

Facendo riferimento a [14] abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 3.5.6 *Sia* $(x,\lambda) \in B_r(x_0) \times R_+$ *e* $\psi_{x,\lambda} = U_{x,\lambda} - PU_{x,\lambda}$, *allora* $\psi_{x,\lambda}$ *è una funzione armonica tale che*

$$0 \leq \psi_{x,\lambda} \leq U_{x,\lambda}$$

$$\psi_{x,\lambda}(y) = [n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{H(x,y)}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + f_{x,\lambda}$$

ove $\psi_{x,\lambda}$ *e* $f_{x,\lambda}$ *verificano*

$$f_{x,\lambda} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}) \qquad \frac{\partial f_{x,\lambda}}{\partial x_i} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}) \qquad \frac{\partial f_{x,\lambda}}{\partial \lambda} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) \tag{3.25}$$
$$\psi_{x,\lambda} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}) \qquad \frac{\partial \psi_{x,\lambda}}{\partial x_i} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}) \qquad \frac{\partial \psi_{x,\lambda}}{\partial \lambda} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$$

ove $x_0 \in \Omega$ *e* $r > 0$ *tale che* $B_{3r}(x_0) \subseteq \Omega$.

A partire da questa proposizione è possibile dimostrare le seguenti relazioni. Poniamo $R = diam(\Omega)$.

$$\int_\Omega U^p_{x,\lambda} \leq O(\int_{B_R(x)} \frac{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^{\frac{n+2}{2}}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} \int_{B_{\lambda R(0)}} (1+ \tag{3.26}$$
$$+ \mid z \mid^2)^{-\frac{n+2}{2}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$$

$$\int_{R^n \setminus \Omega} U^{p+1}_{x,\lambda} \leq O(\int_{R^n \setminus B_r(x)} \frac{\lambda^n}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^n}) = O(\int_{\lambda r}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^n}) = \tag{3.27}$$
$$= O(\frac{1}{\lambda^n})$$

$$\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda} \leq O(\int_{B_R(x)} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^2}) = O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^2}) = \tag{3.28}$$
$$= O(\frac{1}{\lambda^2})$$

$$\int_\Omega U^{\frac{n-1}{n-2}}_{x,\lambda} \leq O(\int_{B_R(x)} \frac{\lambda^{\frac{n-1}{2}}}{(1+\lambda^2 \mid y-x \mid^2)^{\frac{n-1}{2}}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}) O(\int_0^{\lambda R} \rho^{n-1} \cdot \tag{3.29}$$

$$\cdot(1+\rho^2)^{-\frac{n-1}{2}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-1}{2}}})$$

$$(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{\frac{(p-1)(p+1)}{p}})^{\frac{p}{p+1}} \le O(\lambda^2)O(\lambda^{-\frac{n+2}{2}})[O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{4n}{n+2}}})]^{\frac{n+2}{2n}} = O(\frac{1}{\lambda}) \tag{3.30}$$

$$(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{\frac{p+1}{p}})^{\frac{p}{p+1}} \le O(\lambda^{\frac{n-2}{2}})O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})[O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n(n-2)}{n+2}}}]^{\frac{n+2}{2n}} = O(\frac{1}{\lambda^2})O(\lambda) = \tag{3.31}$$

$$= O(\frac{1}{\lambda})$$

$$\int_{R^n\setminus\Omega} U_{x,\lambda}^p \le O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})O(\int_{\lambda r}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+2}{2}}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}) \tag{3.32}$$

$$\int_\Omega \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}) + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^n}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}) \tag{3.33}$$

$$\int_\Omega \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \mid = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}})O(\int_0^{\lambda R} \frac{\mid 1-\rho^2 \mid \rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$$

$$(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{\frac{(p-2)(p+1)}{p-1}})^{\frac{p-1}{p+1}} = O(\lambda^{\frac{6-n}{2}})O(\frac{1}{\lambda^2})[O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n(6-n)}{4}}})]^{\frac{2}{n}} = O(\lambda^{\frac{2-n}{2}})\cdot \tag{3.34}$$

$$\cdot O(\lambda^{n-4}) = O(\lambda^{\frac{n-6}{2}})$$

$$(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{\frac{(p-3)(p+1)}{p-1}})^{\frac{p-1}{p+1}} = O(\lambda^{4-n})O(\frac{1}{\lambda^2})[O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n(4-n)}{2}}})]^{\frac{2}{n}} = O(\lambda^{2-n})\cdot \tag{3.35}$$

$$\cdot O(\lambda^{2n-6}) = O(\lambda^{n-4})$$

$$(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{\frac{p+1}{2}})^{\frac{2}{p+1}} = O(\lambda^{\frac{n-2}{2}})O(\frac{1}{\lambda^{n-2}})[O(\int_0^{\lambda R} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n}{2}}})]^{\frac{n-2}{n}} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})\cdot \tag{3.36}$$

$$\cdot O((\ln\lambda)^{\frac{n-2}{n}}) = O(\frac{1}{\lambda})$$

$$\int_\Omega \mid \nabla PU_{x,\lambda} \mid^2 = \int_\Omega U_{x,\lambda}^p PU_{x,\lambda} = \int_\Omega U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) = \int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) \tag{3.37}$$

$$\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p+1} = \int_\Omega U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) = \int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p+1} + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}}) \tag{3.38}$$

$$\int_\Omega (u_\lambda + h)PU_{x,\theta}^p = \int_{B_r(x)} [(u_\lambda + h)(x) + O(\mid y-x \mid)]U_{x,\theta}^p + O(\frac{1}{\theta^{\frac{n+2}{2}}}) = (u_\lambda + \tag{3.39}$$

$+h)(x)\int_{R^n}U^p_{x,\theta}+O(\frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}}})=\frac{c_2(x)}{\theta^{\frac{n-2}{2}}}+O(\frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}}})$

$$< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i},\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j} >= p\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_j}=O(\int_{\Omega\setminus B_r(x)}U^{p-1}_{x,\lambda}\cdot \tag{3.40}$$

$\cdot\mid\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\mid\mid\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_j}\mid)+O(\frac{1}{\lambda^{n-3}})=O(\frac{1}{\lambda^{n-3}})\ \forall i\neq j$

$$\|\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}\|^2=p\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}=\int_{R^n}U^{p-1}_{x,\lambda}(\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i})^2+O(\frac{1}{\lambda^{n-3}})+O(\lambda^2\cdot \tag{3.41}$$

$\cdot\int_{R^n\setminus\Omega}U^{p+1}_{x,\lambda})=cost.\lambda^2+O(\frac{1}{\lambda^{n-3}})$

$$< \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i},\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} >= p\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}=p\int_{\Omega\setminus B_r(x)}U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\cdot \tag{3.42}$$

$\cdot\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda}+O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})=O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})$

$$\|\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda}\|^2=p\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda}=p\int_{R^n}U^{p-1}_{x,\lambda}(\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda})^2+O(\frac{1}{\lambda^{n}})+O(\frac{1}{\lambda^2}\cdot \tag{3.43}$$

$\cdot\int_{R^n\setminus\Omega}U^{p+1}_{x,\lambda})=\frac{cost.}{\lambda^2}+O(\frac{1}{\lambda^{n}})$

$$< PU_{x,\lambda},\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} >= -\frac{D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)+O(\frac{1}{\lambda^n}) \tag{3.44}$$

$$< PU_{x,\lambda},\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} >= \frac{n-2}{2}\frac{D}{\lambda^{n-1}}H(x,x)+O(\frac{1}{\lambda^{n+1}})$$

Dimostrazione Per la prima abbiamo

$< PU_{x,\lambda},\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} >=\int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}-\int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial \psi_{x,\lambda}}{\partial x_i}=\int_{\Omega\setminus B_r(x)}U^p_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}-\int_{B_r(x)}U^p_{x,\lambda}[[n(n-$

$-2)]^{\frac{1}{p-1}}\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)+O(\frac{|y-x|^4}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}+\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})]+O(\frac{1}{\lambda^n})=-\frac{D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)+O(\frac{1}{\lambda^n})$

per argomenti di disparità e per

$\sum i,j\int_{B_r(x)}U^p_{x,\lambda}(y_i-x_i)(y_j-x_j)\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\partial y_j}(x,x))=\frac{\partial}{\partial x_i}[\sum i\frac{\partial^2 H}{\partial y_i^2}(x,x)](\frac{1}{n}\int_{B_r(x)}U^p_{x,\lambda}\cdot$

$\cdot \mid y-x \mid^2) = 0$

poiché $\triangle H(x,\cdot) = 0$

Per la seconda invece

$< PU_{x,\lambda}, \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} >= \int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda} - \int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial\psi_{x,\lambda}}{\partial\lambda} = O(\frac{1}{\lambda^{n+1}}) + \int_{B_r(x)} U^p_{x,\lambda}[[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}\cdot$

$\cdot\frac{n-2}{2}\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}H(x,x) + O(\frac{|y-x|^4}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}})] + O(\frac{1}{\lambda^{n+1}}) = \frac{n-2}{2}\frac{D}{\lambda^{n-1}}H(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^{n+1}})$

per argomenti di disparità, per

$\sum i,j \int_{B_r(x)} U^p_{x,\lambda}(y_i - x_i)(y_j - x_j)\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j}(x,x) = [\sum i \frac{\partial^2 H}{\partial y_i^2}(x,x)]\frac{1}{n}\int_{B_r(x)} U^p_{x,\lambda}\cdot$

$\cdot \mid y-x \mid^2 = 0$

poiché $\triangle H(x,\cdot) = 0$ e per

$\frac{1}{p+1}\int_{R^n} U^{p+1}_{x,\lambda} = cost. \Rightarrow \lambda, \int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda} = \int_{R^n\setminus\Omega} U^p_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda} = O(\frac{1}{\lambda^{n+1}})$

$$\|\frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial x_i \partial x_j}\| = O(\lambda^2) \tag{3.45}$$

Dimostrazione

$\int_\Omega \mid \nabla\frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j} \mid^2 = O[\int_\Omega (U^{p-2}_{x,\lambda} \mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_j} \mid + U^{p-1}_{x,\lambda} \mid \frac{\partial^2 U_{x,\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} \mid) \mid \frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j} \mid] =$

$= O(\lambda^4\int_\Omega U^{p+1}_{x,\lambda} + \lambda^2\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\int_\Omega U^p_{x,\lambda}) = O(\lambda^4) \Rightarrow \|\frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j}\| = O(\lambda^2)$

ove abbiamo usato $\frac{\partial^2 U_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j} = O(\lambda^2 U_{x,\lambda})$ e $\frac{\partial^2\psi_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$

La prima è ovvia mentre per la seconda osserviamo che

$$\triangle(\frac{\partial^2\psi_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$\frac{\partial^2 U_{x,\lambda}}{\partial x_i\partial x_j} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$$

allora, per il pricipio del massimo

$$\frac{\partial^2 \psi_{x,\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$$

Con dimostrazione analoga si ottiene

$$\|\frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial x_i \partial \lambda}\| = O(1) \tag{3.46}$$

$$\|\frac{\partial^2 PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda^2}\| = O(\frac{1}{\lambda^2}) \tag{3.47}$$

$$\int_\Omega PU_{x,\lambda}^p \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} = -\frac{2D}{\lambda^{n-2}} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}) \tag{3.48}$$

Dimostrazione

$\int_\Omega PU_{x,\lambda}^p \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} = \int_\Omega U_{x,\lambda}^p \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} - p \int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \psi_{x,\lambda} + O(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-2} \psi_{x,\lambda}^2 \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid) =$

$= \int_\Omega U_{x,\lambda}^p \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} - p \int_{B_r(x)} U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \psi_{x,\lambda} + O(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-2} \psi_{x,\lambda}^2 \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid) + O(\frac{1}{\lambda^n})$

Ma abbiamo:

- $\int_\Omega U_{x,\lambda}^p \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} = -\frac{D}{\lambda^{n-2}} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^n})$

per (3.44)

- $-p \int_{B_r(x)} U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \psi_{x,\lambda} = -p \int_{B_r(x)} U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} [[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} \sum_j \frac{\partial H}{\partial y_j}(x,x)(y_j -$
$- x_j) + O(\frac{|y-x|^2}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})] + O(\frac{1}{\lambda^n}) = -p[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) \frac{1}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} \int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}(y_i -$
$- x_i) + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}}) + O(\frac{1}{\lambda^{n-2}} \int_{\lambda r}^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+4}{2}}}) = -\frac{D}{\lambda^{n-2}} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})$

poiché

$p[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \int_{R^n} U_{x,\lambda}^{p-1} \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}(y_i - x_i) = -[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}} \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial y_i}(U_{x,\lambda}^p)(y_i - x_i) = [n(n-$
$-2)]^{\frac{1}{p-1}} \int_{R^n} U_{x,\lambda}^p = \frac{D}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}$

- $O(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-2} \psi_{x,\lambda}^2 \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid) = O(\frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{1}{\lambda^n}) = O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})$

Otteniamo quindi

$$\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} = -\frac{2D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})$$

$$\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} = (\frac{n-2}{2}D + pF)\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}} + O(\frac{1}{\lambda^n}) \tag{3.49}$$

Dimostrazione

$\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} = \int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} - p\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda}\psi_{x,\lambda} + O(\int_\Omega U^{p-2}_{x,\lambda}\psi^2_{x,\lambda} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \mid) =$

$= \int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} - p\int_{B_r(x)} U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda}\psi_{x,\lambda} + O(\int_\Omega U^{p-2}_{x,\lambda}\psi^2_{x,\lambda} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \mid) + O(\frac{1}{\lambda^{n+1}})$

Ma abbiamo che:

- $\int_\Omega U^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} = \frac{n-2}{2}\frac{D}{\lambda^{n-1}}H(x,x) + O(\frac{1}{\lambda^{n+1}})$

per (3.44)

- $p\int_{B_r(x)} U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda}\psi_{x,\lambda} = p\int_{B_r(x)} U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda}[[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}\frac{H(x,x)}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + O(\frac{|y-x|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})] +$

$+ O(\frac{1}{\lambda^{n+1}}) = p[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}\frac{H(x,x)}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\int_{R^n} U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial \lambda} + O(\frac{1}{\lambda^n}) = -pF\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}} + O(\frac{1}{\lambda^n})$

- $O(\int_\Omega U^{p-2}_{x,\lambda}\psi^2_{x,\lambda} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} \mid) = O(\frac{1}{\lambda^{n+1}})$

Otteniamo quindi

$$\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} = (\frac{n-2}{2}D + pF)\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}} + O(\frac{1}{\lambda^n})$$

$$\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} + \tag{3.50}$$

$+ \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}) = -2\alpha^{p+1}\frac{D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x) + \epsilon\frac{\alpha^p}{[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\frac{D}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) + O(\frac{1}{\lambda^{n-1}} + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{\lambda} + \frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} +$

$+ \epsilon^{p+1} + \lambda\epsilon^{2p} + \lambda\epsilon^p \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid + \epsilon \mid 1 - \alpha^{p-1} \mid + \frac{|1-\alpha^{p-1}|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$

Dimostrazione Partiamo dallo sviluppo

$\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda}+v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon)(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i})=$

$=\alpha^{p+1}\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}+p\alpha^p\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon)+O[\int_\Omega PU^{p-2}_{x,\lambda}\mid\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}\mid\cdot$

$\cdot(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon)^2+(\text{se } p>2\longrightarrow)\int_\Omega\mid\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}\mid\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon\mid^p]+\alpha^p\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\cdot$

$\cdot\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}+O(\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon\mid\mid\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\mid+\int_\Omega\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon\mid^p\cdot$

$\cdot\mid\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\mid)$

ove abbiamo usato per $p\leq 2$

$$\mid x+y\mid^{p-1}-x^{p-1}=O((x+\mid y\mid)^{p-2}\mid y\mid)$$

unif. per $x\geq 0$ e per $y\in R$.

Ma abbiamo che:

- $\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}=-\frac{2D}{\lambda^{n-2}}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,x)+O(\frac{1}{\lambda^{n-1}})$ per (3.48)

- $\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}=\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+O(\frac{\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})=O(\frac{\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}})$

per $(x+y)^{p-1}-x^{p-1}=O((x+y)^{p-2}y)$ unif . per $x,y\geq 0$, $\mid\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}\mid\leq\lambda U_{x,\lambda}$,(3.25) e (3.30)

- $\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}h=\int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}h+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=\int_{B_r(x)}U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}h+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=\int_{B_r(x)}U^{p-1}_{x,\lambda}\cdot$

$\cdot\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}[h(x)+\sum_j\frac{\partial h}{\partial x_j}(x)(y_j-x_j)+O(\mid y-x\mid^2)]+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=0+(\int_{B_r(x)}U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}(y_i-$

$-x_i))\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)+O(\int_{B_r(x)}\frac{\lambda^{\frac{n+6}{2}}|y-x|^3}{(1+\lambda^2|y-x|^2)^{\frac{n+4}{2}}})+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=-\frac{1}{p}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\int_{B_r(x)}\frac{\partial}{\partial y_i}(U^p_{x,\lambda})(y_i-x_i)+$

$+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=-\frac{1}{p}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)[\int_{\partial B_r(x)}U^p_{x,\lambda}(y_i-x_i)n_i d\sigma-\int_{B_r(x)}U^p_{x,\lambda}]+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=-\frac{1}{pn}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)d\cdot$

$\cdot\int_{\partial B_r(x)}U^p_{x,\lambda}d\sigma+\frac{1}{p}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)\int_{R^n}U^p_{x,\lambda}+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})=\frac{1}{p[(n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\frac{D}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$

ove abbiamo usato $(x+y)^{p-1}-x^{p-1}=O((x+y)^{p-2}y)$ unif. per $x,y\geq 0$ e

$\mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid \leq \lambda U_{x,\lambda}$, argomenti di disparità per le funzioni integrande e le formule (3.25),(3.28) e (3.32)

- $p\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}u_\epsilon = p\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i}u_\epsilon + O(\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda}\nabla u_\epsilon) + O(\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) =$

$= \int_\Omega \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i}(\epsilon h + u_\epsilon)^p + O(\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}}) = O(\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n}{2}}})$

grazie a (3.25),(3.28),(3.33) ed al fatto che $-\triangle u_\epsilon = (\epsilon h + u_\epsilon)^p$

- $O[\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-2} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid (v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)^2 + (\text{se } p > 2)\int_\Omega \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} +$

$+\epsilon h + u_\epsilon \mid^p] \leq O(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-2} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid (v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)^2) + O(\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-3}\psi_{x,\lambda} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid \cdot$

$\cdot(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)^2) + (\text{se } p > 2)O(\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}} + \lambda\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|^p) \leq O(\frac{\epsilon^2}{\lambda} + \lambda\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|^2)$

ove abbiamo usato $(x+y)^{p-2} - x^{p-2} = O((x+y)^{p-3}y)$ unif. per $x, y \geq 0$,

$\mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid \leq \lambda U_{x,\lambda}$,(3.25),(3.28),(3.33),(3.34) e (3.35)

- $\int_\Omega PU_{x,\lambda}^p \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} = \int_\Omega U_{x,\lambda}^p \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|)$

poiché

$$\int_\Omega U_{x,\lambda}^p v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; \int_\Omega U_{x,\lambda}^p \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} = -p\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial x_i} v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = 0 \quad \forall v \in E_{x,\lambda}$$

e grazie a (3.25) e (3.30)

- $O(\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1} \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid\mid \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} \mid + \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^p \mid \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i} \mid) \leq$

$\leq O(\frac{\epsilon}{\lambda}\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| + \|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| + \epsilon^p\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\| + \|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|^p\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial x_i}\|)$

usando (3.30)

Quindi otteniamo la tesi grazie alle stime (2.11) e (2.12).

$$\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial \lambda} + \quad (3.51)$$

$+\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}) = \alpha^{p+1}[\frac{n-2}{2}D+pF]\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}} - \frac{n-2}{2}\epsilon\alpha^p\frac{D}{[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\frac{h(x)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + O(\frac{1}{\lambda^n} + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} + \frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n}{2}}} +$

$+\frac{\epsilon^{2p}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}} \mid 1-\alpha^{p-1} \mid + \frac{\epsilon}{\lambda^2} \mid 1-\alpha^{p-1} \mid + \frac{\epsilon^p}{\lambda} \mid 1-\alpha^{p-1} \mid)$

Dimostrazione Partiamo dallo sviluppo

$\int_\Omega \mid \alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^{p-1} (\alpha PU_{x,\lambda} + v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)(\alpha\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}) =$

$= \alpha^{p+1}\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} + p\alpha^p\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda}(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}+\epsilon h+u_\epsilon) + O[\int_\Omega PU^{p-2}_{x,\lambda} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} \mid \cdot$

$\cdot(v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)^2 + (\text{se } p > 2 \rightarrow) \int_\Omega \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} \mid\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^p] + \alpha^p\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\cdot$

$\cdot\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} + O(\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda} \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid\mid \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} \mid + \int_\Omega \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^p \cdot$

$\cdot \mid \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} \mid)$

Abbiamo che:

- $\int_\Omega PU^p_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} = (\frac{n-2}{2}D + pF)\frac{H(x,x)}{\lambda^{n-1}} + O(\frac{1}{\lambda^n})$ per (3.49)

- $\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda}v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = \int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda}v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + O(\frac{\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}) = O(\frac{\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})$

per $(x+y)^{p-1} - x^{p-1} = O((x+y)^{p-2}y)$ unif . per $x, y \geq 0$, $\mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid \leq \lambda U_{x,\lambda}$,(3.25) e (3.30)

- $\int_\Omega PU^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda}h = \int_\Omega U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda}h + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) = \int_{B_r(x)} U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda}h + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) =$

$\int_{B_r(x)} U^{p-1}_{x,\lambda}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda}[h(x) + \sum_j \frac{\partial h}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j) + O(\mid y-x \mid^2)] + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) = h(x)\int_{B_r(x)} U^{p-1}_{x,\lambda}\cdot$

$\cdot\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda} + 0 + O(\int_{B_r(x)}(\lambda^{\frac{n}{2}} \mid y-x \mid^2\mid 1 - \lambda^2 \mid y-x \mid^2\mid)(1 + \lambda^2 \mid y-x \mid^2)^{-\frac{n+4}{2}}) =$

$= \frac{1}{p[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}h(x)\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{D}{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}) + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}) = -\frac{1}{p[n(n-2)]^{\frac{1}{p-1}}}\frac{n-2}{2}D\frac{h(x)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}})$

ove abbiamo usato $(x+y)^{p-1} - x^{p-1} = O((x+y)^{p-2}y)$ unif. per $x, y \geq 0$ e $\mid \frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial x_i} \mid \leq \lambda U_{x,\lambda}$, argomenti di disparità per le funzioni integrande e le formule (3.25),(3.28) e (3.32)

- $p\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda}u_\epsilon = p\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial U_{x,\lambda}}{\partial\lambda}u_\epsilon + O(\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\int_\Omega \nabla PU_{x,\lambda}\nabla u_\epsilon) + O(\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) =$

$= \int_\Omega \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda}(\epsilon h + u_\epsilon)^p + O(\frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}}) = O(\frac{\epsilon^p}{\lambda^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon}{\lambda^{\frac{n+4}{2}}})$

grazie a (3.25),(3.28),(3.33) ed al fatto che $-\triangle u_\epsilon = (\epsilon h + u_\epsilon)^p$

Con passaggi del tutto simili a quelli della dimostrazione di (3.50) si ottiene

- $O[\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-2} \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} \mid (v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon)^2 +$ (se $p > 2$) $\int_\Omega \mid \frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda} \mid\mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} +$

$+\epsilon h + u_\epsilon \mid^p] = O(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|^2)$

- $O(\int_\Omega PU_{x,\lambda}^{p-1} \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid\mid \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} \mid + \int_\Omega \mid v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} + \epsilon h + u_\epsilon \mid^p \mid \frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} \mid) \leq$

$\leq O(\frac{\epsilon}{\lambda}\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\| + \|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\| + \epsilon^p\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\| + \|v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}\|^p\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\|)$

- $\int_\Omega PU_{x,\lambda}^p\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} = \int_\Omega U_{x,\lambda}^p\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\|) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\|\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda}\|)$

poiché

$$\int_\Omega U_{x,\lambda}^p v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; \int_\Omega U_{x,\lambda}^p\frac{\partial v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha}}{\partial\lambda} = -p\int_\Omega U_{x,\lambda}^{p-1}\frac{\partial PU_{x,\lambda}}{\partial\lambda}v_{\epsilon,x,\lambda,\alpha} = 0 \quad \forall v \in E_{x,\lambda}$$

e grazie a (3.25) e (3.30)

Otteniamo dalle precedenti la tesi con l'aiuto delle stime (2.11) e (2.12).

Bibliografia

[1] H.Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. (12), 1960, pag. 21-37.

[2] N.Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (22), 1968, pag. 265-274.

[3] T.Aubin, *Equation différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (55), 1976, pag. 269-296.

[4] R.Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, Journal of Differential Geometry (20), 1984, pag. 479-495.

[5] R.Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Communications on Pure and Applied Mathematics (34), 1986, pag. 661-693.

[6] E.Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Diderot Edituer, Arts et Sciences, 1997.

[7] R.Schoen e S.T.Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. (65), 1979, pag. 45-76.

[8] R.Schoen e S.T.Yau, *Proof of the positive-action conjecture in quantum relativity*, Physical Review Letters (42), 1979, pag. 547-548.

[9] R.Schoen e S.T.Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Inventiones Mathematicae (92), 1988, pag. 47-71.

[10] E.Hebey e M.Vaugon, *Remarque sur le problème de Yamabe*, Journal of Functional Analysis (96), 1991, pag. 31-37.

[11] J.M.Lee e T.H.Parker, *The Yamabe problem*, Bulletin of the American Mathematical Society (17), 1987, pag. 37-91.

[12] T.Aubin, *Nonlinear anlysis on manifolds - Monge-Ampère equations*, Grundlehern der Mathematischen Wissenschaften (252), 1982.

[13] L.A.Caffarelli e J.Spruck, *Variational problems with critical Sobolev growth and positive Dirichlet data*, Indiana University Mathematics Journal vol. 39 (1), 1990, pag. 1-18.

[14] O.Rey, *The role of the Green's function in a non-linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent*, Journal of Functional Analysis (89), 1990, pag. 1-52.

[15] A.Ambrosetti e M.Badiale, *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a varational approach*, Ann. Inst. Henri Poincaré (15), 1998, pag. 233-252.

[16] A.Ambrosetti e M.Badiale, *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum*, Proc. Royal Soc. Edimburgh,to appear.

[17] M.G.Crandall e P.H.Rabinowitz, *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Arch. Rational Mech. Anal. (58), 1975, pag. 207-218.

[18] X.Cabré e Y.Martel, *Weak eigenfunctions for the linearization of extremal elliptic problems*, Journal of Functional Analysis,to appear.

[19] A.Ambrosetti e P.H.Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Journal of Functional Analysis (14), 1973, pag. 349-381.

[20] A.Bahri e H.Berestycki, *A perturbation method in critical point theory and applications*, Transactions A.M.S. (267), 1981, pag. 1-32.

[21] A.Bahri, *Thèse de doctorat d'état*, Univ. P. et M. Curie, Paris, 1981.

[22] H.Brezis e L.Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Comm. Pure Appl. Math. (36), 1983, pag. 437-477.

[23] A.Ambrosetti e J.G.Azorero e I.Peral, *Perturbation of* $\triangle u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$*, the scalar curvature problem in* R^n *and related topics*, to appear.

[24] A.Ambrosetti e V.Coti Zelati e I.Ekeland, *Symmetry breaking in Hamiltonian systems*, Jour. Diff. Equat. (67), 1987, pag. 165-184.

[25] S.Pohožaev, *Eigenfunctions of the equation* $\triangle u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. (6), 1965, pag. 1408-1411.

[26] P.L.Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1*, Ann. Inst. Henry Poincaré, analyse non-linéaire (1), 1984, pag. 109-145.

[27] P.L.Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2*, Ann. Inst. Henry Poincaré, analyse non-linéaire (1), 1984, pag. 223-283.

[28] P.L.Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1*, Revista Matemática Iberoamericana vol. 1 (1), 1985, pag. 145-201.

[29] P.L.Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2*, Revista Matemática Iberoamericana vol. 1 (2), 1985, pag. 45-121.

[30] G.Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (110), 1976, pag. 353-372.

[31] H.Brezis e J.L.Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Revista Mátematica de la Universidad Complutense de Madrid (2), 1997, pag. 443-469.

[32] M.Bidaut-Veron e L.Veron, *Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations*, Inventiones Mathematicae (106), 1991, pag. 489-539.

[33] A.Marino e G.Prodi, *Metodi perturbativi nella teoria di Morse*, Boll. U.M.I. (11), 1975, pag. 1-32.

[34] A.Ambrosetti e D.Arcoya e J.Gámez, *Asymmetric bound states of differential equations in nonlinear optics*, to appear.

[35] A.Ambrosetti e M.Badiale e S.Cingolani, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., to appear.

[36] M.Berti e P.Bolle, *Homoclinics and chaotic behaviour for perturbed second order systems*, to appear.

[37] E.Hebey, *Changements de métriques conformes sur la sphère. Le problème de Nirenberg*, Bull. Sc. Math. (114), 1990, pag. 215-242.

[38] N.Ghoussoub, *Duality and perturbation methods in critical point theory*, Cambridge University Press, 1993.

[39] M.Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer, 1996.

[40] A.Bahri e J.M.Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the toplogy of the domain*, Comm. Pure. Appl. Math. (41), 1988, pag. 253-290.