Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

Tutorato PFB

Tutore : Roberto Feola

TUTORATO 1 (13 GENNAIO 2011)

Gruppo 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1. Calcolare il limite seguente

$$\lim_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\log(n!)$$

ESERCIZIO 2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

ESERCIZIO 3. Studiare la funzione $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{\frac{s}{1-s}}\mathrm{d}s$$

tracciandone un grafico approssimativo. Si determini in particolare se la funzione è monotona, convessa e limitata.

ESERCIZIO 4. Determinare la convergenza delle serie

$$\sum_{n\geq 0}\left[e^{\frac{1}{n^2}}-2\cos\frac{1}{n}+1\right]$$

$$\sum_{n\geq 0}\left[e^{\frac{1}{n^2}}-2\cosh\frac{1}{n}+1\right]$$

ESERCIZIO 5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases}\dot{x}=2yx^2(x^2+2y^2-1)\\ \dot{y}=-2xy^2(2x^2+y^2-1)\end{cases}$$

(i) Verificare che il sistema ammette una costante del moto $H(x,y)$ e determinarla.
(ii) Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
(iii) Discutere qualitativamente il moto del sistema.

Gruppo 2 (Geometria)

ESERCIZIO 1. Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2X^2+4XY+5Y^2-4X-2Y+2=0$$

ESERCIZIO 2. Si consideri l'applicazione $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned}F(0,1,2)&=(8,-2+2k,16)\\ F(2,0,-1)&=(-1,-2-2k,-2)\\ F(1,3,-1)&=(4,-7-k,8)\end{aligned}$$

Per ogni valore di k si determini una base per il nucleo e l'immagine di F.
Posto $k = -3$, verificare che F è diagonalizzabile, scrivere una matrice diagonale ad essa associata e una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale tale matrice rappresenta F.

<u>Esercizio 3.</u> Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Mostrare che $V := \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

<u>Esercizio 4.</u> Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. È vero che se A è diagonalizzabile lo è anche A^2?
È vero il viceversa? Dimostrare o trovare opportuni controesempi.

<u>Esercizio 5.</u> Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, dotato di un riferimento cartesiano O_{ijk}, sono date le due rette sghembe di equazioni cartesiane:

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

(i) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s perpendicolare comune a r_1 ed r_2.
(ii) Calcolare la distanza tra r_1 e r_2.
(iii) Sia $P = r_1 \cap s$. Determinare una equazione cartesiana del piano α passante per P, parallelo ad r_2 e perpendicolare al piano $\beta : x + 2y - 3z + 1 = 0$.