Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
30 Gennaio 2008

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)

Sia $\{y_k\}_{k\geq 0}$ una successione di numeri non negativi. Si supponga che, per delle costanti $c, \epsilon > 0$ e $b > 1$, valga la seguente relazione di ricorsione:

$$y_{k+1} \leq c b^k y_k^{1+\varepsilon}.$$

(i) Dimostrare per induzione che

$$y_k \leq c^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon^2} - \frac{k}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^k}.$$

(ii) Se inoltre

$$y_0 \leq c^{\frac{-1}{\varepsilon}} b^{\frac{-1}{\varepsilon^2}}$$

dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = 0.$$

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(1+x^2)^3}.$$

[*Suggerimento.* Aggiungere e togliere ripetutamente x^2 a numeratore.]

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)

Determinare la convergenza delle serie

$$\sum_{n\geq 1} \left[e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cos\frac{1}{n} + 1 \right]$$

$$\sum_{n\geq 1} \left[e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cosh\frac{1}{n} + 1 \right].$$

Esercizio 1.4 (15 punti)

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + \alpha \left(2x^2 y + 2x^4 y\right), \\ \dot{y} = -2x - \alpha \left(2xy^2 + 6x^5 + 4x^3 y^2\right) + \beta \cos t - \gamma y, \end{cases}$$

dove α, β, γ sono parametri reali non negativi.

(i) Per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dimostrare che il sistema descrive un oscillatore armonico con frequenza propria $\omega = 2$.

(ii) Per $\beta = 0$, $\alpha, \gamma > 0$ determinare i punti d'equilibrio e studiarne la stabilità. Dimostrare in particolare che esiste un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e studiarne il bacino d'attrazione.

(iii) Per $\alpha = 0$, $\beta, \gamma > 0$ dimostrare che il sistema ammette un ciclo limite e che tale ciclo limite costituisce un attrattore globale. Cosa succede al ciclo limite nel limite $\beta \to 0$?

Esercizio 1.5 (25 punti)

(i) (5 punti) Sia $Q = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\int_Q x^\alpha y^\beta \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

per gli α e β reali per cui risulta finito.

(ii) (10 punti) Si ricordi che, per $(x,y) \in Q$,

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{k \geq 0} x^k y^k, \qquad \frac{1}{1+xy} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k y^k.$$

Dire se è vero che

$$\int_Q \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \sum_{k \geq 0} \int_Q x^k y^k \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

e

$$\int_Q \frac{1}{1+xy} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_Q x^k y^k \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

(iii) (10 punti) Ricordando che $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ e usando il punto precedente, calcolare

$$\int_Q \frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

e

$$\int_Q \frac{1}{1+xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (7 punti) Enunciare il criterio di Leibniz per la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n b_n;$$

dimostrare anche che, qualora le ipotesi del criterio di Leibniz siano verificate,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n-\sum_{n=1}^{N}(-1)^n b_n\right|\leq b_{N+1}.$$

(ii) (6 punti) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{x}{n+x^2}.$$

Su quale insieme $C\subset\mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n(x)$$

converge puntualmente?

(iii) (6 punti) Su quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ si ha convergenza uniforme per la serie del punto (ii)?

(iv) (6 punti) Dire se è vero che la somma della serie è derivabile su tutto l'insieme C del punto (ii).

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)
Si consideri l'insieme $A := \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ in cui sono definite le seguenti operazioni:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \; ; \quad (a,b)(a',b') = (aa' + 3bb', ab' + a'b).$$

Rispetto a queste operazioni, A è un anello commutativo unitario con zero $(0,0)$ e unità $(1,0)$ ed è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}_7$ con la moltiplicazione scalare definita da

$$c(a,b) = (c,0)(a,b) = (ca, cb).$$

(i) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_5[X] \longrightarrow A\,; \quad \sum a_i X^i \mapsto \sum a_i (0,1)^i$$

è un omomorfismo di anelli.
(ii) Determinare il nucleo Kerφ e l'immagine Imφ e definire l'applicazione canonica

$$\overline{\varphi} : \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{\mathrm{Ker}\varphi} \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi$$

data dal Teorema di Omomorfismo.
(iii) Usando il punto precedente, mostrare che Imφ è un campo finito e determinare il numero dei suoi elementi.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)
Sia A una matrice 2×2 a coefficienti reali, non diagonale; si dimostri che se A è simmetrica e ortogonale allora $\det(A) = -1$.

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)
Sia A una matrice quadrata di ordine n non nulla, a coefficienti reali, che soddisfi l'equazione

$$A^2 = 0.$$

Si dimostri che A non è diagonalizzabile e che $\mathrm{rg}(A) \leq \frac{n}{2}$. Si dia un esempio di matrice di tale tipo se $n = 2$ e $n = 3$.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2X^2 + 4XY - Y^2 + 6Y - 8 = 0.$$

Esercizio 2.5 (25 punti)
Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0, 1, 2) = (8, -2 + 2k, 16)$$

$$F(2, 0, -1) = (-1, -2 - 2k, -2)$$

$$F(1, 3, -1) = (4, -7 - k, 8).$$

Per ogni valore di k si determini una base per il nucleo e l'immagine di F.

Posto $k = -3$, verificare che F è diagonalizzabile, scrivere una matrice diagonale ad essa associata e una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale tale matrice rappresenta F.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si definiscano gli autovalori e gli autospazi di un endomorfismo lineare. Si diano condizioni sufficienti a garantire la diagonalizzabilità di un endomorfismo; si diano esempi di endomorfismi non diagonalizzabili e si enunci il Teorema spettrale.
