PROVA FINALE DI TIPO B e PROVA D'ACCESSO ALLA LAUREA SPECIALISTICA

20-2-2003

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

a) la sufficenza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi (analisi e geometria) e con un totale di almeno 51;

b) il punteggio massimo è 100;

c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (Punti 15)

Dire se la funzione

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(e^x + \frac{2\log\cos x}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$$

ammette limite per $x \to 0+$.

1.2 (Punti 15)

Studiare la funzione $f\colon [0,1) \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{s}{1-s}}\mathrm{d}s$$

tracciandone un grafico approssimativo. Si determini in particolare se la funzione è monotona, convessa e limitata.

1.3 (Punti 15)

Si dimostri che se $f \in C([a,b],\mathbf{R})$, allora f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$. Si enunci e dimostri un teorema sull'invertibilità delle funzioni da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$.

1.4 (Punti 25)

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Dimostrare che f è di classe C^∞ su $\mathbf{R}^2$. Si studino gli eventuali massimi e minimi di f nel cerchio unità $\{(x,y) \quad : x^2+y^2 \le 1\}$. Dire se esiste

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y).$$

1.5 (Punti 25)

Si dimostri che la successione di funzioni

$$f_n(x,y) = \frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}$$

converge puntualmete su tutto $\mathbf{R}^2$. Si dimostri che la convergenza non è uniforme.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (Punti 15)

Calcolare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^n$$

Quali sono gli autovalori di A? Dire se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

2.2 (Punti 15)

Sia b la forma bilineare su $\mathbf{R}^2$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore lineare definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'applicazione così definita:

$$Q(\underline{x}) = b(T(\underline{x}), T(\underline{x})).$$

(i) Verificare che Q è una forma quadratica.

(ii) Scrivere l'espressione di Q e della sua forma polare in coordinate.

(iii) Determinare i vettori isotropi rispetto a Q.

2.3 (Punti 15)

Si enunci il teorema di classificazione delle coniche affini ed euclidee dandone una traccia (il più possibile completa) della dimostrazione.

2.4 (Punti 25)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e U, W_1, W_2 suoi sottospazi.

(a) Si dimostri che $U \cap (W_1 + W_2) \supseteq (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$;

(b) si dia un'esempio in cui non vale l'uguaglianza in (a);

(c) si determini esplicitamente la condizione tra i sottospazi per la quale

$$U \cap (W_1 + W_2) = (U \cap W_1) + (U \cap W_2).$$

2.5 (Punti 25)

Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbf{R}^2$ rispetto a cui:

(i) T sia autoaggiunto;

(ii) T sia unitario.