PROVA FINALE DI TIPO B e PROVA D'ACCESSO ALLA LAUREA SPECIALISTICA

1-7-2003

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

a) la sufficenza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi (analisi e geometria) e con un totale di almeno 51;

b) il punteggio massimo è 100;

c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (Punti 15)

Per m reale si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\int_D \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \int_D \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove il dominio D è dato da

$$D = \{(x,y) \quad : \quad (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

1.2 (Punti 15)

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n! e).$$

1.3 (Punti 15)

Si enunci il teorema delle contrazioni e se ne dia una breve dimostrazione.

1.4 (Punti 15)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1, \\ \dot{y} = 4x\left(4x^2 - 1\right). \end{cases}$$

(i) Verificare che la funzione $H(x,y) = \left(y - 2x^2\right)\left(y - 1 + 2x^2\right)$ è una costante del moto.

(ii) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio.

(iii) Trovare esplicitamente la soluzione con dati iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 2)$.

1.5 (Punti 25)

Si consideri la funzione

$$g(x) = x \sin x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

che si estende per periodicità fuori da $[-\pi, \pi]$. Discutere la convergenza della serie di Fourier di g e calcolarla. Calcolare

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

1.6 (Punti 25)

Sia γ una curva semplice chiusa, che giace nel piano di equazione $ax + by + cz = 0$. Si supponga che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che l'area della regione del piano interna a γ è data da

$$\frac{1}{2} \int_\gamma (bz - cy)\mathrm{d}x + (cx - az)\mathrm{d}y + (ay - bx)\mathrm{d}z.$$

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (Punti 15)

Sia a un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.

2.2 (Punti 15)

In $\mathbb{R}^4$ si costruisca una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ rispetto al prodotto scalare standard tale che $\{e_1, e_3\}$ sia un base del sottospazio $\mathbf{W}^\perp$, dove

$$\mathbf{W} = \langle (1, 2, 1, 0), (0, 2, 1, 0) \rangle.$$

2.3 (Punti 15)

Si enunci il teorema di diagonalizzazione delle forme quadratiche (ovvero delle forme bilineari simmetriche) dandone una traccia (il più possibile completa) della dimostrazione.

2.4 (Punti 15)

Sia K l'insieme di tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{con } a,\ b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,.$$

(a) Mostrare che K è un campo.

(b) Determinare esplicitamente un polinomio irriducibile $f(X)$ dell'anello dei polinomi $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ed un isomorfismo di campi tra l'anello-quoziente $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/\,(f(X))$ e K.

(c) Il gruppo moltiplicativo K^* degli elementi non nulli del campo K forma un gruppo ciclico di ordine 8. Determinarne esplicitamente un generatore.

2.5 (Punti 25)

Classificare ognuna delle coniche seguenti, e trovarne centro e assi di simmetria:

(a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 3 = 0$;

(b) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.

Determinare l'equazione canonica della conica (b).

2.5 (Punti 25)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, $F : V \to V$ un'applicazione lineare, $A \in M_n$ una matrice. Poniamo $r =$ rango di A, $p = \dim \operatorname{Im}(F)$.

(a) Dimostrare che, se $r \neq p$, allora non esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che A è la matrice di F nella base e;

(b) Dimostrare che, per ogni F fissata, esistono delle matrici $A \in M_n$ tali che $r = p$ ma non esiste una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ in cui A è la matrice di F.

Soluzioni PFB del 1 luglio 2003

1 Gruppo I (Analisi)

1.1 (15 punti)

- caso 1

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}}dxdy =$$

se $m = 2 \Rightarrow$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[\log{(x^2+y^2)}]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\log{(2+2y^2+2\sqrt{1+y^2}[*])} - \log{(2+2y^2-2\sqrt{1+y^2}[**])}dy$$

ove $[*]$ non ha zeri, quindi questo integrale non da problemi.

invece $[**]$ si annulla in 0; ma $[**] \approx O(y^2) \Rightarrow$ non da comunque problemi.

se $m \neq 2 \Rightarrow$

$$= -\frac{m-2}{4}\int_{-1}^{1}[(x^2+y^2)^{-\frac{m-2}{2}}]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$= -\frac{m-2}{4}\int_{-1}^{1}(2+2y^2+2\sqrt{1+y^2}[*])^{-\frac{m-2}{2}} - (2+2y^2-2\sqrt{1+y^2}[**])^{-\frac{m-2}{2}}dy$$

ove $[*]$ non ha zeri, quindi questo integrale non da problemi.

Invece $[**]$ si annulla in 0; poché $[**] \approx O(y^2)$ la condizione di integrabilità è: $\frac{m-2}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow m < 3$

- caso 2

$$\int_{2}^{0}\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}}dydx =$$

(sia $\sqrt{1-(x-1)^2} = t$)

se $m = 2 \Rightarrow$

$$= \frac{1}{2} \int_2^0 [\log (x^2 + y^2)]_{-t}^{t} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^0 \log (x^2 + t^2) - \log (x^2 + t^2) dx \equiv 0$$

se $m \neq 2 \Rightarrow$

$$= -\frac{m-2}{4} \int_{-1}^{1} [(x^2 + y^2)^{-\frac{m-2}{2}}]_{-t}^{t} dx =$$

$$= -\frac{m-2}{4} \int_{-1}^{1} (x^2 + t^2)^{-\frac{m-2}{2}} - (x^+ t^2)^{-\frac{m-2}{2}} dx \equiv 0$$

1.2 (15 punti)

Ci basta ricordare che $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ e notare che è sempre possibile spezzare la somma come $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Avremo quindi che

$$n!e = n!(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} [\in \mathbb{N}] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \left[< \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = O(\frac{1}{n}) \right]$$

Ricordiamo inoltre che $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \sin \left(2\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sin \left(2\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \right) [\equiv 0] \cos \left(2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \right) +$$

$$+ \cos \left(2\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \right) \sin \left(2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \right) \left[\xrightarrow{n \to \infty} 0 \right] = 0$$

1.3 (15 punti)

esercizio teorico

1.4 (15 punti)

(i) Si ha $\dot{x} = \partial H/\partial y$ e $\dot{y} = -\partial H/\partial x$, quindi

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0.$$

(ii) I punti d'equilibrio sono i punti $P = (x, y)$ in cui si annulla il campo vettoriale: $\dot{x} = 0$ richiede $y = 1/2$, mentre $\dot{y} = 0$ richiede $x = 0$ oppure $x = \pm 1/2$. Quindi i punti d'equilibrio sono tre: $P_0 = (0, 1/2)$, $P_- = (-1/2, 1/2)$ e $P_+ = (1/2, 1/2)$.

La matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio (x_0, y_0) è data da

$$A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 48x_0^2 - 4 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi i corrispondenti autovalori sono $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$ se $(x_0, y_0) = P_\pm$, mentre sono $\lambda = 0$ se $(x_0, y_0) = P_0$. Quindi $P_\pm$ sono punti d'equilibrio instabile poiché (almeno) un autovalore è positivo.

Per studiare la stabilità di P_0 si consideri la funzione di Lyapunov $W(x, y) = H(x, y) - H(P_0)$ (infatti si trova che P_0 è un punto di minimo). In un intorno $B(P_0)$ del punto P_0 si ha $W(x, y) > 0 \; \forall P \in B(P_0) \setminus \{P_0\}$, $W(P_0) = 0$ e $\dot{W}(P) = 0 \; \forall P \in B(P_0)$. Quindi possiamo applicare il teorema di Lyapunov e concludere che P_0 è un punto d'equilibrio stabile.

(iii) Si ha $H(1, 2) = 0$, quindi il dato iniziale si trova sulla curva di livello $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; H(x, y) = 0\}$, che è data dall'unione delle due curve

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; y = 2x^2\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; y = 1 - 2x^2\}$$

Tale curva di livello è costituita da 8 orbite (2 punti d'equilibrio e 6 archi di curva, su cui il moto è asintotico verso i punti d'equilibrio almeno in una direzione temporale).

Poiché le curve di livello sono superfici invarianti e il dato iniziale si trova sull'arco di curva γ di $\mathcal{C}_1$ a destra di $x = 1/2$, il moto si svolge su tale curva γ: in particolare lungo la traiettoria si deve avere $y = 2x^2$, che inserita nella prima equazione del sistema dà

$$\dot{x} = 4x^2 - 1,$$

che si può risolvere per separazione di variabili. Si trova

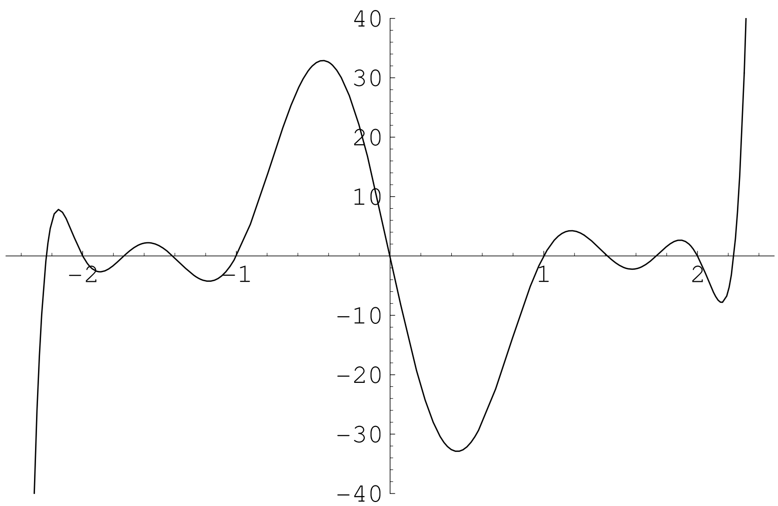
$$x(t) = \frac{1}{2}\,\frac{3 + e^{4t}}{3 - e^{4t}},$$

che è definita per $t \in (-\infty, (\log 3)/4)$: per $t \to -\infty$ la soluzione $x(t)$ tende a $1/2$, mentre per $t \to (\log 3)/4$ si ha $x(t) \to \infty$.

Tenuto conto che si ha $y = 2x^2$ lungo la traiettoria la soluzione $(x(t), y(T))$ è data da

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{3 + e^{4t}}{3 - e^{4t}},$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{3 + e^{4t}}{3 - e^{4t}} \right)^2.$$



1.5 (25 punti)

esercizio fuori del programma pfb

1.6 (25 punti)

Sia A l'area interna a γ. Il piano è ortogonale al vettore $v = (a, b, c)$ che sappiamo essere anche ortonormale dall'ipotesi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dal teorema di Stokes (considerando $F = \frac{1}{2}(bz - cy, cx - az, ay - bx)$):

$$\int_A rot(F) \cdot v = \int_A \frac{1}{2} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ bz - cy & cz - ax & ay - bx \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} dxdydz$$

$$= \int_A \frac{1}{2}(2a, 2b, 2c) \cdot (a, b, c) dxdydz = \int_A (a^2 + b^2 + c^2) dxdydz = \int_A dxdydz$$

OK!

2 Gruppo II (Geometria)

2.1 15 punti

a) $P(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda(1 + a) - 3 + a)$

b) $\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1+a\pm\sqrt{a^2+2a+13}}{2}$ ove $a^2 + 2a + 13 \gneq 0$ e $\frac{1+a\pm\sqrt{a^2+2a+13}}{2} \neq 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ quindi la matrice è sempre diagonalizzabile (possiede sempre tre autovalori distinti!)

2.2 (15 punti)

$v_2 = (1, 2, 1, 0) \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$

$v_4 = (0, 2, 1, 0) - \frac{<v_2,(0,2,1,0)>}{<v_2,v_2>} v_2 = \frac{1}{6}(-5, 2, 1, 0) \Rightarrow e_4 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-5, 2, 1, 0)$

Sia $v_1 = (0, 0, 0, 1)$: è linearmente indipendente e ortogonale a v_1 e v_2 quindi $e_1 = v_1$

Ora notiamo che $(0, 1, 0, 0)$ è linearmente indipendente a v_1, v_2 e v_4; ortogonalizziamolo:

$v_3 = (0, 1, 0, 0) - \frac{<v_2,v_3>}{<v_2,v_2>} v_2 - \frac{<v_1,v_3>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<v_4,v_3>}{<v_4,v_4>} v_4 = (0, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0) \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2, 0)$

2.3 (15 punti)

esercizio teorico

2.4 (15 punti)

a) Noto che $det(A) = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$; inoltre $det(A) = 1$ se $a = 0 \vee b = 0$, $det(A) = 2 \equiv -1(3)$ se $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$ che quindi è un campo.

b) $p(x) = (x^2 + 1)$ è irriducibile. $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(p(x))} = \{a + bx : a, b \in \mathbb{Z}_3\}$.

L'isomorfismo cercato è $\varphi : \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(p(x))} \longrightarrow K; a + bx \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

(La semplice verifica è lasciata al lettore)

c) L'elemento del campo $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ha ordine 8 ed è quindi un generatore!

2.5 (25 punti)

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = -48 \neq 0$

$A_{00} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A_{00}) = 6 \Rightarrow$ è un'ellisse non degenere.

Per trovare il centro risolvo il sistema:

$\begin{matrix} \partial F/\partial x \\ \partial F/\partial y \end{matrix} \begin{cases} 4x + 4y - 6 = 0 \\ 4x + 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (5/2, 1)$

Per determinare gli assi di simmetria cerco gli autovettori:

Autovalori: $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6, 1$

Autovettori: $E(6) : y = 2x \Rightarrow v_1 = (1, 2)$; $E(1) : x = -2y \Rightarrow v_2 = (-2, 1)$

Gli assi di simmetria sono: $s_1 : C + kv_1 \qquad s_2 : C + hv_2 \quad h, k \in \mathbb{R}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = -9 \neq 0$

$A_{00} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A_{00}) = 3 \Rightarrow$ è un'ellisse non degenere.

Per trovare il centro risolvo il sistema:

$\begin{matrix} \partial F/\partial x \\ \partial F/\partial y \end{matrix} \begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-1, 1)$

Per determinare gli assi di simmetria cerco gli autovettori:

Autovalori: $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3, 1$

Autovettori: $E(3) : x = y \Rightarrow v_1 = (1, 1)$; $E(1) : x = -y \Rightarrow v_2 = (1, -1)$

Gli assi di simmetria sono: $s_1 : C + kv_1 \qquad s_2 : C + hv_2 \quad h, k \in \mathbb{R}$.

Iniziamo la canonizzazione:

- porto il centro della conica nell'origine tramite la traslazione: $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow$
  $\Gamma' : 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 3 = 0$
- ruoto la conica in modo da far coincidere gli assi di simmetria con quelli del sistema di riferimento tramite la rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{cases} x'' + y'' \\ x'' - y'' \end{cases} \Rightarrow$$
$\Gamma'' : 2x^2 + \frac{2}{3}y^2 = 1$

2.6 (25 punti)

a) Il rango di un'applicazione è uguale al rango della matrice associata, quindi se per assurdo esistesse una base in cui A è la matrice di F il rango di A dovrebbe essere p ma è $r \neq p$.

b) Basta notare che data la matrice di F, se questa è simile ad una matrice diagonale questa è unica e tutte le diagonali diverse ma con lo stesso rango verificano l'asserto.
Se la matrice non è diagonalizzabile allora, banalmente, non è simile a nessuna matrice diagonale dello stesso rango!