Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
3 Ottobre 2007

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\sin x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1}.$$

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
Studiare l'applicabilità del criterio di Leibniz alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{e^n - n^2}.$$

[*Suggerimento.* Potrebbe essere utile studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x - x^2}$.]

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2\left(6 - 4y - 3x^2\right), \\ \dot{y} = -2x\left(2x^2 - 2 + y - y^3\right). \end{cases}$$

(i) Si dimostri che $H(x,y) = (x^2 - y^3)(y - 2 + x^2)$ è una costante del moto per il sistema.
(ii) Si determinino i punti d'equilibrio.
(iii) Se ne discuta la stabilità.
(iv) Si studi analiticamente la curva di livello $\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = 0\}$ e si determini il verso di percorrenza delle traiettorie corrispondenti.
(v) Si studino qualitativamente le altre curve di livello e si determini il verso di percorrenza delle traiettorie.
(vi) Si dia un'espressione analitica della regione dei dati iniziali che dànno luogo a traiettorie periodiche.

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)
Un nuotatore si trova nel punto A sulla sponda di un lago perfettamente circolare di raggio 2km e vuole raggiungere il punto C diametralmente opposto ad A. Il suo piano è nuotare in linea retta fino a un punto B sulla sponda alla velocità di 2km/h, e poi correre lungo l'arco BC alla velocità di 4km/h. Quale punto B rende minimo il tempo del suo tragitto?

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)
(i) (5 punti) Dimostrare che, per ogni $p > -1$ reale, il seguente integrale converge

$$I_p = \int_0^1 \frac{x^p \log(x)}{x-1} \mathrm{d}x.$$

(ii) (5 punti) Usando un'integrazione per parti, dimostrare che

$$I_p - I_{p+1} = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

(iii) (5 punti) Usando le serie telescopiche, dimostrare che

$$I_p = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(p+k)^2} + I_{p+m}.$$

(iv) (5 punti) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \log x}{x-1} & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

è continua e crescente su $[0,1]$. Da $0 \leq f(x) \leq 1$ dedurre che

$$0 \leq x^{p+m-1} \frac{x \log x}{x-1} \leq x^{p+m-1}.$$

(v) (5 punti) Dedurre dal punto (iv) che

$$0 \leq I_{p+m} \leq \frac{1}{p+m}.$$

Usando questa formula e il punto (iii), dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{x^p \log(x)}{x-1} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}.$$

<u>ESERCIZIO 1.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

Dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia $\mathbb{F}_5$ il campo con 5 elementi e sia

$$p(X) := X^3 + 2X^2 + 4X + 2 \in \mathbb{F}_5[X].$$

(i) Mostrare che l'anello quoziente $K := \mathbb{F}_5[X]/\langle p(X) \rangle$ è un campo.
(ii) Mostrare che $p(X)$ si fattorizza in polinomi di primo grado su K.
(iii) Determinare l'inverso in K della classe $\beta := (X^2 + 3X + 1) + \langle p(X) \rangle$.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Siano $\phi : V \to \mathbb{K}$ e $\psi : V \to \mathbb{K}$ due applicazioni lineari entrambe non nulle. Si dimostri che lo spazio

$$\mathrm{Nucleo}(\phi) \cap \mathrm{Nucleo}(\psi)$$

non ha dimensione $n - 2$ se e soltanto se esiste un numero reale non nullo c tale che $\phi = c\psi$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ sia r la retta di equazioni parametriche

$$(x, y, z) = (1 + t, 1 - t, 0).$$

Si determini una retta s passante per il punto $(0, 2, 0)$ in modo tale che il piano contenente r e s contenga anche l'origine degli assi coordinati e si dimostri che s è unica con queste proprietà.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2(1 + \sqrt{3})x + 2(1 - \sqrt{3})y - 8 + 2\sqrt{3} = 0.$$

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Sia $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali e sia $S \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Si verifichi che, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, assegnare alla coppia (A, B) il numero $\sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$ definisce un prodotto scalare su $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Si esibisca una base ortonormale per S rispetto a tale prodotto scalare e si dimostri che lo spazio A ortogonale a S consiste esclusivamente di matrici antisimmetriche.

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, sia $\mathrm{End}(V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari $f : V \to V$ e sia $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Si dimostri che la scelta di una base per V induce un isomorfismo lineare tra $\mathrm{End}(V)$ e $\mathrm{Mat}_n(\rho)$.