# PFB - Tutorato 1

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

14 maggio 2008

**ANALISI**

**Esercizio 1** ([1, n. 9.13 pag. 342]). *Calolare i seguenti integrali e verificare i risultati:*

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)^2}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x-1)^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$
4. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x(x^2-2x+1)}\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(1-x)}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-3x+2)}$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)(x^2+1)}$
8. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3(x-1)}\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x$

**Esercizio 2** ([2, n. 12.30 pag. 63]). *Si calcoli:*

1. $\displaystyle\int_I (x+y^2)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. $\displaystyle\int_I x^2 \arctan(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
3. $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
4. $\displaystyle\int_I \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
5. $\displaystyle\int_I \frac{y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
6. $\displaystyle\int_I x^2 e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

*dove I è il cerchio di raggio 1 con centro in 0.*

**Esercizio 3** (PFB 01/02/07, n. 1.2). *Calcolare*

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3(t)}.$$

**Esercizio 4** (PFB 03/10/06, n. 1.5). *Si studi l'integrabilità e si calcoli l'integrale della funzione*

$$f(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

*sul dominio*

$$D = \{(x,y) : y^4 \le 4x, x \le 4y^4\}.$$

**GEOMETRIA**

**Esercizio 5** (PFB 02/02/05, n. 2.3). *Sia $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ una matrice quadrata; discutere le seguenti affermazioni:*

1. *A è diagonalizzabile $\Rightarrow A^2$ è diagonalizzabile;*
2. *$A^2$ è diagonalizzabile $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 6** (PFB 01/02/06, n. 2.4). *Sia $(,) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V e sia W un suo sottospazio lineare. Consideriamo il sottospazio lineare $W^\perp = \{v \in V | (v,w) = 0$ per ogni $w \in W\}$. Dimostrare che:*

*(i)* $W \subset (W^\perp)^\perp$

*(ii)* $W^\perp = [(W^\perp)^\perp]^\perp$

*L'inclusione del punto (i) è sempre stretta? Dimostrare o dare un controesempio.*

**Esercizio 7** (Logica lineare - Semantica delle fasi). *Sia $\langle M, \cdot, i\rangle$ un monoide abeliano con operazione $\cdot$ ed elemento neutro i. A partire da esso, possiamo considerare il monoide $\langle \mathcal{P}(M), \cdot, \{i\}\rangle$ dove se $F, G \in \mathcal{P}(M)$ allora $F \cdot G := [x \cdot y | x \in F, y \in G]$. Ora definiamo l'implicazione o aggiunta come $F \multimap G := [x | \forall y \in F, y \cdot x \in G]$. In un ambito più generale (se si ha a che fare con monoidi non commutativi) si può distinguere tra implicazione a destra $F \multimap G$ e implicazione a sinistra $G \circ\!\!- F := [x | \forall y \in F, x \cdot y \in G]$. Dato $F \subseteq M$, definiamo $\sim F :=: F^\perp := F \multimap \underset{\sim}{\perp} = [x | \forall y \in F, yx \in \underset{\sim}{\perp}]$.*

*Dimostrare le seguenti proprietà:*

1) $F \subseteq \sim\sim F$;

2) $F \subseteq G \Rightarrow \sim G \subseteq \sim F$;

3) $F \subseteq G \Rightarrow \sim\sim F \subseteq \sim\sim G$;

4) $\sim\sim\sim F \subseteq \sim F$ ($\Rightarrow \sim F = \sim\sim\sim F$).

**Esercizio 8** (PFB 03/10/07, n. 2.4). *Sia $Mat_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali e sia $S \subset Mat_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Si verifichi che, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, assegnare alla coppia $(A, B)$ il numero $\sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$ definisce un prodotto scalare su $Mat_2(\mathbb{R})$. Si esibisca una base ortonormale per S rispetto a tale prodotto scalare e si dimostri che lo spazio A ortogonale a S consiste esclusivamente di matrici antisimmetriche.*

## Riferimenti bibliografici


[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1*. Bollati Boringhieri, 2002.

[2] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri, 2003.

# PFB - Tutorato 1

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

14 maggio 2008

## ANALISI

**Es. 2** Sfruttando la linearità dell'integrale e la simmetria del dominio $I$ e passando in coordinate polari, si può semplificare il calcolo con Fubini di alcuni integrali in questo modo:

$$\int_I x^2 \arctan(x^2+y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_I (x^2+y^2)\arctan(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\arctan(r^2) r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \pi\int_0^1 r^3\arctan(r^2)\,\mathrm{d}r.$$

**Es. 3** Applicando il cambio di variabile $\sin t = x$ si passa all'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^2}.$$

Con qualche semplice conto si ottiene che

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{-x/4+1/2}{(x-1)^2} + \frac{x/4+1/2}{(x+1)^2}.$$

Il risultato finale è $\frac{1}{4}\ln 3 + \frac{7}{12}$.

**Es. 4** Osserviamo che la funzione è continua sul dominio $D$ tranne che nell'origine, dove però ha una discontinuità integrabile. Calcoliamo l'integrale usando Fubini, ma prima riscriviamo l'integrale come

$$\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \sqrt[4]{x/4}\le|y|\le\sqrt[4]{4x}\}} \frac{|y|}{\sqrt{x}(1+x^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \sqrt[4]{x/4}\le y\le\sqrt[4]{4x}\}} \frac{y}{\sqrt{x}(1+x^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{+\infty}\left(\int_{\sqrt[4]{x/4}}^{\sqrt[4]{4x}} y\,\mathrm{d}y\right)\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Svolgiamo il calcolo facendo prima l'integrale in $\mathrm{d}y$:

$$2\int_0^{\infty}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt[4]{x/4}}^{\sqrt[4]{4x}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{4x}-\sqrt{x/4}}{\sqrt{x}(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1/4}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{3/2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[\arctan(x)]_0^{\infty} = \frac{3}{4}\pi.$$

## GEOMETRIA

**Es. 5** Supponiamo che $A$ sia diagonalizzabile, e sia $Q$ t.c. $D = QAQ^{-1}$ è diagonale, allora $D^2 = (QAQ^{-1})(QAQ^{-1}) = Q(A^2)Q$ è diagonale; il viceversa non è vero: sia $n > 1$ se $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora $A$ ha $n$ autovalori nulli, ma non è diagonalizzabile (se lo fosse, nella base diagonale sarebbe la matrice nulla che però è nulla in qualsiasi base).

**Es. 6** (i) Si ha $W^\perp = \{v \in V | (v,w) = 0$ per ogni $w \in W\}$ e $(W^\perp)^\perp = \{v \in V | (v,w) = 0$ per ogni $w \in W^\perp\}$. Sia $v \in W$, facciamo vedere che $v \in (W^\perp)^\perp$: dobbiamo far vedere che $(v,w) = 0$ per ogni $w \in W^\perp$; ma $(v,w) = (w,v) = 0$ per definizione di $W^\perp$. (ii) Poiché se $A \subseteq B$ allora $B^\perp \subseteq A^\perp$ (dato che $B^\perp = A^\perp \cap (B\backslash A)^\perp$), allora $W \subseteq (W^\perp)^\perp \Rightarrow ((W^\perp)^\perp)^\perp \subseteq W^\perp$. D'altra parte, per il punto precedente, ponendo $\bar{W} = W^\perp$ si ha $W^\perp = \bar{W} \subseteq (\bar{W}^\perp)^\perp = ((W^\perp)^\perp)^\perp$, ovvero l'inclusione opposta.

**Es. 7**
1) $\sim F$ è l'insieme di quegli elementi che moltiplicati (a sinistra) per un qualsiasi elemento di $F$ vanno in $\underset{\sim}{\rfloor}$. Analogamente $\sim\sim F$ è l'insieme di quegli elementi che moltiplicati (a sinistra) per un qualsiasi elemento di $\sim F$ vanno in $\underset{\sim}{\rfloor}$: poiché il monoide è commutativo, tra questi ci sono evidentemente gli elementi di $F$.
2) $\sim G = [x | \forall y \in G, yx \in \underset{\sim}{\rfloor}] = [x | \forall y \in F, yx \in \underset{\sim}{\rfloor}] \cap [x | \forall y \in (G\backslash F), yx \in \underset{\sim}{\rfloor}] = \sim F \cap \sim (G\backslash F) \subseteq \sim F$.
3) Applicando due volte la proprietà appena dimostrata $F \subseteq G \Rightarrow \sim G \subseteq \sim F \Rightarrow \sim\sim F \subseteq \sim\sim G$.
4) Dalla seconda proprietà, ponendo $G = \sim\sim F$ otteniamo $\sim\sim\sim F \subseteq \sim F$. L'inclusione opposta segue dalla prima proprietà mettendo $\sim F$ al posto di $F$.

**Es. 8** Dimostriamo che $\sum_{ij} a_{ij}b_{ij}$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva. $(A, B+C) = \sum_{ij} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij} + \sum_{ij} a_{ij}c_{ij} = (A,B) + (A,C)$; $(A,B) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij} = \sum_{ij} b_{ij}a_{ij}) = (B,A)$; $(\lambda A, B) = \sum_{ij}(\lambda a_{ij})b_{ij} = \lambda\sum_{ij} a_{ij}b_{ij} = \lambda(A,B)$; $(A,A) = \sum_{ij} a_{ij}^2 \ge 0$ (dove vale l'uguale sse $a_{ij} = 0$ per ogni $i, j$, ovvero $A = 0$). È facile verificare che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ è una base ortonormale per $\mathcal{S}$. $(S,A) = s_{11}a_{11} + s_{12}a_{12} + s_{12}a_{21} + s_{22}a_{22} = s_{11}a_{11} + s_{12}(a_{12}+a_{21}) + s_{22}a_{22} = 0\ \forall s_{11}, s_{12}, s_{22} \in \mathbb{R} \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0$ e $a_{12} = -a_{21}$.

# PFB - Tutorato 2

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

22 maggio 2008

**ANALISI**

**Esercizio 1** ([1, n. 1.9 pag. 28]). *Posto* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, *dimostrare per induzione che si ha* $s_{2^n} > \frac{n}{2}$.

**Esercizio 2** (PFB 01/02/06, n. 1.2). *Si consideri il polinomio*

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - 10x + 100.$$

1) *Dimostrare che, se n è pari, allora P ha almeno una radice reale.*
2) *Studiare il segno della derivata di P e il limite di P a* $+\infty$ *e* $-\infty$, *se n è pari.*
3) *Studiare il segno della derivata di P e il limite di P a* $+\infty$ *e* $-\infty$, *se n è dispari.*
4) *Dimostrare che*

$$10^{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{-n}{n+1} + 100 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

5) *Dimostrare che P non ha zeri se n è dispari, e ha un solo zero se n è pari.*

**Esercizio 3** (PFB 03/10/06, n. 1.2). *Sia* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c.$$

*Si dimostri che*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = c.$$

**Esercizio 4** (PFB 13/06/07, n. 1.1). *Sia* $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali: si definisca*

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(i) *Dimostrare che se* $a_n \to l$, *allora anche* $s_n \to l$.

(ii) *Dimostrare che se* $a_n$ *è monotona crescente, allora anche* $s_n$ *è monotona crescente.*

**Esercizio 5** (PFB 13/06/07, n. 1.3). *Calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$$

**GEOMETRIA**

**Esercizio 6.** *Mostrare che* $\mathbb{Z}_n$ *contiene un elemento nilpotente a se e solo se esiste* $h \in \mathbb{N}$ *t.c.* $h^2 | n$.

**Esercizio 7** (PFB 22/06/05, n. 2.3). *Dimostrare che – in dimensione 2 – il determinante*

$$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \mapsto \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

*è una forma bilineare antisimmetrica. Scrivere la sua matrice associata (rispetto alla base standard di* $\mathbb{R}^2$*).*

**Esercizio 8** (PFB 01/02/06, n. 2.3). *Sia* $L : V \to V$ *un endomorfismo lineare dello spazio vettoriale V e supponiamo che* $v \in V$ *sia tale che* $L^m v = 0$ *ma* $L^{m-1}v \neq 0$, *per qualche* $m \in \mathbb{N}$. *Mostrare che* $v, Lv, \ldots, L^{m-1}v$ *sono linearmente indipendenti.*

**Esercizio 9** (PFB 03/10/06, n. 2.1). *Considerare lo spazio vettoriale* $\mathcal{M}$ *delle matrici reali quadrate di ordine n. Mostare che le matrici simmetriche* $\mathcal{S} := \{M \in \mathcal{M} : M = {}^tM\}$ *e le matrici antisimmetriche* $\mathcal{A} := \{M \in \mathcal{M} : M = -{}^tM\}$ *formano due sottospazi lineari di* $\mathcal{M}$ *e che* $\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

**Esercizio 10** (PFB 01/02/07, n. 2.5). *Una matrice* $A = (a_{ij})$ *si dice triangolare superiore se* $a_{ij} = 0$ *per gli* $i, j$ *tali che* $i > j$ *e si dice strettamente triangolare superiore se* $a_{ij} = 0$ *per gli* $i, j$ *tali che* $i \geq j$. *Sia* $TS_n$ *lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine n che sono triangolari superiori e sia* $STS_n$ *lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine n che sono strettamente triangolari superiori.*
*Si dimostri che se* $A, B \in TS_n$ *anche* $AB \in TS_n$. *È vero che* $TS_n$ *forma un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne?*
*Si dimostri che se* $A \in STS_n$ *allora A soddisfa l'equazione* $A^n = 0$; *si dimostri che se A è di ordine 2,* $A \in TS_2$ *e* $A^2 = 0$ *allora* $A \in STS_2$.

## Riferimenti bibliografici


[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1*. Bollati Boringhieri, 2002.

# PFB - Tutorato 2

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

22 maggio 2008

## ANALISI

Es. 1 Se $n = 0$, chiaramente $s_{2^0} = s_1 = 1 > 0$. Supponiamo vera la tesi per $n$ e dimostriamola per $n+1$:

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ termini} \geq \text{ di } \frac{1}{2^{n+1}}} > s_{2^n} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Es. 3 Definizione di limite: $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x \geq M \, |f(x) - c| \leq \epsilon$. Quindi

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - c \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - cx\right|}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \left|f(t) - c\right|\,\mathrm{d}t}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^M \left|f(t) - c\right|\,\mathrm{d}t}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{\int_M^x \left|f(t) - c\right|\,\mathrm{d}t}{x}$$
$$\leq 0 + \lim_{x\to\infty} \epsilon \frac{x - M}{x} = \epsilon.$$

Il primo limite è 0 perché, essendo $f$ continua su $[0, +\infty)$, allora $|f(x) - c|$ ammette massimo su $[0, M]$ per Weierstrass e pertanto il numeratore è limitato.

In alternativa, poiché $f$ è continua, allora la sua primitiva è $C^1$; abbiamo dunque (se $c \neq 0$) una forma indeterminata della forma $sgn(c)\infty$ su $\infty$ e quindi siamo nelle ipotesi per applicare de l'Hôpital, da cui la tesi.
Se $c = 0$ allora se l'integrale di $f$ è convergente, non c'è alcuna forma indeterminata ma semplicemente il limite è 0; altrimenti $\lim_{x\to\infty} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ che è 0 per de l'Hôpital (visto che $\int_0^\infty |f| \geq |\int_0^\infty f| = \infty$).

Es. 4 (i) Per ogni $\epsilon > 0$ sia $n_0 \gg 0$ tale che $l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Allora

$$s_n = \frac{a_1 + \ldots a_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_n}{n}, \qquad \frac{a_1 + \ldots a_{n_0}}{n} \to 0,$$
$$l - \epsilon = \lim_{n\to\infty} (l - \epsilon) \frac{(n - n_0)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} (l + \epsilon) \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_n}{n} = l + \epsilon.$$

(ii) Dimostriamo che $s_{n+1} \geq s_n$:

$$n[a_1 + \cdots + a_{n+1}] \geq (n+1)[a_1 + \cdots + a_n]$$
$$n[a_1 + \cdots + a_n] + na_{n+1} \geq n[a_1 + \cdots + a_n] + [a_1 + \cdots + a_n]$$
$$na_{n+1} \geq [a_1 + \ldots a_n]$$

le disuguaglianze precedenti sono equivalenti, e l'ultima segue sommando da 1 a $n$ le diseguaglianze $a_{n+1} \geq a_i$.

Es. 5 Utilizziamo i seguenti sviluppi in serie di Taylor:

$$\log(1+y) = \int_0^y \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3) \qquad \sqrt{1+q} = 1 + \frac{q}{2} + O(q^2)$$
$$\arctan(z) = \int_0^z \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \,\mathrm{d}t = z - \frac{z^3}{3} + O(z^5) \qquad e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + O(w^3).$$

Si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1 + x\arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1} = \lim_{x\to0} \frac{[x(x - \frac{x^3}{3})] - \frac{[x(x - \frac{x^3}{3})]^2}{2} - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + 1 + O(x^6)}{x^4 + O(x^8)}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)}{x^4 + O(x^8)} = \lim_{x\to0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + O(x^6)}{x^4 + O(x^8)} = -4/3.$$

Es. 6 Supponiamo che $\exists h : h^2|n$, allora $n = ch^2$ e quindi $ch$ è nilpotente: $(ch)^2 = c(ch^2) \equiv_n 0$.
Viceversa, dimostriamo che se esiste $a$ t.c. $a^k = 0$ per qualche $k > 0$ allora $n$ ha un fattore quadratico. Per assurdo, supponiamo che $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_l$, dove $p_i \neq p_j \forall 1 \leq i < j \leq l$. Allora posto $x = a^k$, per il teorema cinese dei resti, poiché $MCD(p_i, p_j) = 1 \forall i \neq j$, $x$ è l'unico elemento di $\mathbb{Z}_n$ t.c.

$$\begin{cases} x &= 0 \pmod{p_1} \\ &\vdots \\ x &= 0 \pmod{p_l} \end{cases}$$

D'altra parte, nel dominio $\mathbb{Z}_{p_i}$, l'equazione $a^k = 0 \pmod{p_i}$ è equivalente a $a = 0 \pmod{p_i}$. Quindi, riusando il teorema cinese dei resti, si ha che $a \in \mathbb{Z}_n$ è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} a &= 0 \pmod{p_1} \\ &\vdots \\ a &= 0 \pmod{p_l} \end{cases}$$

ovvero $a = 0 \pmod{n}$.

Es. 8 Ragioniamo per assurdo: siano $a_0, \ldots, a_{m-1}$ non tutti nulli t.c. $a_0 v + a_1 Lv + \ldots a_{m-1} L^{m-1} v = 0$. Allora, applicando ripetutamente $L$ si hanno le seguenti equazioni (tenendo conto che $L^m v = 0$ e che $L0 = 0$)

$$\begin{aligned} a_0 Lv + a_1 L^2 v + \cdots + a_{m-2} L^{m-1} v &= 0 \\ &\vdots \\ a_0 L^{m-2} v + a_1 L^{m-1} v &= 0 \\ a_0 L^{m-1} v &= 0 \end{aligned}$$

Dall'ultima, poiché per ipotesi $L^{m-1} v \neq 0$, si ricava $a_0 = 0$. Sostituendo $a_0 = 0$ nella penultima equazione si ricava che anche $a_1 = 0$ e così via. Dunque $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$.

Es. 9 Ogni matrice $M$ si scrive come $A + S$, dove $A = \frac{M - M^t}{2} \in \mathcal{A}$ e $S = \frac{M + M^t}{2} \in \mathcal{S}$. Le proprietà dei sottospazi lineari sono una semplice verifica.

Es. 10 Dimostriamo che se $A, B \in TS_n$ anche $AB \in TS_n$: siano dunque $a_{ij} = (A)_{ij}$ e $b_{ij} = (B)_{ij}$, mostriamo che $(AB)_{ij} = 0$ se $i > j$. Poiché $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, ci basta dimostrare che $a_{ik} b_{kj} = 0$ per ogni $k$ se $i > j$, ovvero dimostrare che

$$\forall k (i > j \Rightarrow (a_{ik} = 0 \vee b_{kj} = 0)).$$

Distinguiamo due casi: se $i > k$ allora $a_{ik} = 0$; altrimenti, se $i \leq k$, allora $k \geq i > j \Rightarrow k > j \Rightarrow b_{kj} = 0$.

$TS_n$ non forma un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne se $n > 1$: nonostante ci sia l'elemento neutro (matrice identità) e l'insieme $TS_n$ sia chiuso rispetto all'operazione, non tutti gli elementi hanno un inverso. Basta prendere una matrice con uno o più zeri sulla diagonale.

Dimostriamo ora che se $A \in STS_n$ allora $A^n = 0$. Se $n = 1$ allora $A^n = A = 0$. Nel caso $n = k + 1$ allora $A^n = AA^k = AB$. Poiché $rg(A) \leq n - 1$ (visto che l'ultima riga è nulla), dato che $rg(AB) \leq rg(A)$ (dove l'uguale vale se e solo se $rg(B) = n$), allora $rg(A^n) < rg(A^{n-1})$. Ovvero $rg(A^n) + 1 \leq rg(A^{n-1})$. Iterando, abbiamo che $rg(A^n) + n - 1 \leq rg(A) \leq n - 1$. In conclusione $rg(A^n) \leq 0$, cioé $A = 0$.

Ovviamente non è vero che se $A$ è di ordine 2 e $A^2 = 0$ allora $A \in STS_2$ (ad esempio perché se $A^2 = 0$ allora $({}^tA)^2 = 0$, ma ${}^tA$ sarebbe strettamente triangolare inferiore). Quello che è vero è che se $A \in TS_2$ e $A^2 = 0$ allora $A \in STS_2$. Infatti, se $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ 0 & a_{22}^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0 \Rightarrow A \in STS_2.$$

# PFB - Tutorato 3

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

30 maggio 2008

## ANALISI

**Esercizio 1** ([2, n. 10.31 pag 270]). *Sia* $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. *Si dimostrino le seguenti proprietà:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ (\forall z); \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(n+1) = n!\ (n \in \mathbb{N}); \quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\ (n \in \mathbb{Z}_+).$$

**Esercizio 2** ([3, n. 10.7 pag. 400]). *Risolvere le seguenti equazioni differenziali:*

| | | |
|---|---|---|
| 1.$u' = e^{-u}$ | 5.$u' = 1 + u^2$ | 9.$u' = u(u-1)(2t-1)$ |
| 2.$u' = tu^2$ | 6.$u' = u^2 + u$ | 10.$u' = (1+2t)e^{-u}$ |
| 3.$u' = \dfrac{u+1}{t+1}$ | 7.$u' = t(1+u)$ | 11.$tu' + u^2 = 3u - 2$ |
| 4.$u' = \dfrac{t}{u}$ | 8.$u' = \dfrac{t+\sin t}{u}$ | 12.$\dfrac{tu'}{u} = 1 + 4t^4$ |

**Esercizio 3** ([4, n. 13.5]). *Trovare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni, e dimostrare che la convergenza non è uniforme in* $[0,\pi]$.

1. $\sqrt[n]{\sin x}$ 2. $\sin^n x$ 3.$\dfrac{nx}{1+n^4x^4}$ 4.$\dfrac{nx}{1+nx}$

**Esercizio 4** (PFB 22/06/05, n. 1.1). *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

*1) Determinare il dominio di $f$ e dire se $f$ è pari o dispari.*

*2) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0+} f(x)$.*

*3) Dimostrare che $f$ si può estendere con continuità a una funzione $\tilde{f}$ definita su tutto $\mathbb{R}$.*

*4) Dimostrare che $\tilde{f}$ è Lipschitz.*

**Esercizio 5** (PFB 13/06/07, n. 1.2). *Sia* $f : [0,+\infty)$ *la funzione definita da*

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

*(i) Si verifichi che*

$$f(x) = \int_e^{e^x} \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in (0,\infty)$$

*(ii) Si dimostri che $f$ è continua crescente e si dica per quali $x \in \mathbb{R}_+$ si ha $f(x) \geq 0$.*

*(iii) Si dimostri che, se $x \geq 1$, allora*

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x) \leq e^x - e$$

*mentre se $x \in (0,1]$,*

$$e \log x \leq f(x) \leq (1+x)\log(x).$$

*(iv) Si calcolino i limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} x f(x).$$

**Esercizio 6** (PFB 03/10/07, n. 1.2). *Studiare l'applicabilità del criterio di Leibniz alla serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^3}{e^n - n^2}$$

[Suggerimento. *Potrebbe essere utile studiare la funzione* $f(x) = \frac{x^3}{e^x - x^2}$.]

## GEOMETRIA

**Esercizio 7** ([1, n. 5. pag. 161]). *Si provi che un campo $\mathbb{K}$ possiede solamente gli ideali banali (ossia $\{0\}$ e $\mathbb{K}$).*

**Esercizio 8** (PFB 01/07/03, n. 2.1). *Sia $a$ un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

*(a) Calcolare il polinomio caratteristico di $A$;*

*(b) determinare i valori di $a$ per i quali $A$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 9** (PFB 07/10/05, n. 2.4). *Dimostrare che l'insieme di tutte le funzioni $y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione differenziale*

$$\ddot{y} - y = 0$$

*è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$.*

**Esercizio 10** (PFB 01/02/06, n. 2.1). *Trovare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste una matrice quadrata reale $M$ tale che $A = M^tM$, dove*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 8 \end{pmatrix}$$

*Trovare, inoltre $M$ quando $k = \sqrt{7}$.*

**Esercizio 11** (PFB 01/02/06, n. 2.2). *Siano $\alpha_n, \beta_n$ i numeri interi definiti da $(3+4i)^n \equiv \alpha_n + \beta_n i$, per $n \geq 1$. Dimostrare, per induzione su $n$, che risulta $\alpha_n \equiv 3 \pmod 5$ e $\beta_n \equiv 4 \pmod 5$, per ogni $n \geq 1$.*
*Stabilire inoltre se $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ è una radice $m$-sima dell'unità per qualche $m \geq 1$.*

**Esercizio 12** (PFB 13/06/07, n. 2.2). *Siano $A$ e $B$ due matrici $n \times n$. Si dimostri che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (con $\mathrm{tr}$ si denota la traccia, cioé la somma degli elementi diagonali di una matrice).*

## Riferimenti bibliografici


[1] Giulia Maria Piacentini Cattaneo. *Algebra: un approccio algoritmico.* Decibel, 2007.

[2] Luigi Chierchia. *Lezioni di Analisi matematica 2.* Aracne, 2002.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1.* Bollati Boringhieri, 2002.

[4] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2.* Bollati Boringhieri, 2003.

# PFB - Tutorato 3

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

30 maggio 2008

## ANALISI

Es. 1 $\Gamma(1/2)$ si può calcolare usando le coordinate polari o a partire dall'integrale della densità di una gaussiana standard. Il resto, una volta dimostrato con una integrazione per parti che $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, è immediato per induzione.

Es. 3 Le funzioni 1, 2 e 4 sono discontinue rispettivamente in 0, $\pi/2$ e 0. La 3 vale identicamente $1/2$ su $x = 1/n$ e non va a zero (limite puntuale).

Es. 6 La funzione $f(x)$ è definitivamente decrescente a zero (polinomio su esponenziale), quindi $0 \leq f(n) \searrow 0$ definitivamente.

## GEOMETRIA

Es. 7 Se $I$ è un ideale non banale contiene $i \neq 0$ e poiché siamo in un campo, $i$ è invertibile. Quindi $1 = i \cdot i^{-1} \in I$ per definizione di ideale, da cui $x = 1 \cdot x \in I \; \forall x$ per la stessa ragione. Ovvero $\{0\} \subsetneq I \Rightarrow I = \mathbb{K}$

Es. 12

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = tr(BA).$$

# PFB - Tutorato 4

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

9 giugno 2008

## ANALISI

**Esercizio 1** ([1, n. 2.14 pag. 35]). *Dimostare la disuguaglianza di Jensen: Se $f$ è una funzione convessa e $x$ una variabile casuale allora:*

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

[Suggerimento: dimostrare, dato $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, che, se $\sum p_i = 1$ e $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{I} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{I} p_i x_i\right)$. Procedere per ricorsione.]

**Esercizio 2** (PFB 20/02/03). *Si dimostri che la seguente successione di funzioni*

$$f_n(x,y) = \frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}$$

*converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}^2$. Si dimostri che la convergenza non è uniforme.*

**Esercizio 3** (PFB 02/02/04, n. 1.1). *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)^{2^n}.$$

**Esercizio 4** (PFB 06/10/04, n. 1.2). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che esiste il limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

**Esercizio 5** (PFB 06/10/04, n. 1.4). *Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2yx^2(x^2+2y^2-1), \\ \dot{y} = -2xy^2(2x^2+y^2-1). \end{cases}$$

*(i) Verificare che il sistema ammette una costante del moto $H(x,y)$ e determinarla.*

*(ii) Determinare i punti d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.*

*(iii) Discutere qualitativamente il moto del sistema.*

**Esercizio 6** (PFB 13/06/07, n. 1.6). ***Dissertazione teorica.***

*(i) Si enunci il teorema di differenziazione sotto segno di integrale. Non è richiesta la dimostrazione.*
*Come applicazione, si risolva il seguente esercizio.*
*Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

*(ii) Dimostrare, giustificando tutti i passaggi, che $f \in C^1(0,+\infty)$.*

*(iii) Dimostrare che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

*(iv) Esprimere $f'(x)$ in termini di $f(x)$; in altre parole, trovare un'equazione differenziale del primo ordine risolta da $f$.*

*(v) Risolvere l'equazione differenziale e ricavare un'espressione per $f$ diversa da quella data sopra.*

**Esercizio 7** (PFB 30/01/08, n. 1.1). *Sia $\{y_k\}_{k\geq 0}$ una successione di numeri non negativi. Si supponga che, per delle costanti $c, \epsilon > 0$ e $b > 1$, valga la seguente relazione di ricorsione:*

$$y_{k+1} \leq c b^k y_k^{1+\epsilon}.$$

*(i) Dimostrare per induzione che*

$$y_k \leq c^{\frac{(1+\epsilon)^k-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^k-1}{\epsilon^2}-\frac{k}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^k}.$$

*(ii) Se inoltre*

$$y_0 \leq c^{-\frac{1}{\epsilon}} b^{-\frac{1}{\epsilon^2}}$$

*dimostrare che*

$$\lim_{k\to+\infty} y_k = 0.$$

## GEOMETRIA

**Esercizio 8.** *Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | XA = AX\}$. Dimostrare che $\mathcal{U}$ è sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e calcolarne una base e la dimensione. Esistono in $\mathcal{U}$ matrici invertibili?*

**Esercizio 9** (PFB 01/10/03, n. 2.1). *Siano $v_1 = (0,0,1,1), v_2 = (0,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $< v_1, v_2 >\subset N(F), F(E_4) = E_3, F(E_1) = cE_1$ per qualche numero reale $c$, dove $E_1, E_2, E_3, E_4$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.*

*(a) Determinare una matrice di $F$;*

*(b) trovare basi per gli autospazi di $F$;*

*(c) determinare i valori di $c$ per i quali $F$ è diagonalizzabile.*

**Esercizio 10** (PFB 23/06/04, n. 2.2).

1. *Provare che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora $A$ e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori.*
2. *Dare un esempio di matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $A$ e ${}^tA$ non hanno gli stessi autovettori.*
3. *Sia $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di $A$ e quelli di $A^{-1}$.*

**Esercizio 11** (PFB 01/02/07, n. 2.2). *Sia $\mathbb{P}_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Si scriva $22 + 11x - 6x^2 + x^3$ come combinazione lineare dei polinomi $1, (x-2), (x-2)^2$ e $(x-2)^3$. Si dimostri che $\{1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\}$ è una base di $\mathbb{P}_3$.*

**Esercizio 12** (PFB 03/10/07, n. 2.3). *Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ sia $r$ la retta di equazioni parametriche*

$$(x,y,z) = (1+t, 1-t, 0)$$

*Si determini una retta $s$ passante per il punto $(0,2,0)$ in modo tale che il piano contenente $r$ e $s$ contenga anche l'origine degli assi coordinati; la retta $s$ é unica?*

**Esercizio 13** (PFB 30/01/08, n. 2.2). *Sia $A$ una matrice $2\times 2$ a coefficienti reali, non diagonale; si dimostri che se $A$ è simmetrica e ortogonale allora* $\det(A) = -1$.

# Riferimenti bibliografici


[1] David J. C. MacKay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, 2003. available from http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/itila/.

# PFB - Tutorato 4

I sessione a.a. 08/09

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

9 giugno 2008

## ANALISI

Es. 1 Poniamo $\lambda_k = \frac{p(x_k)}{\sum_{i=k}^{I} p(x_i)}$ e calcoliamo $\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)$ e $[\prod_{j=1}^{i-1}(1-\lambda_j)]\lambda_i$. Faremo vedere che applicando $i < I$ volte la definizione di convessità, possiamo stimare $f(\mathbb{E}(X))$ con $p_1 f(x_1) + \cdots + [\prod_{j=1}^{i-1}(1-\lambda_j)]\lambda_i f(x_i) + \prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j) f\left(\frac{\sum_{j=i+1}^{I} p_j x_j}{(1-\lambda_1)\dots(1-\lambda_i)}\right)$. Notiamo che $1 - \lambda_i = \frac{\sum_{j=i+1}^{I} p_j}{\sum_{j=i}^{I} p_j}$. Dimostriamo per induzione che $\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j) = \sum_{j=i+1}^{I} p_j$. Se $i = 1$ allora, per definizione, $1 - \lambda_1 = 1 - p_1 = \sum_{j=2}^{I} p_j$. Supponiamo vera la tesi per $i$ e dimostriamola per $i+1$: $\prod_{j=1}^{i+1}(1-\lambda_j) = \prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)(1-\lambda_{i+1}) = [\sum_{j=i+1}^{I} p_j][1-\lambda_{i+1}] = [\sum_{j=i+1}^{I} p_j]\left[1 - \frac{p_{i+1}}{\sum_{j=i+1}^{I} p_j}\right] = [\sum_{j=i+1}^{I} p_j]\frac{[\sum_{j=i+1}^{I} p_j] - p_{i+1}}{\sum_{j=i+1}^{I} p_j} = \sum_{j=i+2}^{I} p_j$. Ora procediamo con quanto anticipato: applicando la definizione di convessità una volta otteniamo

$$f(\mathbb{E}(X)) = f\left(p_1 x_1 + (1-\lambda_1)\frac{\sum_{j=2}^{I} p_j x_j}{1-\lambda_1}\right) \le p_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\frac{\sum_{j=2}^{I} p_j x_j}{1-\lambda_1}\right).$$

Supponiamo dunque vera la tesi per $i$ e dimostriamola per $i+1$. Se all'$i$-simo passo abbiamo ottenuto che $f(\mathbb{E}(X)) \le p_1 f(x_1) + \cdots + [\prod_{j=1}^{i-1}(1-\lambda_j)]\lambda_i f(x_i) + \prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j) f\left(\frac{\sum_{j=i+1}^{I} p_j x_j}{(1-\lambda_1)\dots(1-\lambda_i)}\right)$, allora ci basta dimostrare che $[\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)] f\left(\frac{\sum_{j=i+1}^{I} p_j x_j}{\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)}\right) \le [\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)]\lambda_{j+1} f(x_{j+1}) + [\prod_{j=1}^{i+1}(1-\lambda_j)] f\left(\frac{\sum_{j=i+2}^{I} p_j x_j}{\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)}\right) = [\prod_{j=1}^{i}(1-\lambda_j)]\lambda_{j+1} f(x_{j+1}) + [\prod_{j=1}^{i+1}(1-\lambda_j)] f\left(\frac{\sum_{j=i+2}^{I} p_j x_j}{\sum_{j=i+1}^{I} p_j}\right)$. Ma questo segue direttamente dalla definizione di convessità ponendo $s = x_{i+1}$ e $t = \frac{\sum_{j=i+1}^{I} p_j}{\sum_{j=i+2}^{I} p_j}\frac{\sum_{j=i+2}^{I} p_j x_j}{\sum_{j=i+1}^{I} p_j} = \frac{\sum_{j=i+2}^{I} p_j x_j}{\sum_{j=i+2}^{I} p_j}$.

Es. 2 $f_n(0,0) = 0 \forall n$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, allora $f_n(x,y)$ va a zero come $\frac{1}{n}$. Dal gradiente $\nabla f_n = \left(\frac{2^n[1+n2^n(x^2+y^2)] - 2^n(x+y)[n2^{n+1}x]}{[1+n2^n(x^2+y^2)]}, \frac{2^n[1+n2^n(x^2+y^2)] - 2^n(x+y)[n2^{n+1}y]}{[1+n2^n(x^2+y^2)]}\right)$ e dalla simmetria delle $f_n$, si vede che il massimo si ottiene in $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}\right)$. Infine $f_n(x_n, y_n) = \frac{2^n \cdot 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}\right)}{1+n2^n \cdot 2\left(\frac{1}{n2^{n+1}}\right)} = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \not\to 0$.

Es. 3 Com'è ben noto $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Quindi $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \to e^{-1}$.

Es. 4 Una funzione $f$ si dice convessa se $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \lambda \in (0,1)$ (ovvero il grafico della funzione sta sotto la corda. Questa condizione è equivalente a $\Delta_{u,v} \le \Delta_{v,w}\ \forall u < v < w$ (ovvero i rapporti incrementali sono crescenti): basta porre $u = a, v = \lambda a + (1-\lambda)b, w = b$. Quindi $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, dove il secondo limite esiste perché i rapporti incrementali sono monotoni crescenti.

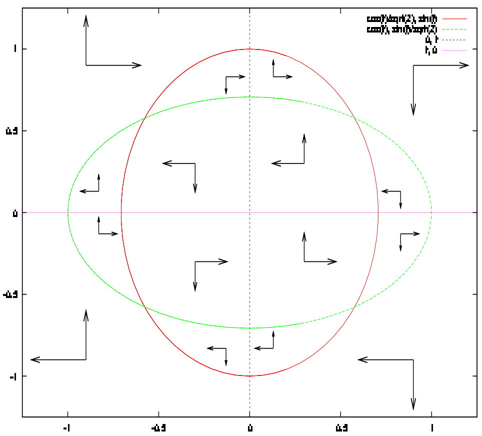

Figura 1: Versi di percorrenza.

Es. 5 Se $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y}$ e $\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x}$, allora $H$ è una costante del moto; equivalentemente $H(x,y) = -\int \dot{y}\,\mathrm{d}x = \int \dot{x}\,\mathrm{d}y = x^2y^4 + y^2x^4 - x^2y^2 + c(x) + k(y)$ Ponendo $c(x) = k(y) = 0$, si ha $H(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-1)$. Quindi la curva di livello $\Gamma_0$ è costituita dalla circonferenza di raggio 1 (che contiene i due ellissi in figura) e gli assi cartesiani, che sono costituiti da punti di equilibrio. L'intersezione dei due ellissi $x^2 + 2y^2 = 1$ e $2x^2 + y^2 = 1$ consiste di quattro punti di equilibrio instabili, come si vede dall'analisi dei versi di percorrenza o dallo studio del sistema linearizzato:

$$A(\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{48}{81}}, \qquad A(\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \mp\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{48}{81}}.$$

Es. 6 Se $\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}$ esiste ed è continua per ogni $x$ e $t$ ed è dominata in modulo da $h(t)$ ad integrale convergente per ogni $x$, allora $\int_{[a,b]} \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\, dt = \frac{d}{dx}\int_{[a,b]} g(x,t)\, dt$. Posto dunque $g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$ allora $g$ soddisfa le condizioni del teorema con $h(t) = \min(1, \frac{e^{-t}}{1+t})$. Quindi, essendo $g$ l'integrale di una funzione continua su $(0, +\infty)$, è ivi derivabile. Se $x \to +\infty$, posso assumere $x \geq 1$ da cui $\frac{e^{-xt}}{1+t} \leq \frac{e^{-t}}{1+t}$ e quindi per il Teorema di convergenza dominata posso passare al limite sotto segno di integrale e concludere che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Derivando sotto segno di integrale si ottiene che $f'(x) = -xf(x)$, che divisa per $f(x)$ e integrata tra $a > 0$ ed $x$ dà (esponenziando) $f(x) = f(a)e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}}$.

Es. 7 Per $k = 0$ si ha $y_0 \leq y_0$ e non c'è nulla da dimostrare. Dimostriamo la tesi per $k + 1$:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &\leq cb^k y_k^{1+\epsilon} \leq cb^k \left( c^{\frac{(1+\epsilon)^k-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^k-1}{\epsilon^2} - \frac{k}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^k} \right)^{1+\epsilon} = cb^k y_0^{(1+\epsilon)^{k+1}} \left( c^{\frac{(1+\epsilon)^k-1}{1+\epsilon-1}} b^{\frac{(1+\epsilon)^k-1}{\epsilon(1+\epsilon-1)} - \frac{k}{\epsilon}} \right)^{1+\epsilon} = cb^k y_0^{k+1} c^{\frac{(1+\epsilon)^{k+1}-1}{\epsilon}-1} b^{\frac{(1+\epsilon)^{k+1}-1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} - (1+\epsilon)\frac{k}{\epsilon}} \\ &= c^{\frac{(1+\epsilon)^{k+1}-1}{\epsilon}} b^{\frac{(1+\epsilon)^{k+1}-1}{\epsilon^2} - \frac{k+1}{\epsilon}} y_0^{(1+\epsilon)^{k+1}} \end{aligned}$$

## GEOMETRIA

Es. 8 Dimostrare che $U$ è un sottospazio è seplice. Date $M, N \in U$ e $\lambda \in R$ si ha

$$A(M + N) = AM + AN = MA + NA = (M + N)A, \quad A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A.$$

In particolare, data $M \in U$ si ha $-M = -1 \cdot M \in U$ e quindi $0 = M + (-M) \in U$.
Sia $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice generica. Allora imponiamo che $AX = XA$.

$$AX = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a - c & 2b - d \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} 2b & a - b \\ 2d & c - d \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo allora che

$$\begin{cases} c = 2b \\ d = a - b \end{cases}.$$

Ovviamente $A$ commuta con sé stessa quindi $A \in U$. Inoltre, anche $I$ (la matrice identità) commuta con $A$. Dal momento che dall'equazione precedente, $U$ ha dimensione 2 e $A$ e $I$ non sono l'una multipla dell'altra, allora $\{A, I\}$ è una base di $U$. In particolare $U$ contiene almeno un elemento invertibile (la matrice $I$).

Es. 10 Per le proprietà del determinante $\det(A - \lambda I) = \det({}^t(A - \lambda I)) = \det({}^tA - \lambda I)$. Se $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, i suoi autovettori sono della forma $(t, -t)$, mentre quelli della trasposta sono $(t, t)$. Se $A$ è invertibile, allora $x = Ix = A^{-1}(Ax) = A^{-1}\lambda x = \lambda'\lambda x \Rightarrow \lambda' = \lambda^{-1}$.