PFB - Tutorato 3

SESSIONE SETTEMBRE-OTTOBRE 2008

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

1 ottobre 2008

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 20/02/03, n. 1.2). *Studiare la funzione* $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{s}{1-s}}\,\mathrm{d}s$$

tracciandone un grafico approssimativo. Si determini in particolare se la funzione è monotona, convessa e limitata.

Esercizio 2 (PFB 06/10/04, n. 1.1). *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log x + \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Studiare la funzione f: dominio di definizione, limiti, crescenza, etc...

Esercizio 3 (PFB 06/10/04, n. 1.5). *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt^2)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Si dimostri che f è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Esercizio 4 (PFB 22/06/05, n. 1.1). *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) *Determinare il dominio di f e dire se f è pari o dispari.*
2) *Calcolare* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
3) *Dimostrare che f si può estendere con continuità a una funzione $\tilde{f}$ definita su tutto $\mathbb{R}$.*
4) *Dimostrare che $\tilde{f}$ è Lipschitz.*

Esercizio 5 (PFB 22/06/05, n. 1.3). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (x \log x - x)^2.$$

Determinare in particolare il dominio di definizione, i limiti, gli eventuali punti di massimo o di minimo. Determinare quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 6 (PFB 01/02/07, n. 1.5). *(i) Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x) = \int_0^x (e^4 - e^{t^2})\,\mathrm{d}t$$

con particolare attenzione al dominio di definizione, alle simmetrie, ai limiti, alla monotonia e alla convessità.

(ii) Per la funzione f definita al punto (i), discutere esistenza e numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \lambda x$$

al variare del numero reale λ.

GEOMETRIA

Esercizio 7 (PFB 01/02/06, n. 2.2). *Siano α_n, β_n i numeri interi definiti da $(3+4i)^n = \alpha_n + \beta_n i$, per $n \geq 1$. Dimostrare, per induzione su n, che risulta $\alpha_n \equiv 3 \pmod 5$ e $\beta_n \equiv 4 \pmod 5$, per ogni $n \geq 1$.*
Stabilire inoltre se $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ è una radice m-sima dell'unità per qualche $m \geq 1$.

Esercizio 8 (PFB 01/02/06, n. 2.3). *Sia $L : V \to V$ un endomorfismo lineare dello spazio vettoriale V e supponiamo che $v \in V$ sia tale che $L^m v = 0$ ma $L^{m-1} v \neq 0$, per qualche $m \in \mathbb{N}$. Mostrare che $v, Lv, \ldots, L^{m-1}v$ sono linearmente indipendenti.*

Esercizio 9 (PFB 13/06/07, n. 2.2). *Siano A e B due matrici $n \times n$. Si dimostri che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (con tr si denota la traccia, cioè la somma degli elementi diagonali di una matrice).*