PFB - Tutorato 2 (Soluzioni)

Sessione Settembre-Ottobre 2008

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

29 settembre 2008

ANALISI

Esercizio 1. *Ricordiamo che* $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. *Dunque* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$. *Quindi siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo* 1^∞.

Usando il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, *abbiamo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{-2^n}\right]^{-1} = e^{-1}.$$

Esercizio 2. *Ricordiamo che*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 + O(x^6),$$

da cui $\frac{\sin x}{1+x^2} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7))(1 - x^2 + x^4 + O(x^6)) = x - x^3 + x^5 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) = x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{141}{120}x^5 + O(x^7)$.

Poiché $|t| < 1 \Rightarrow \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$, *allora*

$$\arctan(z) = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^z (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{2k+1} = z + O(z^3).$$

Quindi $\arctan x^2 = x^2 + O(x^6)$.

In conclusione:

$$\arctan x^2 + \frac{\sin x}{1+x^2} = x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{141}{120}x^5 + O(x^7) + x^2 + O(x^6)$$
$$= x + x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{141}{120}x^5 + O(x^6).$$

Esercizio 3. *Per il primo limite (forma indeterminata del tipo* 1^∞*) basta un limite notevole*

$$\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}} = \left[\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n-2}}\right]^{\frac{n^3-1}{n^2+1}\frac{n-2}{n^2+3}} \to_n e^{-1}.$$

Per il secondo (forma indeterminata del tipo $\infty\cdot 0$*), si può procedere eliminando la forma indeterminata*

$$n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\frac{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}$$
$$= n\frac{\left(1-\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} \to_n \frac{1}{2},$$

usando infine il limite notevole $\frac{\sin x}{x} \to_{x\to 0} 1$ *o in alternativa sviluppare la radice con* $x = \sin\frac{1}{n}$ *e concludere con lo stesso limite notevole*

$$n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$
$$= n\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= n\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \to_n \frac{1}{2},$$

o ancora, ponendo $x = \frac{1}{n}$, *si può usare la regola di de l'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}}(-\cos x)}{1} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. *(i) Abbiamo una forma indeterminata del tipo* $\infty - \infty$. *Usiamo proprietà dei logaritmi e limiti notevoli:*

$$x^2(\log(x^2+a) - 2\log x) = x^2(\log(x^2+a) - \log x^2)$$
$$= x^2\log\frac{x^2+a}{x^2} = x^2\log\left(1+\frac{a}{x^2}\right)$$
$$= \log\left(1+\frac{a}{x^2}\right)^{x^2} \to \log e^a = a.$$

(ii) Anche in questo caso la forma indeterminata è del tipo $\infty - \infty$. *Usiamo gli sviluppi di Taylor (al secondo ordine, perché al primo le due quantità nella forma indeterminata sono indistinguibili)*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

$$\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)} - \frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)}$$
$$= \frac{x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)-(x+\frac{x^2}{2}+O(x^3))}{(x-\frac{x^2}{2}+O(x^3))(x+\frac{x^2}{2}+O(x^3))} = \frac{-x^2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)} \to -1$$

Esercizio 5. *(i) Per definizione di limite* $\forall\epsilon > 0 \exists k_\epsilon$: $|a_k - l| < \epsilon \forall k > k_\epsilon$. *Ovvero* $l - \epsilon < a_k < l + \epsilon \forall k > k_\epsilon$. *Sommando questa disuguaglianza per* $k_\epsilon < k \leq n$ *otteniamo* $(n-k_\epsilon)(l-\epsilon) < a_{k_\epsilon+1} + \cdots + a_n < (n-k_\epsilon)(l+\epsilon)$, *poi dividendo per n abbiamo che*

$$\frac{n-k_\epsilon}{n}(l-\epsilon) < \frac{a_{k_\epsilon+1}+\cdots+a_n}{n} < \frac{(n-k_\epsilon)}{n}(l+\epsilon).$$

Quindi scrivendo

$$s_n = \frac{a_1+\cdots+a_{k_\epsilon}}{n} + \frac{a_{k_\epsilon+1}+\cdots+a_n}{n}$$

abbiamo che la prima parte tende a 0 e la seconda tende ad l, come volevamo.

(ii) *Basta osservare che $s_n \le s_{n+1}$ è equivalente alle seguenti*

$$(n+1)(a_1+\cdots+a_n) \le n(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})$$
$$a_1+\cdots+a_n \le na_{n+1}$$

e che l'ultima segue dal fatto che, essendo a_n crescente, $a_k \le a_{n+1} \forall k \le n$.

Esercizio 6. *Abbiamo una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Usiamo gli sviluppi di Taylor*

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + O(z^3),$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + O(z^5),$$
$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} + O(z^2).$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\log(1+x\sin x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1+2x^4} - 1} \\
&= \frac{\log(1+x(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5))) - (1+x^2+\frac{x^4}{2!}+O(x^6)) + 1}{(1+x^4+O(x^8)) - 1} \\
&= \frac{\log(1+x(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5))) - x^2 - \frac{x^4}{2!}+O(x^6)}{x^4+O(x^8)} \\
&= \frac{\log(1+x^2-\frac{x^4}{3!}+O(x^6)) - x^2 - \frac{x^4}{2!}+O(x^6)}{x^4+O(x^8)} \\
&= \frac{x^2-\frac{x^4}{3!}+O(x^6) - \frac{(x^2-\frac{x^4}{3!}+O(x^6))^2}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2!}+O(x^6)}{x^4+O(x^8)} \\
&= \frac{x^2-\frac{x^4}{3!}+O(x^6) - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2!}+O(x^6)}{x^4+O(x^8)} \\
&= \frac{-\frac{10}{12}x^4+O(x^6)}{x^4+O(x^8)} \to -\frac{10}{12}.
\end{aligned}$$

GEOMETRIA

Esercizio 7. (a) *Per assurdo, sia $a+I$ un elemento nilpotente di A/I. Allora per qualche k si ha $(a+I)^k \equiv a^k + I \equiv I$ cioè $a^k \in I$ e quindi $a \in I$.*

(b) *Sia dapprima $u = 1$. Dalla nota identità*

$$(1+x)(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{k-1}x^{k-1}+(-1)^kx^k+\dots) = 1$$

si ricava che $(1+a)^* = (1-a+\cdots+(-1)^{k-1}a^{k-1})$. Poi basta scrivere $(u+a) = u(1+au^*)$, da cui $(u+a)^* = u^*(1-au^*+\cdots+(-1)^{k-1}(au^*)^{k-1})$.

(c) *Per induzione su m, usando il punto precedente: se $m = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vera la tesi per m e dimostriamola per $m+1$: scivendo $a_0+\cdots+a_mX^m+a_{m+1}X^{m+1} = (a_0+\cdots+a_mX^m)+a_{m+1}X^{m+1}$, abbiamo che la parte tra parentesi è invertibile, e il termine $a_{m+1}X^{m+1}$ è nilpotente, quindi siamo nelle ipotesi del punto precedente (elemento invertibile più elemento nilpotente). Quindi $a_0+\cdots+a_{m+1}X^{m+1}$ è invertibile.*

(d) *Dal punto precedente, se a è nilpotente, allora $1+aX$ è invertibile; viceversa, se a non fosse nilpotente, l'inverso di $1+aX$ non sarebbe un polinomio, ma la serie formale $1-aX+a^2X^2-\cdots \notin A[X]$.*

Esercizio 8. 1. *Basta osservare che hanno lo stesso polinomio caratteristico:*

$$\det({}^tA-\lambda I) = \det({}^tA-\lambda{}^tI) = \det({}^t(A-\lambda I)) = \det(A-\lambda I).$$

2. *Basta considerare la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{smallmatrix}\right)$:*

$$\det\left(\begin{smallmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & -1-\lambda\end{smallmatrix}\right) = \lambda^2$$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+y=0, \quad {}^tA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-y=0$$

Quindi gli autovalori di A sono multipli di $(1,-1)$ e quelli di ${}^tA$ sono multipli di $(1,1)$.

3. *Gli autovalori di A^{-1} sono gli inversi degli autovalori di A:*

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) \Rightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x.$$

Esercizio 9. *Scriviamo la conica in forma matriciale (tenendo conto che i coefficienti dei termini lineari e misti vanno dimezzati)*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -2 \\ -\sqrt{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e studiamo la sottomatrice $A_0 = \left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{aligned}\det(A_0-\lambda I_2) = \det\left(\begin{smallmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-2\end{smallmatrix}\right) &= \lambda^2-2\lambda+1-4 \\ &= \lambda^2-2\lambda-3 = (\lambda-3)(\lambda+1)\end{aligned}$$

$$\lambda = -1 : 0 = (A+I)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x-2y \\ 0 = -2x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right);$$

$$\lambda = 3 : 0 = (A-3I)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2x-2y \\ 0 = -2x-2y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right).$$

La matrice A_0 ha determinante $-3 < 0$, quindi la conica è un'iperbole (il segno è invariante per trasformazioni e la matrice A_0 dell'iperbole di equazione $x^2-y^2 = 1$ ha determinante $-1 < 0$). Costruiamo la matrice M_0 mettendo in colonna i due vettori $(1,1)$ e $(1,-1)$ (dopo averli ortonormalizzati per avere una matrice ortogonale e quindi interpretarla come una matrice di rotazione – anche se non sarebbe indispensabile).

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Dalla matrice M_0 otteniamo la matrice M:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Poi calcoliamo la matrice ${}^tMAM$ (eliminando così il termine misto):

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -2 \\ -\sqrt{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dopo questa trasformazione la conica diventa $-4-4X-X^2+3Y^2 = 0$. Ora operiamo una traslazione per eliminare i termini lineari:

$$X = X' - \frac{a_{01}}{a_{11}} = X' - \frac{-2}{-1} = X' - 2$$
$$Y = Y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} = Y' - \frac{0}{3} = Y'$$

e otteniamo così

$$-4-4(X'-2)-(X'-2)^2+3Y^2=0$$
$$-4-4X'+8-(X')^2-(X')^2-4+4X'+3Y^2=0$$
$$(X')^2-3(Y')^2=8$$
$$\frac{(X')^2}{(2\sqrt{2})^2}-\frac{(Y')^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}=1.$$

Esercizio 10. *La matrice A associata alla conica e la sua sottomatrice A_0 sono*

$$A=\begin{pmatrix}-8+2\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix},\quad A_0=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A_0 sono dati da

$$\det(A_0-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-1-3=\lambda^2-4=(\lambda-2)(\lambda+2)$$

e i suoi autovettori sono

$$\lambda=-2:0=(A+2I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}0=3x-\sqrt{3}y\\0=-\sqrt{3}x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:0=(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}0=-x-\sqrt{3}y\\0=-\sqrt{3}x-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$

La matrice A_0 ha determinante $-4<0$, quindi anche in questo caso abbiamo un'iperbole. Le matrici M_0 ed M sono

$$M_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice ${}^tMAM$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8+2\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-8+2\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3}\\ -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-8+2\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3} & -2 & 0\\ -1-\sqrt{3} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La conica risultante è $-8+2\sqrt{3}+2(-1+\sqrt{3})x+2(-1-\sqrt{3})y-2x^2+2y^2=0$. Trasliamo la conica in modo da portare il centro nell'origine

$$x=x'-\frac{a_{01}}{a_{11}}=x'-\frac{-1+\sqrt{3}}{-2}=x'-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y=y'-\frac{a_{02}}{a_{22}}=y'-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=y'+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

in tal modo:

$$-8+2\sqrt{3}+2(-1+\sqrt{3})\left(x'-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2(-1-\sqrt{3})\left(y'+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+$$
$$-2\left(x'-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\left(y'+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$$
$$-8+2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})\left(x'-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-2-2\sqrt{3})\left(y'+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+$$
$$-2\left((x')^2+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+(-1+\sqrt{3})x'\right)+$$
$$+2\left((y')^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+y'+\sqrt{3}y'\right)=0$$
$$-8+2\sqrt{3}-2x'+1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}x'-\sqrt{3}+3-2y'-1+$$
$$-\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}y'-\sqrt{3}-3-2(x')^2-1+2x'+$$
$$-2\sqrt{3}x'+2(y')^2+2+\sqrt{3}+2y'+2\sqrt{3}y'=0$$
$$-7-\sqrt{3}-2(x')^2+2(y')^2=0$$
$$2(x')^2-2(y')^2=7+\sqrt{3}$$
$$\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{7+\sqrt{3}}{2}}}\right)^2-\left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{7+\sqrt{3}}{2}}}\right)^2=1.$$