PFB - Tutorato 2

Sessione Settembre-Ottobre 2008

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

29 settembre 2008

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 02/02/04, n. 1.1). *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)^{2^n}.$$

Esercizio 2 (PFB 02/02/05, n. 1.1). *Calcolare lo sviluppo di Taylor nello* 0 *all'ordine* 5 *della funzione*

$$f(x)=\arctan x^2+\frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Esercizio 3 (PFB 03/10/06, n. 1.1). *Calcolare i limiti seguenti*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}}\qquad \lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right).$$

Esercizio 4 (PFB 01/02/07, n. 1.1). *(i) Per $a\in\mathbb{R}$, calcolare*

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\log(x^2+a)-2\log x).$$

(ii) Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\log(1+x)}\right).$$

Esercizio 5 (PFB 13/06/07, n. 1.1). *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali: si definisca*

$$s_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(i) Dimostrare che se $a_n\to l$, allora anche $s_n\to l$.

(ii) Dimostrare che se $\{a_n\}$ è monotona crescente, allora anche s_n è monotona crescente.

Esercizio 6 (PFB 03/10/07, n. 1.1). *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x\sin x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{1+2x^4}-1}.$$

GEOMETRIA

Esercizio 7 (PFB 01/10/03, n. 2.6). *Sia A un anello commutativo unitario e sia a un elemento nilpotente di A (cioé un elemento $a\in A$ tale che $a^k=0$, per qualche intero $k\geq 1$). Mostrare che:*

(a) L'insieme I degli elementi nilpotenti di A è un ideale di A e che l'anello-quoziente A/I è privo di elementi nilpotenti diversi dal'elemento nullo.

(b) Se u è un elemento invertibile di A e se a è un elemento nilpotente di A, allora $u+a$ è invertibile in A (determinare esplicitamente il suo inverso).

(c) Se a_0 è un elemento invertibile di A e se $a_1,a_2,\dots,a_m$ sono elementi nilpotenti di A, con $m\geq 1$, allora il polinomio $a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_mX^m$ è un elemento invertibile in $A[X]$.

(d) Sia $a\in A$, allora:

$$1+aX \text{ è invertibile in } A[X] \Leftrightarrow a \text{ è nilpotente in } A.$$

Esercizio 8 (PFB 23/06/04, n. 2.2). *1. Provare che se $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e la sua trasposta ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori.*

2. Dare un esempio di matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che A e ${}^tA$ non hanno gli stessi autovettori.

3. Sia $A\in GL_n(\mathbb{R})$. Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e quelli di A^{-1}.

Esercizio 9 (PFB 02/02/05, n. 2.2). *Fornire la classificazione Euclidea e la forma canonica della seguente conica*

$$X^2+Y^2-4XY-2\sqrt{2}X-2\sqrt{2}Y-4=0$$

Esercizio 10 (PFB 03/10/07, n. 2.4). *Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione*

$$x^2-y^2-2\sqrt{3}xy+2(1+\sqrt{3})x+2(1-\sqrt{3})y-8+2\sqrt{3}=0.$$