PFB - Tutorato 2 (Soluzioni)

SESSIONE GENNAIO-FEBBRAIO 2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

19 gennaio 2009

ANALISI

Esercizio 1. *Poiché* $x^3 - ax^2 + x - a = (x^2+1)(x-a)$ *ha uno zero in* $x = a$ *allora* $\frac{x-2}{(x-a)(x^2+1)}$ *ha una singolarità di ordine 1 non integrabile se* $a \neq 2$*, mentre se* $a = 2$ *ha una singolarità eliminabile. Se* $a = 2$*, l'integrale è*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Esercizio 2. *Per il primo basta usare De l'Hopital (una volta è sufficiente, due volte per maggior convinzione):*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2} = 0.$$

In alternativa, dopo il primo De l'Hopital si può usare Taylor al primo ordine:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^4)}{2x} = 0.$$

Per quanto riguarda il secondo, visto che la funzione integranda tende a zero esponenzialmente in n*, ci aspettiamo che il risultato sia zero. Dimostriamolo:*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^{\infty} e^{-nx^2}\, dx \overset{\substack{t=\sqrt{n}x \\ dt=\sqrt{n}dx}}{=} \lim_{n\to\infty} n \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{n}}\, dt = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Poiché la funzione integranda è positiva, utilizziamo il metodo del confronto per gli integrali. Con quale funzione facciamo il confronto? Una prima ipotesi è c/t *(infatti se* $t > \sqrt{n} \geq 1$ *è sufficientemente grande, allora* $ce^{t^2} > t$ *per una costante* c *opportuna e quindi* $e^{-t^2} < \frac{c}{t}$*). Tuttavia* $\frac{c}{t}$ *non ha integrale finito dato che* $\int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{c}{t}\, dt = c \log t\Big|_{\sqrt{n}}^{\infty} = \infty\, \forall n \in \mathbb{N}$*. La funzione* c/t^2 *è una candidata migliore, ma:*

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{c}{t^2}\, dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left[-\frac{c}{t}\right]_{\sqrt{n}}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[0 - \left(-\frac{c}{\sqrt{n}}\right)\right] = c \not\to 0.$$

In realtà si potrebbe obiettare che non essendoci alcun vincolo su c *è possibile scegliere* c *arbitrariamente piccola (basta poi prendere* $n > n_c$*), ma serve quest'argomento aggiuntivo. Con* c/t^3*, invece, il discorso funziona senza ulteriori problemi:*

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{c}{t^3}\, dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left[\frac{c}{-2t^2}\right]_{\sqrt{n}}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[-\frac{c}{2}\frac{1}{n}\right]_{\sqrt{n}}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Esercizio 3.

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\int \frac{4+x^3}{x^2-1}\, dx = \int \left(x + \frac{x+4}{x^2-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\, dx +$$
$$\int \frac{4}{x^2-1}\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2-1) + \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2-1) + 2\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c.$$

Esercizio 4. *Per risolvere questo limite basta usare qualche sviluppo di Taylor di basso ordine*

$$(\sqrt{e})^{\sin x} = e^{\frac{\sin x}{2}} = 1 + \frac{\sin x}{2} + o(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x),$$
$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{\sqrt{x}^2}{2!} + o(\sqrt{x}^2) = 1 - \frac{x}{2} + o(x),$$
$$\log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x) - (1 - \frac{x}{2} + o(x))}{(\sqrt{x} + o(\sqrt{x}))^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = 1.$$

Esercizio 5. *1)* $\int \frac{x+2}{x+1} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = x + \log(x+1) + c.$

2) $\int \frac{2x-1}{x^2+1}\, dx = \int \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \log(x^2+1) - \arctan(x) + c.$

3) $\int \frac{2x+1}{x+2}\, dx = \int \left(2 - 3\frac{1}{x+2}\right) dx = 2x - 3\log(x+2) + c.$

4) $\int \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x}\, dx = \int \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan(x) + c.$

5) $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\, dx = \int \frac{\sin x\cos x}{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}\, dx = \int \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x}\, dx$
$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \frac{1}{2}\log(\sin x) + c.$

6) $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x\cos x}\, dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}{1-\sin x\cos x}\, dx$
$= \int (\sin x + \cos x)\, dx = -\cos x + \sin x + c.$

GEOMETRIA

Esercizio 6. *(i)* α *è radice di* $f(X) = X^4 - 10X^2 + 20$.

$$\alpha = \sqrt{5+\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha^2 = 5 + \sqrt{5} \Rightarrow \alpha^2 - 5 = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 5 \Rightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 20 = 0.$$

Poiché 5 *divide* 10 *e* 20 *ma non* 1 *e* $5^2 = 25$ *non divide* 20*, allora per il criterio di Eiseinstein con* $p = 5$*,* $f(X)$ *è irriducibile (in alternativa si può usare la formula del grado: poiché* $f(X)$ *non ha radici in* Q *non si può scrivere come prodotto di un polinomio di grado* 1 *con uno di grado* 3*, poi basta verificare che è impossibile scriverlo come prodotto di due polinomi di grado* 2*). Essendo* $f(X)$ *monico, allora* $m(X) = f(X)$.

(ii) Per l'isomorfismo valutazione $Q[X]/\langle m(X)\rangle \to \mathbb{Q}(\alpha) : f(X) + \langle m(X)\rangle \mapsto f(\alpha)$*,* $\mathbb{Q}(\alpha)$ *ha dimensione* 4 *come spazio vettoriale su* $\mathbb{Q}$ *(una sua base è* $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$*).*

(iii) $f(X)$ *ha come radici* $\alpha, -\alpha, \beta := \sqrt{5-\sqrt{5}}$ *e* $-\beta$*. É sufficiente dimostrare che* $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$*: poiché* $\sqrt{5} = \alpha^2 - 5 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ *e* $\alpha\beta = \sqrt{5+\sqrt{5}}\sqrt{5-\sqrt{5}} = \sqrt{5^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$*, allora* $\beta = (\alpha\beta)\beta^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 7. *(i)* *Se* $X, Y \in V$ *allora* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $A(aX+bY) = aAX + bAY = aXA + bYA = (aX + bY)A$, *e quindi* $aX + bY \in V$.

(ii) *Sia* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ c+d & c+2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a+2b \\ a+2c = c+d \\ b+2d = c+2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a+b \end{cases}$$

V ha dimensione 2 e una sua base è, ad esempio, $\{I, A\}$ (ovviamente A commuta con l'identità e con sé stessa).

Esercizio 8. *(i)* *Se* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{pmatrix} \in V$, *allora* $cA + dB = \begin{pmatrix} ca_{11}+db_{11} & ca_{12}+db_{12} \\ 0 & ca_{11}+db_{11} \end{pmatrix} \in V$.

(ii) *V è il sottospazio generato da* $M_1 = I$ *e* $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Invece* $U = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) | a_{11} = -a_{22}, a_{21} = 0\}$ *è generato da* $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $M_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Una qualsiasi matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *si scrive come* $\left(\frac{(a+d)}{2}M_1 + cM_2\right) + \left(\frac{(a-d)}{2}M_3 + bM_4\right)$.

(iii) *Come appena visto,* $A = \left(\frac{1}{2}M_1 - 3M_2\right) + \left(\frac{1}{2}M_3 + 2M_4\right)$.

Esercizio 9. *(i)* *Il polinomio caratteristico di A è* $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda(8 + 4h)$. *Se* $\lambda = 3$ *è un autovalore di A, allora* $p_A(3) = 12 + 24h = 0 \Rightarrow h = -2$.

(ii) *Se* $h = -2$ *allora*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3).$$

$$E(0) : A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -3t - 2s \end{cases},$$

$$v_1 = {}^t(1, 0, -3), v_2 = {}^t(0, 1, -2);$$

$$E(3) : (A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -3x - 5y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2y \\ -3x - 5y + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2y \\ -3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = -y \end{cases}, v_3 = {}^t(-1, 1, -2).$$

La matrice A, nella base v_1, v_2, v_3 assume la forma $D = QAQ^{-1} = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *dove* $Q^{-1} = C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 10. *Per scrivere una matrice A come prodotto elementari si scrive la matrice a blocchi $(A\, I)$ e si arriva con operazioni sulle righe alla matrice $(I\, A^{-1})$. Le operazioni sulle righe corrispondono a moltiplicare a sinistra per opportune matrici elementari. A è il prodotto delle inverse di quelle matrici.*

a) $(A \;\; I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;
$A = E_2(2)E_1(\frac{1}{2})E_{12}$.

b) $(A \;\; I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
$A = E_{12}E_1(2)E_{21}(1)E_2(-1)$.

c) $(A\; I_2) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-\frac{5}{2})} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;
$A = E_{12}(\frac{5}{2})E_{21}(2)E_1(\frac{1}{2})E_2(2)$.

d) $(A\; I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
$A = E_2(-1)E_{12}(1)E_3(2)$.

e) $(A \;\; I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-\frac{1}{7})}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$;
$A = E_{23}(1)E_{23}E_{21}(2)E_2(-7)E_{32}(2)E_{12}(3)$.