Tutorato 1 PFB

Prima prova d'accesso a.a. 2008/2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

18 maggio 2009

ANALISI

Esercizio 1. 1. Dimostrare che $\forall k \geq 1,\ 1^k + 2^k + \cdots + n^k = O(n^{k+1})$.

2. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t.c $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = a + bn + cn^2 + dn^3$. Dimostrare che $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

3. Determinare a, b, c, d.

Esercizio 2. Si consideri il seguente integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x^t A x}\, \mathrm{d}x$$

dove $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica di autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Determinare condizioni necessarie e sufficienti per cui l'integrale è finito e calcolarlo.

Esercizio 3 (PFB 03/10/07, n. 1.3)**.** Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} &=& x^2 + y^2(6 - 4y - 3x^2), \\ \dot{y} &=& -2x(2x^2 - 2 + y - y^3). \end{cases}$$

(i) Si dimostri che $H(x, y) = (x^2 - y^3)(y - 2 + x^2)$ è una costante del moto per il sistema.

(ii) Si determinino i punti di equilibrio.

(iii) Se ne discuta la stabilità.

(iv) Si studi analiticamente la curva di livello $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$ e si determini il verso di percorrenza delle traiettorie corrispondenti.

(v) Si studino qualitativamente le altre curve di livello e si determini il verso di percorrenza delle traiettorie.

(vi) Si dia un'espressione analitica della regione dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.

Esercizio 4 (PFB 03/10/08, n. 1.4)**.** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \left[\sqrt{(x^2 + 2x + 2)} - (x + 1) \right] \mathrm{d}x.$$

Esercizio 5 (PFB 03/10/08, n. 1.5)**.** Siano f e g due funzioni definite su $\mathbb{R}$, positive e tali che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1.$$

GEOMETRIA

Teorema (Pigeonhole principle)**.** *If n objects are placed in k boxes, then at least one of the boxes contains $\lceil n/k \rceil$ objects or more.*

Esercizio 6 ([1, es. 6 pag. 10])**.** (a) L'insieme M consiste di nove interi positivi, nessuno dei quali ha un divisore primo maggiore di sei. Dimostrare che M ha due elementi il cui prodotto è il quadrato di un intero.

(b) L'insieme A consiste di $n + 1$ interi positivi, nessuno dei quali ha un divisore primo maggiore dell'n-simo numero primo. Dimostrare che esiste un sottoinsieme non vuoto $B \subseteq A$ tale che il prodotto degli elementi di B è un quadrato perfetto.

Esercizio 7. Siano A e B matrici 2×2 ad elementi interi tali che $A, A + B, A + 2B, A + 3B$, e $A + 4B$ sono tutte matrici invertibili le cui inverse hanno elementi interi. Dimostrare che $A + 5B$ è invertibile e che la sua inversa ha tutti elementi interi.

Esercizio 8 (PFB 03/10/08, n. 2.4)**.** Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 + 2XY + X - Y = 0.$$

Esercizio 9 (PFB 03/10/08, n. 2.5)**.** Sia V lo spazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ e sia W l'insieme degli endomorfismi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 0)$ e $f((1, 1, 0)) = (1, 0, 1)$.

(i) Si dimostri che W non é un sottospazio di V.

(ii) Si determini una matrice che rappresenti il generico elemento di W.

(iii) Si caratterizzino gli elementi di W che sono isomorfismi.

(iv) Si determinino gli elementi $g \in W$ tali che $(1, 1, 1) \in \mathrm{Ker} g$.

Riferimenti bibliografici

[1] Miklós Bóna. *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*. World Scientific Publishing Company, 2 edition, October 2006.