Esercizi per la prova di accesso alla laurea magistrale(gruppo geometrico)

Andrea Cova

Esercizio 1. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le tre rette di equazioni parametriche seguenti:
$R_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad R_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3s \end{cases} \qquad R_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}$
(**a**)Esiste un piano che contiene tutte e tre le rette?
(**b**)Determinare tutte le terne di punti $P_1 \in R_1, P_2 \in R_2, P_3 \in R_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 sono allineati.

Svolgimento 1. (**a**)Si puó agevolmente constatare che non esiste alcun piano che contenga simultaneamente tutte e tre le rette considerate, dal momento che osserviamo immediatamente che le rette R_2 ed R_3 non risultano neppure essere complanari; dimostriamo esplicitamente la veridicitá di quest'ultima asserzione.
Iniziamo con il ricavare le equazioni cartesiane di queste tre rette affini:
$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 1 \mapsto \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \ (R_1), \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ y & 0 \\ z & 3 \end{pmatrix} = 1 \mapsto \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \ (R_2),$
$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ y & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = 1 \mapsto \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases} \ (R_3).$
Rammentiamo che due rette affini di equazioni cartesiane date rispettivamente da $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} (r)$ e da $\begin{cases} ex + fy + gz + h = 0 \\ e'x + f'y + g'z + h' = 0 \end{cases} (s)$ sono rette complanari se e soltanto se risulta soddisfatta la condizione rappresentata da $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{vmatrix} = 0$; nella situazione specifica in esame si puó constatare che $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ e

conseguentemente R_2 ed R_3 non risultano essere effettivamente delle rette complanari.

(**b**)Allo scopo di determinare tutte le terne di punti $P_1 \in R_1, P_2 \in R_2, P_3 \in R_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 siano punti allineati, individuiamo le equazioni cartesiane della retta passante per due di questi punti ed imponiamo successivamente la condizione di appartenenza del punto rimanente alla retta affine che si é appena determinata esplicitamente procedendo secondo tale modalitá:

- $P_1 = (0,0,t) \in R_1, P_2 = (1,0,3s) \in R_2$ (equazione cartesiana della retta passante per i due punti P_1 e P_2) $\mapsto$ $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x & y & z-t \\ 1 & 0 & 3s-t \end{pmatrix} = 1 \mapsto$ $\mapsto \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x & z-t \\ 1 & 3s-t \end{vmatrix} \mapsto \begin{cases} y = 0 \\ x(3s-t)-(z-t) = 0 \end{cases}$ appartenenza del punto P_3 a tale retta, con $P_3 = (2,u,0) \in R_3$: $u = 0, \quad 2(3s-t)+t = 0 \Rightarrow 6s-2t+t = 0 \Rightarrow t = 6s$ OPPURE

- $P_2 = (1,0,3s) \in R_2, P_3 = (2,u,0) \in R_3$ (equazione cartesiana della retta passante per i due punti P_2 e P_3) $\mapsto$ $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x-1 & y & z-3s \\ 1 & u & -3s \end{pmatrix} =$ $= 1 \mapsto \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & u \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & z-3s \\ 1 & -3s \end{vmatrix} \mapsto \begin{cases} xu-u-y = 0 \\ -3sx+3s-z+3s = 0 \end{cases}$ appartenenza del punto P_1 a tale retta, con $P_1 = (0,0,t) \in R_1$: $u = 0, \quad 3s-t+3s = 0 \Rightarrow t = 6s$ OPPURE

- $P_1 = (0,0,t) \in R_1, P_3 = (2,u,0) \in R_3$ (equazione cartesiana della retta passante per i due punti P_1 e P_3) $\mapsto$ $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x & y & z-t \\ 2 & u & -t \end{pmatrix} = 1 \mapsto$ $\mapsto \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & u \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x & z-t \\ 2 & -t \end{vmatrix} \mapsto \begin{cases} xu-2y = 0 \\ -xt-2(z-t) = 0 \end{cases}$ appartenenza del punto P_2 a tale retta, con $P_2 = (1,0,3s) \in R_2$: $u = 0, \quad -t-2(3s-t) = 0 \Rightarrow -t-6s+2t = 0 \Rightarrow t = 6s$

Quindi possiamo in definitiva asserire che le condizioni che individuano tutte e sole le terne di punti allineati della tipologia richiesta sono individuate da $\{u = 0, t = 6s\}$, cosicché tali terne saranno rappresentate dai punti $P_1 = (0,0,6s) \in R_1, P_2 = (1,0,3s) \in R_2, P_3 = (2,0,0) \in R_3$, al variare del parametro $s \in \mathbf{R}$.

Esercizio 2. Sia ξ una radice complessa primitiva settima dell'unitá e sia $\alpha = \xi + \xi^{-1}$. Costruire l'ampliamento semplice $\mathbf{Q}(\alpha)$ e determinare una base di $\mathbf{Q}(\alpha)$ su $\mathbf{Q}$.

Svolgimento 2. Sia ξ una radice settima primitiva dell'unitá, con $\xi =$ $= e^{\frac{2\pi i}{7}} = cos\frac{2\pi}{7} + isin\frac{2\pi}{7}$, e si prenda in considerazione l'elemento $\xi + \xi^{-1}$; ci proponiamo allora anzitutto di determinare il grado dell'ampliamento semplice $[\mathbf{Q}(\xi + \xi^{-1}) : \mathbf{Q}]$. Si ponga $\alpha = \xi + \xi^{-1}$ e si osservi immediatamente che $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\xi + \xi^{-1}) \subseteq \mathbf{Q}(\xi)$.
Inoltre risulta che $\xi^{-1} = \overline{\xi} = cos\frac{2\pi}{7} - isin\frac{2\pi}{7}$ e di conseguenza $\alpha = \xi + \xi^{-1} =$ $= 2cos\frac{2\pi}{7}$; ma d'altra parte ci si puó chiaramente rendere conto del fatto che $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(cos\frac{2\pi}{7}) \subset \mathbf{Q}(\xi)$ (ovviamente si ha quest'ultima inclusione stretta poiché $\mathbf{Q}(cos\frac{2\pi}{7})$ costituisce un campo reale, mentre ξ risulta essere una radice complessa).
Rammentando a questo punto che, se ξ rappresenta una radice complessa n-esima primitiva dell'unitá, allora il polinomio minimo di ξ su $\mathbf{Q}$ é individuato dall'n-esimo polinomio ciclotomico $\Phi_n(x)$ e quindi in particolare l'ampliamento $\mathbf{Q}(\xi)$ possiede grado $\varphi(n)$ su $\mathbf{Q}$, si avrá dunque conseguentemente che:
$[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}] = \varphi(n) = \varphi(7) = 6$ e d'altra parte si osserva anche che $[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}] =$ $= [\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$.
Allo scopo di calcolare il grado $[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}(\alpha)]$, ci proponiamo ora di determinare un opportuno polinomio a coefficienti in $\mathbf{Q}(\alpha)$ annullato dalla radice settima primitiva dell'unitá ξ:
$\alpha = 2cos\frac{2\pi}{7}$ $\quad cos\frac{2\pi}{7} = \frac{\alpha}{2}$ $\quad \xi - \alpha/2 = isin\frac{2\pi}{7}$ $\quad (\xi - \frac{\alpha}{2})^2 = -sin^2\frac{2\pi}{7} =$ $= -1 + cos^2\frac{2\pi}{7} = -1 + (\frac{\alpha}{2})^2$ $\quad (\xi - \frac{\alpha}{2})^2 + 1 - (\frac{\alpha}{2})^2 = 0$ $\quad \xi^2 - \alpha\xi + \frac{\alpha^2}{4} + 1 - \frac{\alpha^2}{4} =$ $= 0$ $\quad \xi^2 - \alpha\xi + 1 = 0 \longmapsto$ pertanto la radice primitiva settima dell'unitá ξ annulla il polinomio $x^2 - \alpha x + 1 \in \mathbf{Q}(\alpha)[x]$ e di conseguenza si avrá che $[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}(\alpha)] \leq 2$ (poiché il polinomio minimo dell'elemento ξ su $\mathbf{Q}(\alpha)$ dovrá necessariamente costituire un fattore del polinomio appena individuato).
Ma $[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}(\alpha)] \neq 1$ poiché, come si é precedentemente osservato, si ha che $\mathbf{Q}(cos\frac{2\pi}{7}) \subset \mathbf{Q}(\xi) \longmapsto [\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}(\alpha)] = 2$.
Si puó pertanto concludere in sostanza che $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = \frac{[\mathbf{Q}(\xi):\mathbf{Q}]}{[\mathbf{Q}(\xi):\mathbf{Q}(\alpha)]} = \frac{6}{2} = 3$.
Allo scopo di individuare a questo punto il polinomio minimo di tale elemento $\alpha = \xi + \xi^{-1} = \xi + \xi^6$ su $\mathbf{Q}$, si rammenti che gli automorfismi del settimo ampliamento ciclotomico $\mathbf{Q}(\xi)$ sono rappresentati dalle applicazioni $\varphi_i : \xi \to \xi^i$, per $1 \leq i \leq 6$.
Osserviamo allora che:

- $\varphi_1(\alpha) = \alpha = \xi + \xi^6$
- $\varphi_2(\alpha) = \xi^2 + \xi^{12} = \xi^2 + \xi^5$
- $\varphi_3(\alpha) = \xi^3 + \xi^{18} = \xi^3 + \xi^4$
- $\varphi_4(\alpha) = \xi^4 + \xi^{24} = \xi^4 + \xi^3 = \varphi_3(\alpha)$

- $\varphi_5(\alpha) = \xi^5 + \xi^{30} = \xi^5 + \xi^2 = \varphi_2(\alpha)$
- $\varphi_6(\alpha) = \xi^6 + \xi^{36} = \xi^6 + \xi = \alpha = \varphi_1(\alpha)$

e si hanno quindi esclusivamente tre valori distinti (ovvero α possiede solamente tre elementi coniugati in $\mathbf{C}$)ed allora, come si é d'altro canto giá precedentemente constatato, l'elemento α presenterá effettivamente grado 3 su $\mathbf{Q}$.
Ricordiamo che $\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ individua il settimo polinomio ciclotomico; si tratta del polinomio minimo di $\xi = \xi_7$ su $\mathbf{Q}$ e dunque ne scaturisce che $\Phi_7(\xi) = \xi^6 + \xi^5 + \xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$.
Conseguentemente il polinomio minimo di tale elemento sará costituito da:
$m(x) = (x - (\xi + \xi^6)) \cdot (x - (\xi^2 + \xi^5)) \cdot (x - (\xi^3 + \xi^4)) =$
$= (x - (\xi + \xi^6)) \cdot (x^2 - (\xi^2 + \xi^3 + \xi^4 + \xi^5)x + (\xi^5 + \xi^6 + \xi + \xi^2)) =$
$= (x - (\xi + \xi^6)) \cdot (x^2 + (\xi + \xi^6 + 1)x - (\xi^3 + \xi^4 + 1)) =$
$= x^3 + (\xi + \xi^6 + 1)x^2 - (\xi^3 + \xi^4 + 1)x - (\xi + \xi^6)x^2 - (\xi^2 + 1 + \xi + 1 + \xi^5 +$
$+ \xi^6)x + (\xi^4 + \xi^5 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^6) =$
$= x^3 + (\xi^6 + \xi + 1 - \xi - \xi^6)x^2 + (-\xi^3 - \xi^4 - 1 - \xi^2 - 1 - \xi - 1 - \xi^5 - \xi^6)x - 1 =$
$= x^3 + x^2 - 2x - 1$ (si osservi difatti che $m(\alpha) = (\xi + \xi^6)^3 + (\xi +$
$+ \xi^6)^2 - 2(\xi + \xi^6) - 1 = \xi^3 + \xi^4 + 3\xi + 3\xi^6 + \xi^2 + \xi^5 + 2 - 2\xi - 2\xi^6 - 1 =$
$= \xi^6 + \xi^5 + \xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$).
Le radici del polinomio minimo $m(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ dell'elemento $\alpha = \xi + \xi^{-1} = \xi + \xi^6$ su $\mathbf{Q}$ considerato, sono rappresentate, per quanto visto nell'ambito della trattazione precedente, da:

- $\alpha_1 = \alpha = \xi + \xi^6 = \xi + \xi^{-1} = cos\frac{2\pi}{7} + isin\frac{2\pi}{7} + cos\frac{2\pi(-1)}{7} + isin\frac{2\pi(-1)}{7} =$
$= 2cos\frac{2\pi}{7}$
- $\alpha_2 = \xi^2 + \xi^5 = \xi^2 + \xi^{-2} = cos\frac{2\pi(2)}{7} + isin\frac{2\pi(2)}{7} + cos\frac{2\pi(-2)}{7} + isin\frac{2\pi(-2)}{7} =$
$= 2cos\frac{4\pi}{7}$
- $\alpha_3 = \xi^3 + \xi^4 = \xi^3 + \xi^{-3} = cos\frac{2\pi(3)}{7} + isin\frac{2\pi(3)}{7} + cos\frac{2\pi(-3)}{7} + isin\frac{2\pi(-3)}{7} =$
$= 2cos\frac{6\pi}{7}$

$\longmapsto$ tali radici risultano essere tutte reali.
Inoltre si puó immediatamente osservare che le radici di questo polinomio minimo appartengono tutte all'ampliamento $\mathbf{Q}(\alpha)$:

- $\alpha = \xi + \xi^{-1} = \xi + \xi^6 \in \mathbf{Q}(\alpha)$
- $\alpha^2 = \xi^2 + \xi^5 + 2 \mapsto \alpha_2 = \xi^2 + \xi^5 = \alpha^2 - 2 \in \mathbf{Q}(\alpha)$
- $\alpha^3 = \xi^3 + \xi^4 + 3\xi + 3\xi^6 = \xi^3 + \xi^4 + 3(\xi + \xi^6) = \xi^3 + \xi^4 + 3\alpha \mapsto \alpha_3 =$
$= \xi^3 + \xi^4 = \alpha^3 - 3\alpha \in \mathbf{Q}(\alpha)$.

In conclusione, allo scopo di costruire l'estensione algebrica semplice $\mathbf{Q}(\alpha)$ generata dall'elemento $\alpha = \xi + \xi^{-1}$ che stiamo prendendo in considerazione,

sará pertanto necessario prendere in esame l'anello quoziente $\frac{\mathbf{Q}[x]}{(m(x))}$ (tale anello quoziente costituisce un campo in quanto, essendo il polinomio minimo $m(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ irriducibile su $\mathbf{Q}$, allora l'ideale da esso generato risulterá evidentemente essere un ideale massimale):
$\frac{\mathbf{Q}[x]}{(m(x))} = \frac{\mathbf{Q}[x]}{(x^3+x^2-2x-1)} = \left\{\overline{f(x)} | f(x) \in \mathbf{Q}[x]\right\} = \left\{f(x) + (x^3 + x^2 - 2x - 1) | f(x) \in \mathbf{Q}[x]\right\} =$

[effettuando la divisione euclidea col resto, si ottiene che $f(x) = m(x)q(x) + r(x)$ con $q(x), r(x) \in \mathbf{Q}[x]$ ed $r(x) = 0$ oppure deg$(r(x))<$deg$(m(x))$ ed inoltre si avrá che $\overline{f(x)} = \overline{r(x)}$]
$= \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (x^3 + x^2 - 2x - 1) | a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Q}\right\} = \left\{a_0 + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{x}^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Q}\right\} \cong$

[pensando tale campo immerso in $\mathbf{C}$, il rappresentante della classe polinomiale $\overline{x}$ é proprio individuabile nella radice reale $\alpha = \xi + \xi^{-1}$ del polinomio considerato]
$\cong \left\{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Q}, m(\alpha) = \alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0\right\} = \mathbf{Q}[\alpha] =$

[essendo α un elemento algebrico su $\mathbf{Q}$]
$= \mathbf{Q}(\alpha)$. Alla luce di quanto sinora constatato, possiamo infine renderci agevolmente conto che una base dell'ampliamento semplice $\mathbf{Q}(\alpha)$ su $\mathbf{Q}$ sará rappresentata dall'insieme $\left\{1, \alpha, \alpha^2\right\} = \left\{1, \xi + \xi^6, \xi^2 + \xi^5 + 2\right\}$.

Esercizio 3. Esiste un'affinitá f del piano $\mathbf{A}^2$ con le seguenti proprietá? Giustificare la risposta.
$f(-1, \frac{5}{2}) = (2, 1)$; $f(2, 4) = (-2, -3)$; $f(-1, -\frac{3}{2}) = (0, 0)$; $f(2, 0) = (1, -1)$.

Svolgimento 3. Supponiamo di prendere in considerazione una generica affinitá f del piano $\mathbf{A}^2$, ovvero un'applicazione biunivoca $f : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ della forma $f = f_{A,\underline{v}}$, con $f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ (e dunque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$).
Imponiamo che tale trasformazione del piano soddisfi le ultime tre condizioni che stiamo prendendo in considerazione e verifichiamo che allora non potrá essere invece soddisfatta la prima di tali peculiari condizioni:
$f(2, 4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 2a + 4b + e = -2 \\ 2c + 4d + f = -3 \end{cases}$
$f(-1, -\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} -a - \frac{3}{2}b + e = 0 \\ -c - \frac{3}{2}d + f = 0 \end{cases} \mapsto$
$\mapsto \begin{cases} -2a - 3b + 2e = 0 \\ -2c - 3d + 2f = 0 \end{cases}$
$f(2, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 2a + e = 1 \\ 2c + f = -1 \end{cases}$

Utilizzando le sei relazioni appena individuate otteniamo conseguentemente che:
$e = 1 - 2a$, $\qquad f = -1 - 2c$, $\qquad -2a - 3b + 2 - 4a = 0$,
$b = -2a + \frac{2}{3}$, $\qquad -2c - 3d - 2 - 4c = 0$, $\qquad d = -2c - \frac{2}{3}$,
$2a - 8a + \frac{8}{3} + 1 - 2a + 2 = 0$, $\qquad 8a = \frac{17}{3}$, $\qquad a = \frac{17}{24}$,
$b = -\frac{17}{12} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{4}$, $\qquad e = 1 - \frac{17}{12} = -\frac{5}{12}$,
$2c - 8c - \frac{8}{3} - 1 - 2c + 3 = 0$, $\qquad 8c = -\frac{2}{3}$, $\qquad c = -\frac{1}{12}$,
$d = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$, $\qquad f = -1 + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$
$\mapsto$ possiamo pertanto concludere che $A = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$.
Verifichiamo a questo punto la correttezza del risultato appena ricavato:
$f(2,4) = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} - 3 - \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} - 2 - \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ OK!
$f(-1,-\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{24} + \frac{9}{8} - \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ OK!
$f(2,0) = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{12} - \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} - \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ OK!
$f(-1,\frac{5}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{24} - \frac{15}{8} - \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} - \frac{5}{4} - \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$
NO!(come volevasi dimostrare).
Possiamo pertanto effettivamente concludere che non esiste alcuna affinitá f del piano $\mathbf{A}^2$ verificante simultaneamente le quattro proprietá richieste!

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$, dotato di un riferimento cartesiano $Oijk$, sono date le due rette sghembe di equazioni cartesiane:
$(r_1) : \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ ed $(r_2) : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$.
1) Scrivere equazioni cartesiane della retta s perpendicolare comune ad r_1 ed r_2
2) Calcolare la distanza tra r_1 e r_2
3) Sia $P = r_1 \cap s$. Determinare una equazione cartesiana del piano α passante per P, parallelo ad r_2 e perpendicolare al piano $\beta : x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Svolgimento 4. **1**)La retta richiesta, ossia la retta s perpendicolare comune a r_1 ed r_2, é individuata dalla retta passante per l'origine del riferimento cartesiano in esame ed avente vettore direttore $\underline{r_1} \wedge \underline{r_2}$, con $\underline{r_1}$ ed $\underline{r_2}$ rispettivamente vettori direttori delle due rette r_1 ed r_2 inizialmente assegnate. Determiniamo anzitutto le espressioni di tali vettori direttori:
(retta r_1)$\hookrightarrow$ dalla matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, si ottiene che
$l_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $m_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $n_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

e di conseguenza $\underline{r_1} = (0, 2, 1)$ costituisce un vettore direttore della retta r_1;
(retta r_2)$\hookrightarrow$ dalla matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ottiene che
$l_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $m_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $n_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
e di conseguenza possiamo concludere che $\underline{r_2} = (-1, -1, 0)$ costituisce un vettore direttore della retta r_2.
Rispetto alla base (ortonormale) $\mathbf{E} = (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, si puó agevolmente constatare che sussiste la relazione $\underline{r_1} \wedge \underline{r_2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$.
Pertanto in definitiva la retta richiesta é ottenuta dalla condizione $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$
$= 0$, cioé la retta s perpendicolare comune a r_1 ed r_2 sará individuata dalle seguenti equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

2) Rammentiamo che, denotati rispettivamente con Q_1 e Q_2 due arbitrari punti appartenenti alle rette r_1 ed r_2 considerate, allora la distanza intercorrente tra tali rette puó essere calcolata agevolmente ricorrendo alla formula $d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{Q_1Q_2}, \underline{r_1}, \underline{r_2}]|}{||\underline{r_1} \wedge \underline{r_2}||}$: abbiamo osservato in precedenza che $\underline{r_1} = (0, 2, 1)$, $\underline{r_2} = (-1, -1, 0)$ ed inoltre $\underline{r_1} \wedge \underline{r_2} = (1, -1, 2)$, cosicché si avrá immediatamente che $||\underline{r_1} \wedge \underline{r_2}|| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$; presi ad esempio in considerazione i punti $Q_1 = (0, 1, -1) \in r_1$ e $Q_2 = (1, 0, 1) \in r_2$, risulterá che $\vec{Q_1Q_2} = (1, -1, 2)$ e conseguentemente potremo concludere che
$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{Q_1Q_2}, \underline{r_1}, \underline{r_2}]|}{||\underline{r_1} \wedge \underline{r_2}||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 + 4 + 1) = \sqrt{6}$.

3) Il piano richiesto, ossia il piano α passante per il punto $P = r_1 \cap s =$ $= (0, 0, 0) = O$, parallelo alla retta r_2 e perpendicolare al piano β di equazione cartesiana $x + 2y - 3z + 1 = 0$, é rappresentato dal piano $S(P, \langle \underline{r_2}, \underline{n} \rangle)$ (ovvero dal sottospazio euclideo passante per il punto P ed avente giacitura costituita dal sottospazio vettoriale $\langle \underline{r_2}, \underline{n} \rangle$ generato da $\underline{r_2} = (-1, -1, 0)$ vettore direttore della retta r_2 e da $\underline{n} = (1, 2, -3)$ vettore normale del piano β).
Tale piano ha quindi equazione cartesiana individuata da:
$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, cioé $3x - 3y - z = 0$ (equazione cartesiana del piano α).

Esercizio 5. In $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, dotato di un riferimento proiettivo e_0, e_1, e_2, é data la conica $C: X_0X_1 - X_0X_2 - X_1X_2 + X_2^2 = 0$.
1) Verificare che C é semplicemente degenere e determinare equazioni cartesiane delle rette r ed s in cui C si decompone.

2) Sia $P_0 = r \cap s$ e siano P_1 e P_2 i punti in cui C é intersecata dalla retta $t : X_1 + X_2 = 0$. Determinare equazioni della proiettivitá f di $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ tale che $f(P_i) = P_i$ per $i = 0, 1, 2$ ed $f([1, 1, 0]) = [1, 1, 2]$.

Svolgimento 5. 1) La conica C considerata ha matrice rappresentativa $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Dal momento che $rg(A) = 2$, la conica C in questione risulta essere semplicemente degenere. Allo scopo di decidere se C é irriducibile o spezzata, bisogna calcolare la segnatura della forma bilineare simmetrica b di $\mathbf{R}^3$, avente matrice A (rispetto alla base ortonormale standard $\mathbf{E}$). Con tale finalitá procediamo, mediante l'algoritmo di Lagrange, alla determinazione di una opportuna base b-diagonalizzante.

Sia $\mathbf{E}' = (\underline{e}_0 + \underline{e}_1 \quad \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2) = \mathbf{E}C$, con $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed in base $\mathbf{E}'$ si avrá conseguentemente che $A' = C^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Sia ora invece $\mathbf{E}'' = (\underline{e}''_0 \quad \underline{e}''_1 \quad \underline{e}''_2)$, dove si sia posto
$\underline{e}''_0 = \underline{e}'_0 \quad \underline{e}''_1 = \underline{e}'_1 - \frac{b(\underline{e}'_0, \underline{e}'_1)}{b(\underline{e}'_0, \underline{e}'_0)}\underline{e}'_0 = \underline{e}'_1 - \frac{\frac{1}{2}}{1}\underline{e}'_0 = \underline{e}'_1 - \frac{1}{2}\underline{e}'_0 \quad \underline{e}''_2 = \underline{e}'_2 - \frac{b(\underline{e}'_0, \underline{e}'_2)}{b(\underline{e}'_0, \underline{e}'_0)}\underline{e}'_0 =$
$= \underline{e}'_2 - \frac{-1}{1}\underline{e}'_0 = \underline{e}'_2 + \underline{e}'_0$ e pertanto ne discenderá immediatamente che $\mathbf{E}'' = \mathbf{E}'C'$, con $C' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allora in base $\mathbf{E}''$ si potrá constatare che $A'' = C'^tA'C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(matrice diagonale).

Ne scaturisce dunque chiaramente che la forma bilineare simmetrica b in esame possiede segnatura (1,1) e la conica C risulta essere quindi in definitiva una conica semplicemente degnere spezzata, con forma canonica $D : x_0'^2 - x_1'^2 = 0$.

Per normalizzare la diagonale di A'' si ponga $\mathbf{F} = (\underline{e}''_0 \quad 2\underline{e}''_1 \quad \underline{e}''_2) = \mathbf{E}''H$, con $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e difatti in tale base si perverrá alla matrice $\widetilde{A} = H^tA''H =$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Pertanto una proiettivitá f di $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ che trasformi il supporto della conica C inizialmente assegnata nel supporto della corrispondente forma canonica D avrá equazioni rappresentate da $\underline{x}' = \alpha(CC'H)^{-1}\underline{x}$, con matrice rappresentativa $(CC'H)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, cosicché sostanzialmente si otterranno le seguenti equazioni $\begin{cases} x_0' = \frac{\alpha}{2}(x_0+x_1-2x_2)\\ x_1' = \frac{\alpha}{2}(-x_0+x_1)\\ x_2' = \alpha x_2\end{cases}$

(con $\alpha \in \mathbf{R}^*$)

Osserviamo allora che la conica C ammette l'espressione $X_0'^2 - X_1'^2 = (X_0' + X_1')(X_0' - X_1') = \alpha^2(X_1 - X_2)(X_0 - X_2) = \alpha^2(X_0X_1 - X_0X_2 - X_1X_2 + X_2^2)$ e possiamo perció concludere che tale conica semplicemente degenere spezzata si decompone nelle seguenti due rette di equazioni cartesiane $r : X_0 - X_2 = 0$ ed $s : X_1 - X_2 = 0$.

2) Si puó agevolmente constatare che $P_0 = r \cap s : \begin{cases} X_0 - X_2 = 0\\ X_1 - X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow X_0 = X_1 = X_2 \mapsto P_0 = [1,1,1]$, mentre $P_{1,2} = C \cap t : \begin{cases} X_0X_1 - X_0X_2 - X_1X_2 + X_2^2 = 0\\ X_1 + X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1 = -X_2, -X_0X_2 - X_0X_2 + X_2^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow 2X_2(X_2 - X_0) = 0$

$\mapsto X_2 = 0, X_1 = -X_2 = 0$ e dunque $P_1 = [1,0,0]$ OPPURE

$\mapsto X_2 = X_0, X_1 = -X_2 = -X_0$ e di conseguenza $P_2 = [1,-1,1]$

Rammentiamo a questo punto l'enunciato del teorema fondamentale delle proiettivitá: in $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V_k^{n+1})$ siano $(P_0, ..., P_{n+1})$ e $(Q_0, ..., Q_{n+1})$ due (n+2)-ple di punti in posizione generale; allora esiste un'unica proiettivitá $f \in \mathrm{PGL}(\mathbf{P}^n)$ tale che si abbia $f(P_0) = Q_0, ..., f(P_{n+1}) = Q_{n+1}$.

Nella situazione specifica in esame risulterá che $\begin{cases} P_0 = [1,1,1] & Q_0 = [1,1,1]\\ P_1 = [1,0,0] & Q_1 = [1,0,0]\\ P_2 = [1,-1,1] & Q_2 = [1,-1,1]\\ P_3 = [1,1,0] & Q_3 = [1,1,2]\end{cases}$

Sia $P_i = [\underline{v}_i], Q_i = [\underline{w}_i]$ (per $i = 0,1,2,3$)e, poiché i punti assegnati sono in posizione generale, allora ne scaturirá che $\underline{v}_3 = \sum_{i=0}^2 \lambda_i\underline{v}_i = \lambda_0\underline{v}_0 + \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2$ e $\underline{w}_3 = \sum_{i=0}^2 \mu_i\underline{w}_i = \mu_0\underline{w}_0 + \mu_1\underline{w}_1 + \mu_2\underline{w}_2$, dove tutti i coefficienti λ_i e μ_i che compaiono in tali espressioni risultano essere non nulli:

$(1,1,0) = \lambda_0(1,1,1) + \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,-1,1) = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_0 - \lambda_2, \lambda_0 + \lambda_2) \mapsto \lambda_0 = \frac{1}{2}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$(1,1,2) = \mu_0(1,1,1) + \mu_1(1,0,0) + \mu_2(1,-1,1) = (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2, \mu_0 - \mu_2, \mu_0 +$

$+ \mu_2) \mapsto \mu_0 = \frac{3}{2}, \mu_1 = -1, \mu_2 = \frac{1}{2}$
Considerate le basi $\mathbf{F} = (\lambda_0\underline{v}_0 \quad \lambda_1\underline{v}_1 \quad \lambda_2\underline{v}_2) = (\frac{1}{2}\underline{v}_0 \quad \underline{v}_1 \quad -\frac{1}{2}\underline{v}_2)$ e $\mathbf{G} = (\mu_0\underline{w}_0 \quad \mu_1\underline{w}_1 \quad \mu_2\underline{w}_2) = (\frac{3}{2}\underline{w}_0 \quad -\underline{w}_1 \quad \frac{1}{2}\underline{w}_2)$, esiste un unico automorfismo $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tale che risulti essere $\varphi(\mathbf{F}) = \mathbf{G}$, e conseguentemente la proiettività $f = [\varphi]$ verificherá le condizioni richieste.

Si ha che $\mathbf{F} = \mathbf{E}C$, con $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ed invece $\mathbf{G} = \mathbf{E}D$, con $D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Allora $\varphi(\mathbf{E}) = \varphi(\mathbf{F}C^{-1}) = \varphi(\mathbf{F})C^{-1} = \mathbf{G}C^{-1} = \mathbf{E}DC^{-1}$ e pertanto l'automorfismo φ avrá equazioni individuate da $x' = \alpha(DC^{-1})x$, con $\alpha \in \mathbf{R}^*$, equazioni che ci proponiamo di determinare esplicitamente:

$$C^{-1} = 2\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$DC^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{cases} x_0' = \alpha(-x_0 + 2x_1 + 2x_2) \\ x_1' = \alpha(x_1 + 2x_2) \qquad \text{con } \alpha \in \mathbf{R}^* \\ x_2' = \alpha(2x_1 + x_2) \end{cases}$$

Esercizio 6. In $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard, sia W il sottospazio vettoriale di equazione $2X - Y + Z = 0$, e sia $\underline{v} = (1, 1, 1)$.
(**a**) Trovare una base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ di W tale che $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{v}\}$ é una base di $\mathbf{R}^3$ orientata concordemente alla base standard $\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$;
(**b**) Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ applicando il metodo di Gram-Schmidt a $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{v}\}$;
(**c**) Determinare se esistono vettori $\underline{w} \in W$ tali che $||\underline{w}|| = 3$ e $\underline{w}$ forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con $\underline{u} = (1, 0, 1)$.

Svolgimento 6. (**a**) Osserviamo anzitutto che una base del sottospazio vettoriale W considerato puó essere ad esempio rappresentata da $\left\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\right\}$, dove si ponga $\underline{f}_1 = (1, 2, 0)$ ed $\underline{f}_2 = (0, 1, 1)$ (si tratta difatti di una coppia di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione due). A questo punto ortogonalizziamo tale base ricorrendo all'algoritmo di Gram-Schmidt: $\underline{g}_1 = \underline{f}_1 = (1, 2, 0), \underline{g}_2 = \underline{f}_2 - \frac{\langle \underline{g}_1, \underline{f}_2 \rangle}{\langle \underline{g}_1, \underline{g}_1 \rangle}\underline{g}_1 = \underline{f}_2 - \frac{2}{5}\underline{g}_1 = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1)$.
Si ha inoltre che $||\underline{g}_1|| = \sqrt{5}, ||\underline{g}_2|| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ e di conseguenza una base ortonormale del sottospazio vettoriale W in esame sará individuata da $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} =$

$= \left\{ \frac{\underline{g}_1}{||\underline{g}_1||}, \frac{\underline{g}_2}{||\underline{g}_2||} \right\}$, dove pertanto $\underline{e}_1 = \frac{\underline{g}_1}{||\underline{g}_1||} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ ed $\underline{e}_2 = \frac{\underline{g}_2}{||\underline{g}_2||} =$
$= (-\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})$.
Possiamo pertanto agevolmente constatare che $\mathbf{F} = (\underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \underline{v}) = \mathbf{E}C =$
$= (\underline{E}_1 \quad \underline{E}_2 \quad \underline{E}_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix}$ ed allora ne discenderá immediatamente che:

$$det(C) = det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{4}{5\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} > 0$$

$\longmapsto$ la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{v}\}$ dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ che si é appena costruita esplicitamente risulta orientata concordemente alla base standard $\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$ di $\mathbf{R}^3$.
(**b**) Utilizzando il metodo algoritmico di Gram-Schmidt, ci proponiamo di ortonormalizzare la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{v}\}$ di $\mathbf{R}^3$: con tale finalitá poniamo
$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$, $\qquad \underline{v}_2 = \underline{e}_2 - \frac{\langle \underline{v}_1, \underline{e}_2 \rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle}\underline{v}_1 = \underline{e}_2 - \frac{0}{1}\underline{v}_1 = \underline{e}_2 =$
$= (-\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})$, $\qquad \underline{v}_3 = \underline{v} - \frac{\langle \underline{v}_1, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle}\underline{v}_1 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle}\underline{v}_2 = \underline{v} - \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{1}\underline{v}_1 - \frac{\frac{4}{\sqrt{30}}}{1}\underline{v}_2 =$
$= (1, 1, 1) - \frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0) - \frac{4}{\sqrt{30}}(-\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Quindi si avrá sostanzialmente che $\mathbf{G} = (\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3) = \mathbf{E}D$, con

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Risulta inoltre che $||\underline{v}_1|| = 1, ||\underline{v}_2|| = 1$ e $||\underline{v}_3|| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e dunque la base ortonormale richiesta sará individuata da $\mathbf{F}' = (\frac{\underline{v}_1}{||\underline{v}_1||}, \frac{\underline{v}_2}{||\underline{v}_2||}, \frac{\underline{v}_3}{||\underline{v}_3||}) = \mathbf{E}D'$, dove si sia posto $D' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ (si osservi in particolare che $det(D') =$
$= \frac{1}{30} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{4}{30} = 1$ e di conseguenza possiamo concludere che $D' \in SO_3(\mathbf{R})$, ovvero si tratta effettivamente di una matrice ortogonale speciale).
c) Ipotizziamo che esistano effettivamente vettori $\underline{w} \in W$, i quali soddisfino le ipotesi che stiamo prendendo in considerazione; rammentando che $\left\{ \underline{f}_1, \underline{f}_2 \right\}$, dove si sia posto $\underline{f}_1 = (1, 2, 0)$ ed $\underline{f}_2 = (0, 1, 1)$, rappresenta una base del sottospazio vettoriale W considerato, potremo allora immediatamente asserire che $\underline{w} = a\underline{f}_1 + b\underline{f}_2 = a(1, 2, 0) + b(0, 1, 1) = (a, 2a + b, b)$ con $a, b \in \mathbf{R}$.
Imponiamo a questo punto che siano verificate le condizioni richieste:

- $||\underline{w}|| = 3 \mapsto ||\underline{w}|| = \sqrt{\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + b^2 + 4ab + b^2} = \sqrt{5a^2 + 4ab + 2b^2} =$

$= 3$

- il vettore $\underline{w}$ forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con $\underline{u} = (1,0,1) \mapsto \frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{\langle u,w\rangle}{||\underline{u}||\cdot||\underline{w}||}\right) =$

  $= \arccos\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}\cdot 3}\right)$

Dunque $\frac{\sqrt{2}}{2} = cos(\frac{\pi}{4}) = cos(\arccos\left(\frac{a+b}{3\sqrt{2}}\right)) = \frac{a+b}{3\sqrt{2}}$ e di conseguenza risulterá che $a + b = 3$, ovvero $b = 3 - a$. Pertanto potremo constatare che $||\underline{w}|| = 3 \Rightarrow 5a^2 + 4ab + 2b^2 = 9 \Rightarrow 5a^2 + 4a(3 - a) + 2(9 + a^2 - 6a) =$
$= 9 \Rightarrow 5a^2 + 12a - 4a^2 + 18 + 2a^2 - 12a = 9 \Rightarrow 3a^2 + 9 = 0 \longmapsto$ IMPOSSIBILE! non esiste alcun vettore $\underline{w} \in W$ tale che si abbia $||\underline{w}|| = 3$ e $\underline{w}$ formi un angolo di ampiezza pari a $\frac{\pi}{4}$ con il vettore $\underline{u} = (1,0,1)$.

Esercizio 7. Siano $\underline{v}_1 = (0,0,1,1), \underline{v}_2 = (0,1,1,0) \in \mathbf{R}^4$ e sia $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2\rangle \subset N(F), F(\underline{E}_4) = \underline{E}_3, F(\underline{E}_1) = c\underline{E}_1$ per qualche numero reale c, dove $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3, \underline{E}_4$ é la base canonica di $\mathbf{R}^4$.
(**a**) Determinare una matrice di F;
(**b**) Trovare basi per gli autospazi di F;
(**c**) Determinare i valori di c per i quali F é diagonalizzabile.

Svolgimento 7. (**a**) La matrice dell'applicazione lineare F rispetto alla base canonica standard $\mathbf{E} = \{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3, \underline{E}_4\}$ di $\mathbf{R}^4$ (ovvero la matrice A tale che si abbia $F(\mathbf{E}) = \mathbf{E}A$) risulterá essere della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R}). \text{ Si ha che}$$

$$F(\underline{E}_4) = A\underline{E}_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$= \underline{E}_3 \mapsto a_{14} = 0, a_{24} = 0, a_{34} = 1, a_{44} = 0$

$$\text{ed } F(\underline{E}_1) = A\underline{E}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c\underline{E}_1 \mapsto$$

$\mapsto a_{11} = c, a_{21} = 0, a_{31} = 0, a_{41} = 0$ (con $c \in \mathbf{R}$).
Presi in considerazione i vettori $\underline{v}_1 = (0,0,1,1), \underline{v}_2 = (0,1,1,0) \in \mathbf{R}^4$, allora il sottospazio vettoriale da essi generato sará rappresentato da: $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2\rangle =$
$= \{a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 | a, b \in \mathbf{R}\} = \{a(0,0,1,1) + b(0,1,1,0) | a, b \in \mathbf{R}\} = \{(0, b, a + b, a) | a, b \in \mathbf{R}\}$.

Pertanto ne scaturisce che $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \subset Ker(F) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F((0,b,a+b,a)) = \begin{pmatrix} c & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per ogni } a, b \in \mathbf{R}$$

$$\mapsto \begin{cases} a_{12}b + a_{13}(a+b) = 0 \\ a_{22}b + a_{23}(a+b) = 0 \\ a_{32}b + a_{33}(a+b) + a = 0 \\ a_{42}b + a_{43}(a+b) = 0 \end{cases} \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbf{R}$$

- per $a = 1, b = 0$ si ha: $a_{13} = 0, a_{23} = 0, a_{33} = -1, a_{43} = 0$
- per $a = 0, b = 1$ si ha: $a_{12} + a_{13} = 0 \qquad a_{22} + a_{23} = 0$
  $a_{32} + a_{33} = 0 \qquad a_{42} + a_{43} = 0 \Rightarrow \qquad a_{12} = 0, a_{22} = 0, a_{32} = 1, a_{42} = 0.$

Si puó conseguentemente concludere che la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare F sará data da $A = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed infatti tale matrice verifica tutti i requisiti richiesti concernenti la trasformazione che si sta considerando, dal momento che:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per ogni } a, b \in \mathbf{R},$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(**b**) L'applicazione lineare F ha polinomio caratteristico $P(x) = det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} c-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (c-x) \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1-x & -1-x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (c-x)(-x^2 - x^3) = x^2(x+1)(x-c).$

Risulterá di conseguenza che $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ oppure $\lambda = -1$ oppure $\lambda = c$, cosicché gli autovalori associati a tale polinomio caratteristico saranno individuati da $\lambda = 0, \mu = -1$ e $\gamma = c$, con molteplicità algebriche rispettivamente rappresentate da $h_\lambda = 2, h_\mu = h_\gamma = 1$.

Dunque in definitiva l'operatore lineare in esame avrá spettro $\Lambda(F) = \{0, -1, c\}$

e ci proponiamo ora di determinare esplicitamente le basi per gli autospazi relativi a ciascuno di tali autovalori:

- l'autospazio $\mathbf{E}_\lambda = Ker(F)$ ha equazioni cartesiane (rispetto alla base $\mathbf{E}$) $Ax = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \mapsto \mathbf{E}_\lambda = \langle (0,1,1,0),(0,1,0,-1) \rangle$
- l'autospazio $\mathbf{E}_\mu = Ker(F + \mathbf{1}_{\mathbf{R}^4})$ ha equazioni cartesiane (rispetto alla base $\mathbf{E}$) $(A + I_4)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} c+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \mapsto$

  $\mapsto \mathbf{E}_\mu = \langle (0,0,1,0) \rangle$ e quindi $d_\mu = 1$

- l'autospazio $\mathbf{E}_\gamma = Ker(F - c\mathbf{1}_{\mathbf{R}^4})$ ha equazioni cartesiane (rispetto alla base $\mathbf{E}$) $(A - cI_4)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 + (-1-c)x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \mapsto \mathbf{E}_\gamma = \langle (1,0,0,0) \rangle$ e quindi $d_\gamma = 1$

(**c**) Rammentiamo che,se in $K[x]$ il polinomio caratteristico P di un operatore lineare T si fattorizza nella forma $P = (\lambda_1 - x)^{h_1}(\lambda_2 - x)^{h_2} \cdots (\lambda_s - x)^{h_s} Q$, dove Q é un polinomio costante oppure è prodotto di un numero finito di polinomi irriducibili in $K[x]$, ciascuno di grado maggiore o uguale a due, allora risulterá che:
(i) se Q non é costante (cioé se P ha almeno un fattore irriducibile di grado ≥ 2),T non é diagonalizzabile (infatti in tale caso risulta chiaramente che $\sum_{i=1}^{s} d_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{s} h_{\lambda_i} < n$)
(ii) se Q é costante (cioé se P ha soltanto fattori lineari e dunque $\sum_{i=1}^{s} h_{\lambda_i} = = n$), allora si avrá evidentemente che T é diagonalizzabile $\Leftrightarrow d_{\lambda_i} = h_{\lambda_i} (\forall i = = 1, ..., s)$.
Nella situazione specifica in esame, avendo precedentemente constatato che $h_\mu = d_\mu = 1, h_\gamma = d_\gamma = 1$ ed $h_\lambda = 2$, si potrá agevolmente osservare che:
F é un operatore lineare diagonalizzabile $\Leftrightarrow d_\lambda = 2$.
Si ha allora che $d_\lambda = dim\mathbf{E}_\lambda = 4 - rg(A) = 2 \Leftrightarrow rg(A) = 2$:
per $c \neq 0$ tale asserzione é banalmente verificata OK!;

per $c = 0$, si ha invece che gli autovalori dell'applicazione F considerata si riducono esclusivamente a $\lambda = 0$ (con molteplicitá algebrica $h_\lambda = 3, rg(A) = 1$, e conseguentemente anche molteplicitá geometrica $d_\lambda = dim\mathbf{E}_\lambda = 4 - rg(A) = 3$) e $\mu = -1$ (con banalmente $h_\mu = d_\mu = 1$); quindi anche in tale caso la diagonalizzabilitá dell'operatore lineare F risulta garantita.
Possiamo pertanto concludere che l'applicazione F considerata risulta essere diagonalizzabile per ogni possibile valore del parametro reale $c \in \mathbf{R}$.

Esercizio 8. (**a**) Provare che se $A \in M_n(\mathbf{R})$, allora A e la sua trasposta A^t hanno gli stessi autovalori.
(**b**) Dare un esempio di matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ tale che A e A^t non hanno gli stessi autovettori.
(**c**) Sia $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e quelli di A^{-1}.

Svolgimento 8. (**a**) Data una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ e denotata con x un'indeterminata su $\mathbf{R}$, rammentiamo che il determinante $det(A - xI_n)$ costituisce un polinomio in x a coefficienti reali, detto polinomio caratteristico di A e denotato P o $P(x)$ o $P_A(x)$; si puó a tale proposito immediatamente constatare che $P_A = det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & ..... & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} - x \end{vmatrix}$.
Rammentiamo inoltre che una generica matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ e la sua corrispondente matrice trasposta A^t presentano il medesimo determinante (ovvero risulta che $det(A) = det(A^t)$ e conseguentemente ne potremo agevolmente desumere che:
$P_{A^t} = det(A^t - xI_n) = det((A - xI_n)^t) = det(A - xI_n) = P_A \mapsto$ una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso polinomio caratteristico.
A questo punto sará sufficiente prendere in considerazione il risultato teorico, il quale asserisce che, se T é un operatore lineare di uno spazio vettoriale $V = V^n_{\mathbf{R}}$, allora λ rappresenta un autovalore di T se e soltanto se λ risulta essere una radice del polinomio caratteristico P di T, allo scopo di poter effettivamente concludere che una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ e la sua corrispondente matrice trasposta A^t possiedono gli stessi autovalori, come ci si era riproposti di dimostrare.
(**b**) Supponiamo di porre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico associato a tale matrice sará dunque rappresentato da $P_A(x) = det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1 - x & 0 \\ 2 & 3 - x \end{vmatrix} = (1 - x)(3 - x)$, il quale ammetterá come radici i seguenti

due autovalori $\lambda = 1$ e $\mu = 3$ dell'operatore considerato:
autovettori associati all'autovalore $\lambda = 1$: $\quad \underline{v} = (x, y) \qquad A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = x \\ 2x + 3y = y \end{cases} \qquad x + y = 0 \mapsto \underline{v} = (a, -a), \forall a \in \mathbf{R}$$

autovettori associati all'autovalore $\mu = 3$: $\quad \underline{w} = (x, y) \qquad A\underline{w} = \mu\underline{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 3x \\ 2x + 3y = 3y \end{cases} \qquad x = 0 \mapsto \underline{w} = (0, b), \forall b \in \mathbf{R}.$$

Prendiamo a questo punto invece in considerazione la corrispondente matrice trasposta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, che, in virtú di quanto precedentemente osservato, ammetterá i medesimi autovalori $\lambda = 1$ e $\mu = 3$:
autovettori associati all'autovalore $\lambda = 1$: $\quad \underline{v} = (x, y) \qquad A^t\underline{v} = \lambda\underline{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y = x \\ 3y = y \end{cases} \qquad y = 0 \mapsto \underline{v} = (a, 0), \forall a \in \mathbf{R}$$

autovettori associati all'autovalore $\mu = 3$: $\quad \underline{w} = (x, y) \qquad A^t\underline{w} = \mu\underline{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} \qquad x - y = 0 \mapsto \underline{w} = (b, b), \forall b \in \mathbf{R}.$$

É pertanto evidente che la configurazione appena presentata rappresenta un efficace esempio di matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ tale che A e A^t non abbiano gli stessi autovettori.
(**c**) Sia $A \in GL_n(\mathbf{R})$ e concentriamo la nostra attenzione sugli autovalori della matrice A e della sua matrice inversa A^{-1}.
Ricordiamo che il polinomio caratteristico rappresenta un invariante dell'-operatore lineare a cui risulta associato, ovvero due matrici simili, come sono quelle che rappresentano tale applicazione in due basi diverse, hanno il medesimo polinomio caratteristico (e quindi chiaramente anche esattamente gli stessi autovalori). Da quest'ultima osservazione si deduce allora agevolmente che se $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ si ha pure $A^{-1}\underline{v} = \frac{1}{\lambda}\underline{v}$, ossia gli autovalori della matrice inversa A^{-1} risultano essere gli inversi degli autovalori della matrice A ed invece gli autovettori sono precisamente i medesimi.

Esercizio 9. Sia A un anello commutativo unitario e sia a un elemento nilpotente di A (cioé un elemento $a \in A$ tale che $a^k = 0$, per qualche intero $k \geq 1$). Mostrare che: (**a**) L'insieme I degli elementi nilpotenti di A é un ideale di A e che l'anello quoziente $\frac{A}{I}$ é privo di elementi nilpotenti diversi dall'elemento nullo.
(**b**) Se u é un elemento invertibile di A e se a é un elemento nilpotente di A, allora $u + a$ é invertibile in A (determinare esplicitamente il suo inverso).
(**c**) Se a_0 é un elemento invertibile di A e se $a_1, a_2, ..., a_m$ sono elementi nilpotenti di A, con $m \geq 1$, allora il polinomio $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_mX^m$ é un elemento invertibile in $A[X]$.
(**d**) Sia $a \in A$, allora: $1 + aX$ é invertibile in $A[X] \Leftrightarrow a$ é nilpotente in A.

Svolgimento 9. (**a**) L'insieme di tutti gli elementi nilpotenti di un anello A, ovvero $N_A = \left\{x \in A | \exists n \in \mathbf{Z}^+ \ \textit{tale che}\ x^n = 0\right\}$, viene denominato consuetamente nilradicale dell'anello A; dimostriamo che il nilradicale N_A costituisce un ideale dell'anello A.
Sia $x \in N_A$ ed allora esiste $n \in \mathbf{Z}^+$ tale che si abbia $x^n = 0$. Di conseguenza, per ogni $a \in A$, risulterá che $(ax)^n = a^n x^n = 0$, per cui $ax \in N_A$. Siano $x, y \in N_A$ ed allora esistono $n, m \in \mathbf{Z}^+$ tali che $x^n = 0$ ed $y^m = 0$.
Rammentiamo a questo punto che in ogni anello A vale la formula del binomio: $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ e $\forall a, b \in A$ risulta che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$; in virtú di tale formula del binomio, nella situazione specifica in esame si avrá che
$(x-y)^{n+m-1} = \sum_{r+s=n+m-1} (-1)^s \begin{pmatrix} r+s \\ s \end{pmatrix} x^r y^s$ con $r \geq n$ oppure $s \geq m$ (non si puó avere contemporaneamente $r \leq n-1$ ed $s \leq m-1$), per cui risulta $x^r = 0$ oppure $y^s = 0$, cioé ogni termine dello sviluppo del binomio é nullo e quindi $(x-y)^{n+m-1} = 0$, ossia si avrá che $(x-y) \in N_A$. Pertanto N_A costituisce effettivamente un ideale dell'anello A.
Mostriamo ora invece che l'anello quoziente $\frac{A}{N_A}$ non possiede elementi nilpotenti diversi dall'elemento nullo: supponiamo che $x + N_A$ sia un elemento nilpotente nel quoziente $\frac{A}{N_A}$; allora esiste $n \in \mathbf{Z}^+$ tale che si abbia $(x + N_A)^n = N_A$, ossia $x^n + N_A = N_A$ e di conseguenza $x^n \in N_A$, cosicché esisterá necessariamente $m \in \mathbf{Z}^+$ tale che $x^{nm} = (x^n)^m = 0$, per cui $x \in N_A$, ovvero in definitiva sará possibile concludere che $x + N_A = N_A$, come ci si era riproposti di dimostrare.
(**b**) Sia u un elemento invertibile di A (ovvero $\exists v \in A$ tale che si abbia $uv = 1$) e sia a un elemento nilpotente di A.
Allora $v(u+a) = 1 + va$, con va elemento nilpotente (in quanto ab risulta essere nilpotente per ogni $b \in A$, dal momento che, come si é precedentemente constatato, il nilradicale N_A costituisce un ideale dell'anello A). Dunque, per un opportuno intero $k \geq 1$ (che possiamo supporre dispari), si avrá che $(va)^k = 0$. Di conseguenza ne scaturisce che $1 = 1 + (va)^k = (1 +$
$+va)[(va)^{k-1} - (va)^{k-2} + ... - va + 1] = (u+a)\left\{v[(va)^{k-1} - (va)^{k-2} + ... - va + 1]\right\}$.
Concludiamo pertanto che $(u+a)^{-1} = v[(va)^{k-1} - (va)^{k-2} + ... - va + 1]$, ovvero $u + a$ risulta essere un elemento invertibile in A.
(**c**) Se $a_1, ...a_m \in A$ sono elementi nilpotenti, essi risultano essere nilpotenti anche in $A[X]$, ed allora anche $a_1 X, ..., a_m X^m$ sono elementi nilpotenti in $A[X]$ per la parte (a) della dimostrazione. Se inoltre $a_0 \in A$ é un elemento invertibile, esso risulta essere invertibile anche in $A[X]$, ed allora anche $(a_0 + a_1 X)$ costituisce un elemento invertibile in $A[X]$ per la parte (b) della dimostrazione. Procedendo per induzione su m, possiamo concludere che anche il polinomio $a_0 + a_1 X + ... + a_m X^m = (a_0 + a_1 X + ... + a_{m-1} X^{m-1}) + a_m X^m$ rappresenta un elemento invertibile in $A[X]$.

(**d**) ($\Rightarrow$) Supponiamo che $1+aX$ risulti essere invertibile in $A[X]$ e che dunque si abbia $(1+aX)(x_0+x_1X+.....+x_mX^m) = 1$. Allora ne discende immediatamente che $x_0 = 1, x_1 = -a, x_2 = a^2, x_3 = -a^3, ..., x_m = (-1)^m a^m, x_m a =$ $= (-1)^m a^{m+1} = 0$, da cui la conclusione.
($\Leftarrow$) L'implicazione opposta scaturisce banalmente dalla parte (b) della dimostrazione.

Esercizio 10. Dimostrare che l'insieme di tutte le funzioni $y = f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ che soddisfano l'equazione differenziale $y'' - y = 0$ é uno spazio vettoriale di dimensione due su $\mathbf{R}$.

Svolgimento 10. Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti. Rammentiamo che, considerata una generica equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea della forma $L(y) = y'' + ay' + by = 0$ con a, b costanti, allora l'insieme delle soluzioni risulta essere della tipologia $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, con $y_1(x), y_2(x)$ soluzioni dell'equazione differenziale e c_1, c_2 parametri reali. Questa struttura risulta valida in generale dal momento che, se $y_1(x), y_2(x)$ sono soluzioni, allora si puó agevolmente constatare che $L(c_1y_1 + c_2y_2) =$ $= L(c_1y_1) + L(c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = 0$; abbiamo pertanto verificato che, se $L(y_1) = L(y_2) = 0$, cioé se $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ risultano essere soluzioni dell'equazione omogenea considerata, allora anche $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ ne é soluzione, per ogni eventuale scelta dei parametri c_1, c_2. In questa maniera abbiamo individuato tutte le possibili soluzioni, in quanto sussiste il seguente rilevante risultato teorico: siano $y_1(x), y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $L(y) = y''+ay'+by = 0$, soddisfacenti per $x = 0$ la condizione $\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) \neq 0$; allora tutte le soluzioni dell'equazione considerata saranno del tipo $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, al variare dei parametri reali c_1, c_2.
Ci proponiamo a questo punto di determinare esplicitamente le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea. A tal proposito ricordiamo preliminarmente che, per le equazioni lineari omogenee del primo ordine $y' = ay$, con a costante, $y(x) = e^{ax}$ ne costituisce una soluzione. Sará conseguentemente naturale ricercare le soluzioni dell'equazione considerata nella forma $y(x) = e^{\lambda x}$, essendo λ un parametro da determinare opportunamente. Risulta che $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ed abbiamo quindi $L(e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) \mapsto$
$\mapsto$ l'equazione differenziale $L(e^{\lambda x}) = 0$ é soddisfatta se e soltanto se λ é soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, che prende il nome di equazione caratteristica associata all'equazione differenziale in esame . Indichiamo con λ_1, λ_2 le radici rappresentate da

$\lambda_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Se il discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ non é negativo,λ_1 e λ_2 risultano essere ben definiti come numeri reali, altrimenti, se $\Delta < 0$, é utile prendere in considerazione i seguenti parametri $\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ (rispettivamente parte reale e coefficiente della parte immaginaria dei numeri complessi λ_1, λ_2). Sarebbe dunque possibile dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione del secondo ordine lineare omogenea $L(y) = y'' + ay' + by = 0$ si descrivono nel modo seguente, nei casi $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$:
se $\Delta > 0 \;\; y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$,
se $\Delta = 0 \;\; y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$,
se $\Delta < 0 \;\; y(x) = c_1 e^{\alpha x} cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sin(\beta x)$.
Nella situazione specifica in esame, in cui si considera l'equazione differenziale $y'' - y = 0$, si avrá conseguentemente che:
$y(x) = e^{\lambda x}, y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ed allora $L(e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} =$
$= e^{\lambda x}(\lambda^2 - 1)$, cosicché ne scaturisce che $L(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1 \mapsto$ tutte e sole le soluzioni saranno pertanto rappresentate da $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$, al variare dei parametri $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.
Si puó quindi in definitiva concludere che l'insieme di tutte le funzioni che soddisfano tale equazione differenziale costituisce effettivamente uno spazio vettoriale di dimensione due su $\mathbf{R}$, avente base individuata da $\{e^{-x}, e^{x}\}$.

Esercizio 11. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare definito positivo con norma $|| \cdot ||$. Dimostrare che vale la legge del parallelogramma: presi comunque $u, v \in V$ risulta che $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$. Darne inoltre un significato e una dimostrazione geometrica nel caso in cui V sia il piano euclideo $\mathbf{E}^2$.

Svolgimento 11. Siano $u, v \in V$ ed allora si potrá constatare agevolmente che $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle +$
$+ \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = 2 \langle u, u \rangle + 2 \langle v, v \rangle =$
$= 2||u||^2 + 2||v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$ e quindi vale effettivamente la regola del parallelogramma, di cui ci eravamo riproposti di dimostrare la veridicità nello spazio vettoriale reale normato che stiamo considerando.
Presentiamo ora il significato ed una dimostrazione geometrica di tale uguaglianza nel caso in cui si supponga di operare all'interno del piano euclideo $\mathbf{E}^2$: in questo peculiare ambiente la legge del parallelogramma traduce la seguente ben nota proprietá geometrica, 'la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma é uguale alla somma delle aree dei quattro quadrati costruiti su ciascuno dei lati di tale quadrilatero'.
Dimostriamo questa asserzione ricorrendo unicamente a risultati geometrici di carattere elementare: in virtú del teorema del coseno (o teorema di Carnot) si puó agevolmente constatare, denotando rispettivamente con BD

la diagonale minore del parallelogramma e con AC la sua diagonale maggiore, che $\overline{BD}^2 = ||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \cdot ||v||cos\alpha$ ed analogamente $\overline{AC}^2 = ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \cdot ||v||cos(\pi - \alpha) =$
$= ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u|| \cdot ||v||cos\alpha$.
Di conseguenza possiamo effettivamente concludere che sussiste l'uguaglianza in esame, dal momento che $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (||u||^2 + ||v||^2 - - 2||u|| \cdot ||v||cos\alpha) + (||u||^2 + ||v||^2 + 2||u|| \cdot ||v||cos\alpha) = ||u||^2 + ||v||^2 + ||u||^2 + + ||v||^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$, il che conclude esaurientemente la dimostrazione dell'asserto considerato.