PROVA FINALE DI TIPO B e PROVA D'ACCESSO ALLA LAUREA SPECIALISTICA

2-2-2004

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

a) la sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi (analisi e geometria) e con un totale di almeno 51;

b) il punteggio massimo è 100;

c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (Punti 15)

Calcolare il limite seguente

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)^{2^n}.$$

1.2 (Punti 15)

Si consideri una funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ che soddisfa

$$|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|.$$

Dimostrare che la funzione $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da

$$g(x)=x+f(x)$$

è suriettiva.

1.3 (Punti 15)

Calcolare il limite seguente

$$\lim_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\log(n!).$$

1.4 (Punti 25)

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m=1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\alpha x^4,$$

dove α è un parametro. Al variare di α in $\mathbf{R}$ si risponda alle seguenti domande.
(i) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-V'(x),\end{cases}$$

dove $V'(x)=\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$, e se ne discuta la stabilità.
(ii) Determinare i valori di energia $E=E(\alpha)$ in corrispondenza dei quali le traiettorie sono periodiche. In particolare si verifichi che per $\alpha\ge 0$ tutte le traiettorie, che non siano punti d'equilibrio, sono periodiche.
(iii) Per $\alpha\ge 0$ si scriva il periodo come integrale definito (in funzione dell'energia E), e si dimostri che per $\alpha=0$ esso non dipende da E.

1.5 (Punti 25)

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\log(1+x^{2n})}{nx} & x \geq 0. \end{cases}$$

1) Calcolare il limite puntuale di $f_n(x)$.
2) La convergenza è uniforme?
3) Studiare la convergenza di $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

1.6 (Punti 25) **Dissertazione teorica**

Le serie numeriche: convergenza semplice e assoluta. Richiamare le definizioni e i teoremi più importanti.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (Punti 15)

In uno spazio affine reale di dimensione 3, con riferimento affine $RA(\,O, e_1\,,\,e_2\,,\,e_3)$, sono assegnati il punto $P_0 = (1, 0, 1)$ e le due rette di equazioni cartesiane seguenti:

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 0 \\ x = z + 1 \end{cases} .$$

(a) Verificare che r ed s sono sghembe e determinare i due piani paralleli α, β tali che $\alpha \supset r$ e $\beta \supset s$.
(b) Sia t la retta ottenuta proiettando r su β da P_0. Calcolarne equazioni cartesiane.
(c) Determinare il riferimento affine RA' del piano β avente per assi coordinati rispettivamente le rette s, t e tale che il punto $H = (-1, -1, 0) \in \beta$ abbia in RA' coordinate $(1, 1)$.

2.2 (Punti 15)

In uno spazio vettoriale reale V di dimensione 3 è assegnata, rispetto ad una base $E = (e_1\,,\,e_2\,,\,e_3)$, la forma bilineare simmetrica $\langle\,,\rangle$ tale che

$$\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = 2, \quad \langle e_2, e_3\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = 0.$$

(i) Scrivere la matrice M di $\langle\,,\rangle$ in base E e verificare che $\langle\,,\rangle$ è un prodotto scalare.
(ii) Ortonormalizzare E rispetto a $\langle\,,\rangle$.
(iii) Sia F la base ortonormale ottenuta in (ii) e sia W il sottospazio vettoriale di equazione $2X + Y - Z = 0$ (rispetto alla base F).
(a) Determinare una base ortonormale di W .
(b) Determinare la proiezione ortogonale del vettore v di coordinate $(1, 0, -1)$ rispetto alla base F sul sottospazio W.
(c) Determinare una base di $W^\perp$.

2.3 (Punti 15)

Nel piano euclideo $\mathbf{E^2}$ è assegnata la famiglia di coniche euclidee C_t aventi equazione

$$x^2 + 2txy - tx + 2y + 2 = 0,$$

con $t \in \mathbf{R}$.
(i) Classificare, al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, le coniche C_t.
(ii) Per le coniche C_t che sono iperboli determinare il centro.

(iii) Ridurre a forma canonica la conica C_0.

2.4 (Punti 15)

Sia $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbf{C}$:

$$G = \mathbf{R}^* \quad \bigcup \quad \{ix \quad | \quad x \in \mathbf{R}^*\}.$$

(i) Verificare che G è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli.
(ii) Provare che

$$G \simeq (\mathbf{R}, +) \times (\mathbf{Z}_4, +).$$

2.5 (Punti 25)

Sia K un campo e V un K-spazio vettoriale di dimensione n. Un operatore lineare $T : V \longrightarrow V$ si dice *idempotente* se $T^2 := T \circ T = T$.
(a) Provare che se $T : V \longrightarrow V$ è un operatore lineare idempotente, allora
$V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
(b) Provare che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli operatori lineari idempotenti di V e le coppie ordinate (V_1, V_2) di sottospazi di V tali che $V = V_1 \oplus V_2$.
(c) Provare che un operatore lineare idempotente T è diagonalizzabile e determinare $M_{\mathbf{F}}(T)$ con $\mathbf{F}$ base di autovettori di T.

2.6 (Punti 25) **Dissertazione teorica**

(a) Dare caratterizzazioni ed esempi di isometrie di $\mathbf{E^n}$.
(b) Descrivere il gruppo delle isometrie del piano euclideo $\mathbf{E^2}$ e dare alcuni esempi di suoi sottogruppi.

Soluzioni PFB del 2 febbraio 2004

1 Gruppo I (Analisi)

1.1 (15 punti)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)^{2^n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{2^n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}(2)^{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = +\infty$$

(ove $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}^n\right)^{2^n} = e^{-1}$)

1.2 (15 punti)

f è Lipschitziana, quindi continua. Di conseguenza anche g lo è.
Dato ciò avremo che la funzione non è suriettiva se e solo se ammette estremo superiore e/o inferiore. Sia per esempio $y = \underset{x\in\mathbb{R}}{sup} g(x)$ allora:

$$+\infty \gneqq 2y \geq |g(x)-g(2x)| \geq |x|-|f(x)-f(2x)| \geq |x|-\frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

che è assurdo!

1.3 (15 punti)

$$\underset{n\to\infty}{lim}(1-\cos\frac{1}{n})\log(n!) < \underset{n\to\infty}{lim}(1-\cos\frac{1}{n})\log(n^n) =$$

$$\underset{n\to\infty}{lim}(1-\cos\frac{1}{n})\frac{n^2}{n^2}n\log n =$$

$$\underset{n\to\infty}{lim}((1-\cos\frac{1}{n})n^2)\left(\frac{\log n}{n}\right) = 0$$

(ove $\underset{n\to\infty}{lim}(1-\cos\frac{1}{n})n^2 = \frac{1}{2}$)

1.4 (25 punti)

(i) I punti d'equilibrio sono i punti $P = (x, y)$ in cui si annulla il campo vettoriale: $\dot{x} = 0$ richiede $y = 0$, mentre $\dot{y} = 0$ richiede

$$V'(x) = x + \alpha x^3 x = \left(1 + \alpha x^2\right) = 0.$$

Quindi se $\alpha \geq 0$ solo $P_0 = (0, 0)$ è un punto d'equilibrio, mentre se $\alpha < 0$ si hanno tre punti d'equilibrio, $P_0 = (0, 0)$ e $P_\pm = (\pm x_0, 0)$, dove $x_0 = \sqrt{-1/\alpha}$.

Poiché $V''(0) = 1 > 0$, e quindi $x = 0$ è un punto di minimo (isolato) per $V(x)$, il punto d'equilibrio P_0 è sempre un punto d'equilibrio stabile per il teorema di Lagrange. Per $\alpha < 0$ si ha invece $V''(\pm x_0) = 1 + 3\alpha x_0^2 = -2 < 0$, quindi $\pm x_0$ sono punti di massimo (isolati) per $V(x)$: ne segue che $P_\pm$ sono punti d'equilibrio instabile.

(ii) La funzione energia

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x)$$

è una costante del moto per il sistema dinamico associato. Quindi, per ogni dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y})$, la corrispondente traiettoria avrà luogo sulla curva di livello determinata dall'equazione $H(x, y) = H(\bar{x}, \bar{y})$.

Per $\alpha \geq 0$ si ha $H(x, y) > 0$ tranne che in P_0, dove $H(0, 0) = 0$. La funzione $V(x)$ è pari, e $V'(x) > 0$ per $x > 0$: quindi le curve di livello del sistema sono tutte chiuse (e limitate), quindi tutte le traiettorie sono periodiche per ogni valore $E > 0$. In tal caso l'equazione $E - V(x) = 0$ determina due radici $x_\pm$, con $x_- = -x_+$, tali che si ha $V'(x_\pm) \neq 0$. Per $\alpha > 0$ un calcolo esplicito dà

$$x_+ = -x_- = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{1 + 4E\alpha} - 1\right)^{1/2},$$

mentre per $\alpha = 0$ si ha

$$x_+ = -x_- = \sqrt{2E}.$$

Per $\alpha < 0$, disegnato il grafico di $V(x)$ (facilmente ottenibile dalle informazioni sui punti critici e dal fatto che per $x \to \pm\infty$ si ha $V(x) \to -\infty$), si vede subito che si hanno orbite periodiche solo per valori di energia E tali che $0 < E < V(x_0) = -1/4\alpha$. Anche in tal caso l'equazione $E - V(x) = 0$ determina quattro radici, e le due più piccole in modulo, che possiamo indicare di nuovo $x_\pm$, con $x_- = -x_+$, rappresentano i due punti d'inversione della traiettoria periodica. Risulta

$$x_+ = -x_- = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \left(1 - \sqrt{1 + 4E\alpha}\right)^{1/2},$$

dove $0 < 1 + 4E\alpha < 1$ per $0 < E < -1/4\alpha$.

(iii) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, dato un valore E di energia corrispondente a una traiettoria periodica, possiamo scrivere il periodo come

$$T(E) = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - V(x))}},$$

che, scrivendo esplicitamente $x_\pm$ in termini di E secondo una delle tre formule precedenti, esprime il periodo in termini dell'energia E. Se $\alpha = 0$ si ottiene quindi

$$T = 2\int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2E}\sqrt{1 - x^2/2E}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi,$$

come è immediato verificare (per esempio con sostituzione $x = \sin\vartheta$, $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$).

1.5 (25 punti)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(1+x^{2n})}{nx} = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2\log x}{x} & x > 1 \end{cases}$

2) poiché le funzioni che consideriamo sono continue, se la convergenza fosse uniforme, anche la funzione limite lo sarebbe, il che è ovviamente falso!

3) se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+1)}{n} = \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

se $0 < x < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{2n})}{nx} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{nx} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} < \infty$

1.6 (25 punti)

esercizio teorico

2 Gruppo II (Geometria)

2.1 15 punti

a) le due rette sono sghembe se la matrice dei coefficienti e termini noti ha determinante diverso da zero.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{sono sghembe.}$$

Il fascio di piani per r è : $k(x-y-1) + \lambda(y+z-2) = 0 \Rightarrow kx + (\lambda - k)y + \lambda z - (k+2\lambda)$ la cui giacitura è : $kx + (\lambda - k)y + \lambda z = 0$

La giacitura di s è $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ e mettendo a sistema otteniamo $kx + \lambda x = 0 \Rightarrow k = -\lambda$ e quindi $\alpha : x - 2y - z + 1 = 0$.

L'equazione di β sarà nella forma $x - 2y - z + h = 0$; per trovare h basta imporre il passaggio per un punto di s (ad esempio $P_s = (1, 0, 0)$) ottenendo $\beta : x - 2y - z - 1 = 0$.

b) Basta notare che $P_0 \in x - y = 1$ che è uno dei piani che contiene r, quindi l'equazione cartesiana della proiezione è data dall'intersezionbe di questo piano con β, quindi $t : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$

c) Scriviamo r ed s in forma parametrica: $r = (t+1, t, -t) \quad s = (k+1, 0, k)$. L'intersezione delle due rette è il centro del sistema di riferimento: $C : (t + 1, t, -t) = (k + 1, 0, k) \Rightarrow t = 0, k = 0 \Rightarrow C = (1, 0, 0)$

Affinché H abbia coordinate $(1, 1)$ nel nuovo sistema di riferimento mi basta imporre:

$H - C = 1 \cdot [(t + 1, t, -t) - C] + 1 \cdot [(k + 1, 0, k) - C] \Rightarrow (-2, -1, 0) = (t + k, t, k - t) \Rightarrow t = -1, k = -1 \Rightarrow f_1 = (-1, -1, 1), f_2 = (-1, 0, -1)$

2.2 (15 punti)

i) $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$< x, x >= (x, y, z) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + xy + 2y^2 + z^2 \geq x^2 + 2y^2 + \frac{-x^2 - y^2}{2} + z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + z^2 \geq 0$ OK!

ii) Scelgo $e_1 = f_1$, $e_3 = f_3$

$f_2 = e_2 - \frac{<e_1, e_2>}{<e_1, e_1>} e_1 - \frac{e_3, e_2}{e_3, e_3} e_3 = e_2 - e_1$ (ove $< e_2 - e_1, e_2 - e_1 >= 1$)

iii) $W = (t, v, 2t+v) = tf_1 + vf_2 + (2t+v) f_3$; scelgo come vettori linearmente indipendenti $v_1 = (1, 0, 2) \quad v_2 = (0, 1, 1)$.

a) $w_1 = (\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5})$; $w_2' = v_2 - \frac{<v_1, v_2>}{<v_1, v_1>} v_1 = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$ quindi $w_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0)$

c) $w_3' = (1, 0, 0)[= v_3] - \frac{<w_1, v_3>}{<w_1, w_1>} w_1 + \frac{<w_2, v_3>}{<w_2, w_2>} w_2 = (\frac{24}{25}, 0, -\frac{-2}{25})$.

b) La proiezione ortogonale di v è $v^* = (1, 0, -1) - \frac{<v, w_3>}{<w_3, w_3>} w_3 = (1, 0, -1) - \frac{26}{17}(12, 0, -1)$

2.3 (15 punti)

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -t/2 & 1 \\ -t/2 & 1 & t \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$

$det(A) = t^2 + 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$det(A_{00}) = -t^2 \leq 0 \Rightarrow$ è parabola o iperbole.

ii) $\begin{array}{l} \partial F/\partial x \\ \partial F/\partial y \end{array} \begin{cases} 2x + 2ty - t = 0 \\ 2tx + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-\frac{2}{2t}, \frac{t^2+2}{2t^2})$

iii) $C_0 : x^2 + 2y + 2 = 0$

Poiché non compare il termine di primo grado nella x né il termine misto, mi basta traslare il vertice nell'origine:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_0' : y = -x^2$

2.4 (15 punti)

i) Verifichiamo caso per caso:

a) $x, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow xy \in \mathbb{R}^* \subseteq G$
b) $x, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (ix)(iy) = -xy \in \mathbb{R}^* \subseteq G$
c) $x, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (ix)y = i(xy), \quad xy \in \mathbb{R}^*, \in G$
d) $x, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow x(iy) = ixy, \quad xy \in \mathbb{R}^*, \in G$

ii) Basta notare che $(\mathbb{Z}_4, +) \cong (K, \cdot)$ ove $K = \{i^{t+1}, t \in \mathbb{Z}_4\}$ allora

$$\begin{array}{rcc} \varphi : (\mathbb{R}^*, +) \times (\mathbb{Z}_4, +) & \longrightarrow & G \\ (x, t) & \longmapsto & x(i^{t+1}) \end{array}$$

è banalmente un isomorfismo.

2.5 (25 punti)

a) Se $k \in N(T) \Rightarrow T(k) = 0$; se $\exists l \in V : T(l) = k \Rightarrow$
$k = T(l) = T(T(l)) = T(k) = 0$ che è assurdo.

b) Creo le due applicazioni:

$\varphi : (T : V \to V) \longmapsto (N(T) \oplus Im(T))$

$\psi : (V_1 \oplus V_2) \longmapsto \pi_{V_1}$ (che è banalmente lineare e idempotente).

c) Consideriamo i generatori di $N(T)$ e $Im(T)$; sia $< v_1, \ldots, v_s >= N(T) \qquad < v_{s+1}, \ldots, v_n >= Im(T)$

Voglio dimostrare che i vettori scelti sono autovettori e trovare l'autovalore associato:

$\forall i = 1, \ldots, s \Rightarrow$ tutti i vettori sono banalmente autovettori con autovalore 0.

$\forall i = s+1, \ldots, n \Rightarrow T(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{j=s+1}^{n} a_j v_j \Rightarrow T(v_k) = T(T(v_k)) = \sum_{j=1}^{n} a_j T(v_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j T(v_j) - T(v_k) = 0 \Rightarrow a_k =$

$1, \quad a_j = 0 \forall j \neq k \Rightarrow T(v_k) = v_k \Rightarrow$ tutti i vettori sono autovettori con autovalore 1.

La matrice diagonale sarà quindi nella forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

2.6 (25 punti)

esercizio teorico