Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laura Magistrale

Dip. Matematica - Università Roma Tre

Prof. U. Bessi, S. Gabelli, G. Gentile, M. Pontecorvo

7 ottobre 2005

**Istruzioni.**
a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti;
b) il punteggio massimo è 100;
c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti;
d) scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare - usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi;
**NON PARLARE** pena il ritiro del compito.

**Gruppo 1** (analisi)

**1.1 (15 punti.)**

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1} \mathrm{d}x.$$

**1.2 (15 punti.)**

Si consideri l'insieme di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \quad x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}.$$

Calcolare

$$\int\int\int_S x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

spiegando accuratamente tutti i passaggi.

**1.3 (15 punti.)**

Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha$ esiste finito l'integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{|x^2-1|^\alpha}{|\log x|} \sinh(x) \mathrm{d}x.$$

**1.4 (15 punti.)**

Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano $z = (x,y)$ dato da

$$\dot{z} = Az + \varepsilon F(z), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(z) = (2y^3, 2x^3),$$

dove $\mu$ ed $\varepsilon$ sono due parametri reali.

(i) Dimostrare che il sistema ammette una costante del moto $H(x,y)$ e determinarla.

(ii) Per $\varepsilon = 0$, discutere, al variare di $\mu \in \mathbf{R}$, la stabilità dei punti d'equilibrio per il sistema corrispondente. Nel caso $\mu \neq 0$ dire cosa succede alla stabilità di tali punti quando $\varepsilon \neq 0$.

(iii) Per $\mu = -1$ ed $\varepsilon = 2$ studiare il sistema corrispondente. In particolare determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità, e studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.

**1.5 (25 punti.)**

Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

1) Dimostrare che $f$ vincolata a

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x + y + z = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

ammette massimi e minimi.

2) Dimostrare che $f$ ammette un unico punto critico all'interno della superficie $T$.

3) Studiare $f$ vincolata a

$$T \cap \{(x, y, z) \quad : \quad z = 0\}$$

e dimostrare che $P$ è il punto di minimo assoluto di $f$, mentre i punti di massimo stanno sull'intersezione di $T$ con i piani coordinati.

4) Dimostrare che

$$f(\lambda x, \lambda y \lambda z) = \lambda^3 f(x, y, z).$$

5) Usando i punti 3) e 4), dimostrare che, se $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, allora

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

**1.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.**

I moltiplicatori di Lagrange; è possibile vedere gli autovalori delle matrici simmetriche come moltiplicatori di Lagrange?

## Gruppo 2 (geometria)

**2.1 (15 punti.)**

Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare definito positivo con norma $\| \ \|$. Dimostrare che vale la legge del parallelogramma: presi comunque $u, v \in V$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Darne inoltre un significato e una dimostrazione geometrica nel caso in cui $V$ sia il piano Euclideo $\mathbb{E}^2$.

**2.2 (15 punti.)**

Sia $\xi$ una radice complessa primitiva settima dell'unità e sia $\alpha = \xi + \xi^{-1}$.

Costruire l'ampliamento semplice $\mathbb{Q}(\alpha)$ e determinare una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.

**2.3 (15 punti.)**

Esiste un'affinità $f$ del piano $\mathbb{A}^2$ con le seguenti proprietà? Giustificare la risposta.

$$f(-1, \frac{5}{2}) = (2, 1); f(2, 4) = (-2, -3); f(-1, -\frac{3}{2}) = (0, 0); f(2, 0) = (1, -1)$$

**2.4 (15 punti.)**

Dimostrare che l'insieme di tutte le funzioni $y = f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione differenziale

$$\ddot{y} - y = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$.

**2.5 (25 punti.)**

Enunciare e dimostrare condizioni necessarie e sufficienti affinchè data matrice quadrata invertibile a coefficienti reali $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ esista $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che

$$A = M^t M.$$

Discutere anche il caso $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$.

**2.6 (25 punti.)**

Enunciare e dimostrare il teorema di Sylvester per le forme bilineari reali simmetriche.

Discutere poi anche il caso complesso.