UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
ST410 - Statistica 1 - A.A. 2014/2015

Appello B - 5 Febbraio 2015

1	2	3	4	5	6	7	Tot.

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e accompagnando le risposte con spiegazioni complete, chiare ed essenziali. Scrivere il proprio nome su ogni foglio nello spazio predisposto. Non è consentito l'utilizzo di libri o appunti; non è consentito l'uso di calcolatrici.

Tempo: 2h30.

Per il recupero del primo esonero: svolgere i punti contrassegnati dalla lettera A degli esercizi 1,2,3,4 — tempo: 1h15.

Per il recupero del secondo esonero: svolgere i punti contrassegnati dalla lettera B degli esercizi 1,4,5,6,7 — tempo: 1h15.

COGNOME: .... **NOME:** ....

MATRICOLA: ....

Nome e Cognome:

Esercizio 1. Sia X variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda > 0$, i.e.,

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. (A, 2pt) Determinare $m_X(t)$, la funzione generatrice dei momenti di X.
2. (A, 2pt) Calcolare il momento centesimo assoluto di X, i.e., $E(X^{100})$.
3. (B, 2pt) Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie i.i.d. esponenziali di parametro λ. Sapendo che $Y := 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$ (dove χ^2_{2n} è una chi-quadro con $2n$ gradi di libertà) determinare un intervallo di confidenza al 90% per λ.

Nome e Cognome:

Esercizio 2. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con densità di probabilità discreta $f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, con $x = 0$ o $x = 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$.

1. (A, 2pt) Trovare uno stimatore di θ con il metodo dei momenti.

2. (A, 2pt) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

Nome e Cognome:

Esercizio 3. Sia $X_1, \ldots, X_{100}$ un campione casuale di ampiezza 100 estratto da una popolazione di densità $f(x)$ di media 0 e varianza 10. Si indichi con $\overline{X}$ la media campionaria del campione.

1. (A, 2pt) Stimare la probabilità che $\left|\overline{X}\right|$ sia minore di 1 utilizzando la legge debole dei grandi numeri.

2. (A, 2pt) Stimare la probabilità che $\left|\overline{X}\right|$ sia minore di 1 utilizzando il teorema del limite centrale. Può essere utile sapere che $F_N(\sqrt{10}) = 0.999$, dove F_N è la funzione di distribuzione di una normale standardizzata.

Nome e Cognome:

Esercizio 4. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale estratto da

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{se } 0 < x < \theta; \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

con $\theta \in \mathbb{R}^+$. Sia $S = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

1. (A, 2pt) Verificare che la densità di probabilità di S è

$$f_S(x;\theta) = \begin{cases} 3n\frac{x^{3n-1}}{\theta^{3n}} & \text{se } 0 < x < \theta; \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

   (sugg.: può essere utile ricavare prima di tutto la funzione di distribuzione di S).

2. (A, 2pt) Verificare che $E(S) = \frac{3n}{3n+1}\theta$.
3. (A, 2pt) Dimostrare che S è una statistica sufficiente.
4. (B, 2pt) Dimostrare che S è una statistica completa.
5. (B, 2pt) Determinare uno stimatore UMVUE per θ.

Nome e Cognome:

Esercizio 5. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale di ampiezza n estratto da una popolazione con densità $f(x;\theta) = \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x}$ $(x > 0,\ \theta > 0)$.

1. (B, 2pt) Supponendo che le ipotesi di regolarità del teorema di Cramér–Rao siano soddisfatte, trovare il limite inferiore di Cramér–Rao per stimatori non distorti di θ. Si può supporre che sia soddisfatta anche l'ulteriore ipotesi

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(x;\theta)) \cdot f(x;\theta)\right) dx.$$

2. (B, 2pt) Sia $T = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$ stimatore di θ. Trovare il Bias e l'MSE di T.

Nome e Cognome:

Esercizio 6. Sia $X_1, \ldots, X_n$ campione casuale estratto da una popolazione di densità $f(x;\theta)$ con $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$. Si vuole testare l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = \theta_0$ in alternativa all'ipotesi $H_1 : \theta = \theta_1$ attraverso un test Y basato sul campione.

1. (B, 2pt) Nel caso in questione esplicitare cosa si intende:
   (a) per "regione critica di Y",
   (b) per "funzione di potenza di Y",
   (c) col dire che "Y è un test uniformemente più potente di ampiezza α" .
2. (B, 2pt) Enunciare il lemma di Neyman–Pearson per la determinazione di test uniformemente più potenti nel caso di ipotesi semplici.

Nome e Cognome:

Esercizio 7. Un'azienda produce rotoli di copertura e impermeabilizzazione delle superfici in bitume. Si consideri un campione con i seguenti spessori (in millimetri):

$$3, 2, 2.5, 4, 4.5, 5, 5, 4, 4, 6$$

(media campionaria: 4; varianza campionaria: 1.5)
Si suppone che la popolazione (da cui è stato estratto il campione) sia distribuita secondo una normale di media μ e varianza σ^2 (entrambe incognite).

1. (B, 2pt) Verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 1.44$ in alternativa all'ipotesi $H_1 : \sigma^2 \neq 1.44$ ad un livello di significatività del 10%.

2. (B, 2pt) Calcolare il p-value dei dati del test del punto precedente.

Per lo svolgimento dell'esercizio può essere utile conoscere alcuni di questi valori:
$t_{9,0.975} \cong -2.3; t_{8,0.975} \cong -2.3; t_{9,0.95} \cong -1.8; t_{8,0.95} \cong -1.9; P(t_9 \leq 9.375) \cong 0.9; P(t_8 \leq 9.375) \cong 0.9;$
$z_{0.975} \cong -2.0; z_{0.95} \cong -1.6; P(z \leq 1.6) \cong 0.9;$
$\chi^2_{9,0.975} \cong 2.7; \chi^2_{8,0.975} \cong 2.2; \chi^2_{9,0.95} \cong 3.3; \chi^2_{8,0.95} \cong 2.7; \chi^2_{9,0.05} \cong 16.9; \chi^2_{8,0.05} \cong 15.5;$
$\chi^2_{9,0.025} \cong 19.0; \chi^2_{8,0.025} \cong 17.5; P(\chi^2_9 \leq 9.375) \cong 0.6; P(\chi^2_8 \leq 9.375) \cong 0.7$
dove, come al solito, t_n ha distribuzione t di Student con n gradi di libertà e $t_{n,\alpha}$ è il quantile di t_n di ordine $1-\alpha$; z ha una distribuzione normale standardizzata e z_α è il quantile di z di ordine $1-\alpha$; χ^2_n ha distribuzione chi-quadro con n gradi di libertà e $\chi^2_{n,\alpha}$ è il quantile di χ^2_n di ordine $1-\alpha$.