AM210 2014-15: Tracce delle lezioni- VI Settimana

DIFFERENZIABILITÁ E MATRICE JACOBIANA

Siano E, F due spazi normati, O aperto in E, $f : O \to F$, $x \in O$.
Si dice che f é **differenziabile** in x se

$$\exists\, L \in \mathcal{L}(E,F) : \qquad f(x+h) \;=\; f(x) + Lh + \circ(\|h\|) \qquad (*)$$

(per definizione, $\frac{\|\circ(h)\|_F}{\|h\|_E} \to_{\|h\|\to 0} 0$). Tale L, *se esiste é unica.* Infatti:

$(L_1 - L_2)(h) \;=\; \circ(\|h\|) \quad \Rightarrow \quad t(L_1 - L_2)(h) \;=\; (L_1 - L_2)(th) \;=\; \circ(|t|) \quad \Rightarrow$ $(L_1 - L_2)(h) = \circ(1) \quad \Rightarrow (L_1 - L_2)(h) = 0 \quad \forall h.$
La trasformazione L in $(*)$ si chiama **differenziale** di f in x e si indica $df(x)$.

Proprietá delle funzioni differenziabili. Sia f differenziabile in x. Allora
i) f **é continua in** x. Segue dalla continuitá di $h \to df(x)h$.
ii) Per ogni $h \in E$, esiste la **derivata direzionale**, ovvero il vettore di F cosí definito

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = df(x)h$$

(*valore* di $df(x)$ lungo *l'incremento* h) giacché $\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = df(x)h + \circ(1)$.

Se $E = \mathbf{R}^n$ ed e_j é base canonica, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = df(x)e_j$$

e se inoltre $F = \mathbf{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (che si scrive anche $f_{x_j}, \partial_j f, D_j f, \ldots$) é un numero e si chiama **derivata parziale** di f fatta rispetto alla j-esima variabile. Quando $F = \mathbf{R}$, il differenziale in x, $df(x)$, é forma lineare su E e, se é anche $E = \mathbf{R}^n$,

$$\nabla f(x) \;:=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

si chiama **gradiente** di f in x, ed é il vettore che rappresenta $df(x)$ nella base e_j:

$$df(x)h \;=\; df(x)(\sum_{j=1}^n h_j e_j) \;=\; \sum_{j=1}^n h_j df(x)e_j \;=\; \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_i \;=< \nabla f(x)\,,\, h >= \frac{\partial f}{\partial h}(x)$$

Se $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}^m$, la matrice rappresentativa di $df(x)$ nelle basi canoniche e_j, $\hat{e}_i$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, é la **matrice Jacobiana** $J_f(x)$:

$$df(x)(h) = J_f(x)h \qquad \forall h \in \mathbf{R}^n$$

Se $m=1$, $J_f(x)$ é il vettore (riga) $\nabla f(x)$.
Se $\mathbf{m>1}$, f differenziabile in x_0 $\Leftrightarrow$ $\frac{\|f(x_0+h)\,-[\,f(x_0)+df(x_0)h]\|}{\|h\|}\to_{\|h\|\to 0} 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{f_i(x_0+h)\,-[\,f_i(x_0)+<df(x_0)h,\hat{e}_i>]}{\|h\|}\to_{\|h\|\to 0} 0$ $\forall i$ $\Leftrightarrow$ f_i sono differenziabili con

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=df_i(x_0)e_j=<df(x_0)e_j,\hat{e}_i> \quad \text{e quindi} \quad J_f(x_0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$$

ovvero, $J_f(x_0)$ é la matrice che ha per righe i vettori $\nabla f_i(x_0)$ e per colonne i vettori $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ che sono i *'vettori tangenti' alle 'curve coordinate'* $x_j\to f(\overline{x}_1,\ldots,x_j,\ldots,\overline{x}_n)$:

n=1: Cammini differenziabili.

Date $\gamma_i:(a,b)\to\mathbf{R}$, $i=1,\ldots,m$. $\gamma:=\sum_{i=1}^m\gamma_i\hat{e}_i$ é *cammino* in $\mathbf{R}^m$. Siccome una funzione lineare $L:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$ é completamente determinata dal suo valore in 1 : $L(t)=L(t1)=tL(1)$, il cammino (o 'traiettoria') γ risulta differenziabile in $t\in(a,b)$ se

$$\text{esiste} \quad v=\textstyle\sum_{i=1}^m v_i\hat{e}_i \quad \text{tale che} \quad \gamma(t+\tau)=\gamma(t)+\tau v+\circ(\tau)$$

ovvero

$$\forall i=1,\ldots,m \qquad \exists \quad \dot{\gamma}_i(t):=\lim_{\tau\to 0}\frac{\gamma_i(t+\tau)-\gamma_i(t)}{\tau}=v_i$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t):=v$ é il **vettore tangente** (e, se $\|\dot{\gamma}(t)\|\neq 0$, $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$, é il **versore tangente**) al cammino γ in $\gamma(t)$; $\|\dot{\gamma}(t)\|$ é la velocitá con cui il punto che 'percorre' il cammino γ passa per $\gamma(t)$. I cammini (o 'traiettorie') dotati di vettore tangente si chiamano differenziabili.

DUE ESEMPI

(i) $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi)$ (equazione parametrica della circonferenza unitaria) é cammino differenziabile con $\dot{\gamma}(t)=(-\sin t,\cos t)$. Notiamo che $<\gamma(t),\dot{\gamma}(t)>\equiv 0$ e quindi, come si vede subito, $\dot{\gamma}(t)$, applicato in $\gamma(t)$, é il *versore*) alla circonferenza nel punto $\gamma(t)$.

(ii) $(\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,\sin\phi)$, $\theta\in[0,2\pi),\phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ é rappresentazione parametrica di $\mathcal{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}$, sfera unitaria in $\mathbf{R}^3$: ogni punto della sfera, a parte i poli, sta esattamente su di un meridiano (di longitudine θ_0) e su di un parallelo (di latitudine ϕ_0) di equazione parametrica rispettivamente $(\cos\phi\cos\theta_0,\cos\phi\sin\theta_0,\sin\phi)$ e $(\cos\phi_0\cos\theta,\cos\phi_0\sin\theta,\sin\phi_0)$. I vettori tangenti a tali curve $(-\sin\phi_0\cos\theta_0,-\sin\phi_0\sin\theta_0,\cos\phi_0)$, $(-\cos\phi_0\sin\theta_0,\cos\phi_0\cos\theta_0,0)$, generano il piano tangente alla sfera nel punto $(\cos\phi_0\cos\theta_0,\cos\phi_0\sin\theta_0,\sin\phi_0)$.

DERIVATE PARZIALI E DIFFERENZIABILITÁ

Definizione . Sia O aperto in $\mathbf{R}^n$. $f \in C^1(O, \mathbf{R})$ se le sue derivate parziali esistono e sono continue in O; $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é di classe $C^1(O)$ sse lo sono le f_i.

Proposizione 1. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f **é differenziabile**.

Prova. Basta mostrarlo per funzioni scalari. Per semplicitá, lo dimostriamo per funzioni di due variabili. Da f_x, f_y continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \ |\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)| \ \leq \ \epsilon \quad \forall\, w, v \in B_\delta(u) \subset O$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau} f(\tau, y+t) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau} f(x, \tau) \ = \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau)$ otteniamo

$$\left| f(x+s, y+t) \ - \ f(x,y) \ - \ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right] \right| =$$

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x, y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right| \leq$$

$$\left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] d\tau \right|$$

$$\leq \ \epsilon \ (|s| + |t|) \qquad \text{se} \quad s^2 + t^2 \leq \delta_\epsilon^2$$

ESEMPI E CONTROESEMPI

(i) $\quad f(x,y) \ = \ \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $\quad f(0,0) = 0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha anche derivate parziali, nulle, in $(0,0)$. Ma $\frac{\partial f}{\partial h}$ non esiste per alcun $h \neq e_i, i = 1, 2$, perché $t \to f(tx, ty)$ non é continua in $t = 0$ (a meno che non sia $xy = 0$). In particolare, f non é continua in zero:

una funzione puó avere derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto.

(ii) $\quad f(x,y) \ = \ \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$, $\quad f(0,0) \ = \ 0$.

Siccome $f(x,0) = 0 \ \forall x$, é $f_x(x,0) = 0 \ \forall x$. Allo stesso modo, $f_y(0,y) = 0 \quad \forall y$. In particolare, f ha derivate parziali, nulle, in $(0,0)$. Poi, se $x^2 + y^2 > 0$, é $\frac{f(tx,ty)}{t} \ = \ \frac{x^2 y}{t^2 x^4 + y^2} \to_{t \to 0} \frac{x^2}{y}$ e quindi anche nell'origine esistono le derivate in tutte le direzioni, ma non sono tutte nulle (come dovrebbero essere se la funzione fosse differenziabile). Siccome $f(x, x^2) \ \equiv \frac{1}{2}$, vediamo che

una funzione puó essere derivabile, in un punto, lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iii) $\quad f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha derivate parziali, nulle, anche in $(0,0)$. Inoltre, in $(0,0)$, f **é derivabile in tutte le direzioni**: $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_t \frac{f(tx,ty)}{t} = \lim_t \frac{tx^3 y}{t^4 x^6+y^2} = 0$. Tuttavia f **non é continua** in $(0,0)$, perché $f(x,x^3) \equiv \frac{1}{2}$. Dunque

una funzione puó avere derivate nulle lungo tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

(iv) $\quad f(x,y) = \frac{x^3 y \sqrt{x^2+y^2}}{x^6+y^2}$ se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

ha derivata nulla in tutte le direzioni, ed é anche continua, in $(0,0)$, ma non é differenziabile in $(0,0)$, perché $\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3 y}{x^6+y^2}$ non va a zero al tendere di x^2+y^2 a zero (vale infatti $\frac{1}{2}$ lungo la cubica $y = x^3$). Dunque

una funzione continua puó avere derivate nulle in tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE

Sia $f \in C^1(O,\mathbf{R}), (0,0) \in O \subset \mathbf{R}^2, f(0,0)=0$. Allora, se $(x,y) \in O$,

$$f(x,y) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \circ(\sqrt{x^2+y^2})$$

Ovvero, a meno di un errore di ordine superiore al primo, i valori di f, vicino all'origine, sono quelli della funzione lineare

$$z = df(0,0)(x,y) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \qquad (*)$$

In linguaggio geometrico: il grafico di $df(0,0)$, ovvero il piano per l'origine in $\mathbf{R}^3$,

$$T_f(0,0) := \{(x,y,f_x(0,0)x + f_y(0,0)y)\}$$

é il piano tangente al grafico di f nel punto $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$.
Tale piano interseca i piani coordinati Oxz, Oyz, lungo le rette di equazione

$z = f_x(0,0)x, \quad z = f_y(0,0)y$, **rette tangenti** ai grafici di $z = f(x,0), z = f(0,y)$

restrizioni della $z = f(x,y)$ rispettivamente ad Ox, Oy. I vettori tangenti a tali due curve, dati da $(1,0,f_x(0,0)$, $(0,1,f_y(0,0)y)$, generano lo spazio tangente

$$T_f(0,0) =$$

$$\{(x, y, f_x(0,0)x + f_y(0,0)y)\} = \{x(1, 0, f_x(0,0) + y(0, 1, f_y(0,0)) : \quad x, y \in \mathbf{R}\}$$

Notiamo che il generico vettore $(x, y, f_x(0,0)x + f_y(0,0)y)$ in $T_f(0,0)$ é il vettore tangente alla curva $t \to (tx, ty, f(tx, ty))$ (giacente nel piano generato dall'asse Oz e dalla retta $(tx, ty, 0)$ ed intersezione del grafico di f con tale piano). Dunque, **i vettori del piano tangente sono vettori tangenti al grafico di** f.
Il piano T_f si puó anche descrivere come il piano dei vettori ortogonali al vettore

$$(-f_x, -f_y, 1) = (1, 0, f_x(0,0) \wedge (0, 1, f_y(0,0))$$

che é vettore normale al grafico.
Piú in generale, se $f \in C^1(O, \mathbf{R}), x_0 \in O \subset \mathbf{R}^n$, *l'iperpiano* in $\mathbf{R}^{n+1}$

$$T_f(x_0) := \{(x, f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 >) : \quad x \in \mathbf{R}^n\}$$

passante per $(x_0, f(x_0))$ e parallelo all'iperpiano per l'origine $z =< \nabla f(x_0), h >$ (grafico di $df(x_0)$) é il **piano tangente al grafico di** f**,** $\mathcal{G}_f$**, in** $(x_0, f(x_0))$. L'equazione del piano tangente é quindi

$$z = f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 >$$

Sezionando $\mathcal{G}_f$ e $T_f(x_0)$ con il piano $z = f(x_0)$ e proiettando tali sezioni sul piano $z = 0$, otteniamo la *'superfice' di livello* $\Sigma := \{x : f(x) = f(x_0)\}$ e la corrispondente **'retta' tangente** in x_0, data appunto da $< \nabla f(x_0), x - x_0 >= 0$, retta per x_0 e ortogonale a $\nabla f(x_0)$.
Infine, ∇f é direzione di massima pendenza del grafico di f in $(x, f(x))$:

$$\frac{d}{dt} f(x + th) =< \nabla f(x + th), h > \qquad \text{e} \qquad \sup_{\|h\|=1} < \nabla f(x), h >= \|\nabla f(x)\|$$

Se **n=k** $\leq$ **m**, $X = X(t_1, \ldots, t_k) = (X_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, X_m(t_1, \ldots, t_k))$ parametrizza una $k-$superfice in $\mathbf{R}^m$. Le curve su tale superfice, date da

$$t \to X(t, t_2, \ldots, t_k), \ldots, t \to X(t_1, \ldots, t)$$

determinano k vettori tangenti alla k-superfice, le k colonne di J_X, che indichiamo $\frac{\partial X}{\partial t_j} = (\frac{\partial X_1}{\partial t_j}, \ldots, \frac{\partial X_m}{\partial t_j})$.

REGOLA DELLA CATENA
(derivazione di funzioni composte)

Siano E, F, G spazi normati. Sia $x \in E$ e siano

$$B_r(x) \overset{g}{\to} B_\rho(g(x)) \subset F, \qquad B_\rho(g(x)) \overset{f}{\to} G$$

Se g é differenziabile in x e f é differenziabile in $g(x)$, allora $f \circ g$ é differenziabile in x e

$$d(f \circ g)(x) \;=\; df(g(x)) \circ dg(x) \qquad e \qquad J_{f \circ g}(x) \;=\; J_f(g(x))\, J_g(x)$$

Prova. Sia $h \in E$, $k(h) := g(x+h) - g(x) = dg(x)h + \circ(h)$, cosicché $\|k(h)\| \leq \|dg(x)h\| + \circ(\|h\|) \;\leq\; c\|h\|$ se $\|h\| \leq \delta$. Siccome f é differenziabile in $g(x)$, si ha che

$$f(g(x+h)) = f(g(x) + k(h)) = f(g(x)) + df(g(x))k + \omega(k) =$$

$$= f(g(x)) + [df(g(x)) \circ dg(x)]h + \circ(h)$$

perché $\|\omega(k)\| \leq \epsilon\|k\| \leq c\epsilon\|h\|$ *se* $\|h\| << 1$.

L'affermazione sulle matrici Jacobiane segue dal fatto che se $L \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $U \in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$, la matrice rappresentativa del prodotto di composizione $U \circ L$ é il prodotto delle matrici rappresentative

$$\mathbf{R}^n \overset{L}{\to} \mathbf{R}^m \overset{U}{\to} \mathbf{R}^p \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_{U \circ L} = \mathcal{A}_U\, \mathcal{A}_L$$

ESEMPIO DI DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE
Derivazione lungo un cammino differenziabile

Siano $\gamma : (a,b) \to \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di classe C^1. Allora

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\, \frac{d\gamma_j}{dt}(t) \;= < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) >$$

É una conseguenza della regola della catena e del fatto che $J_f(x) = \nabla f$ (matrice riga) mentre $J_\gamma = \dot\gamma$ (matrice colonna).

COMPLEMENTI

1. Matrice rappresentativa del prodotto di composizione.

Se indichiamo con $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_U$ e $\mathcal{A}_{U\circ L}$ le matrici rappresentative di $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, di $U \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ e di $U \circ L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, allora

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;=\; \mathcal{A}_U\, \mathcal{A}_L \qquad (\textit{prodotto di matrici})$$

Siano $e_j, j = 1, \ldots, n,\ \hat{e}_i, i = 1, \ldots, m,\ \check{e}_l, l = 1, \ldots, p$ basi in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p$. Siano $Le_j = \sum_{i=1}^m (Le_j)_i\, \hat{e}_i, \quad U\hat{e}_i = \sum_{l=1}^p (U\hat{e}_i)_l\, \check{e}_l.$ Allora

$$\mathcal{A}_U \;=\; (\,(U\hat{e}_i)_l)_{i=1,\ldots,m,\, l=1,\ldots,p} \qquad\qquad \mathcal{A}_L \;=\; (\,(Le_j)_i)_{j=1,\ldots,n,\, i=1,\ldots,m}$$

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;=(\,((U\circ L)e_j)_l)_{j=1,\ldots,n;\, l=1,\ldots,p}$$

Ma $\qquad (U\circ L)e_j \;=\; U\,(\sum_{i=1}^m (Le_j)_i\, \hat{e}_i) \;=$

$$\sum_{i=1}^m (Le_j)_i\, U\hat{e}_i = \sum_{i=1}^m \left[(Le_j)_i\ \sum_{l=1}^p (U\hat{e}_i)_l\, \check{e}_l\right] \;=\; \sum_{l=1}^p \left[\sum_{i=1}^m (Le_j)_i\, (U\hat{e}_i)_l\right] \check{e}_l$$

e quindi

$$((U\circ L)e_j)_l = \sum_{i=1}^m (Le_j)_i\, (U\hat{e}_i)_l$$

ovvero $((U\circ L)e_j)_l$ é l'elemento di posto lj della matrice prodotto $\mathcal{A}_U\, \mathcal{A}_L$.

2. Il gradiente in coordinate polari. .

Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Allora,

$$g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\cos\theta - \frac{1}{\rho} g_\theta \sin\theta$$

$$f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\sin\theta + \frac{1}{\rho} g_\theta \cos\theta$$

$$|\nabla f|^2(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho^2(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} g_\theta^2(\rho, \theta)$$

COMPLEMENTI E ESERCIZI

1. Provare il Teorema di Heine-Cantor usando il Teorema di Weierstrass.

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in K, \qquad \omega(f,x,\delta) := \sup\{\rho(f(x'), f(x'')) : \quad x', x'' \in K \cap B_\delta(x)\}$$

$$\delta_\epsilon(x) := \sup\{\delta > 0 : \quad \omega(f,x,\delta) < \epsilon\}$$

La funzione $x \to \delta_\epsilon(x)$ é inferiormente semicontinua, perché, se $\delta < \delta_\epsilon(x)$, si ha

$$y \in K, d(y,x) < \delta_\epsilon(x) - \delta \quad \Rightarrow B_\delta(y) \subset B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \Rightarrow \omega(f,y,\delta) \leq \epsilon \quad \Rightarrow \delta_\epsilon(y) \geq \delta$$

Per Weierstrass, esiste $\underline{x} \in K$ tale che $\delta_\epsilon(x) \geq \delta_\epsilon(\underline{x}) \quad \forall x \in K$. Dunque

$$d(x,y) < \delta_\epsilon(\underline{x}) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

2. Provare il Teorema di Heine-Cantor usando il Teorema del ricoprimento finito.

$$\forall \epsilon > 0, \forall\, x \in K\ \exists \delta_\epsilon(x) \quad x'\,,\ x'' \in B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \quad \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$$

K compatto $\Rightarrow \exists x_j \in K,\ j = 1, \ldots, p :\ K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}}(x_j)$. Se $\delta_\epsilon := \min_j\ \delta_\epsilon(x_j)$,

$$d(x,y) < \frac{\delta_\epsilon}{2},\ x \in B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}} \Rightarrow d(y, x_j) < \frac{\delta_\epsilon}{2} + \frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2} < \delta_\epsilon(x_j) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

3. Tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti

Sia $\| \cdots \|$ una norma su $\mathbf{R}^n$. Indichiamo con $\|.\|_2$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$. Proviamo che $\exists\, C \geq c > 0 : \quad c\|x\| \leq \|x\|_2 \leq C\|x\| \qquad \forall x \in E.$
Da $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ segue

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\, \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 = C\|x\|_2$$

In particolare, ció assicura che $x \to \| \cdots \|$ é funzione continua in $\mathbf{R}^n$ (munito della norma $\| \cdots \|_2$) e quindi é dotata di minimo sul compatto $\{\|x\|_2 = 1\}$, ovvero

esiste $\underline{x}$, con $\|\underline{x}\|_2 = 1$ tale che: $\qquad \|x\| \geq \|\underline{x}\|$ se $\|x\|_2 = 1$

e quindi $\|\frac{x}{\|x\|_2}\| \geq \|\underline{x}\| \quad \forall x \neq 0$ e quindi $\|x\| \geq \|\underline{x}\|\, \|x\|_2 = c\|x\|_2 \quad \forall x.$

4. Provare che, se $f \in C(A, \mathbf{R})$ é localmente costante in A (cioé $\forall x \in A, \exists B_r(x) :$ f é costante in $B_r(x) \cap A$) ed A é connesso, allora f é costante in A.

5. Def.: $f \in C(E, \mathbf{R}^m)$ é $Lip_{loc}(E)$ se $\forall x \in E, \exists B_{r(x)}(x)$ tale che $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$.

Provare che $\quad f \in Lip_{loc}(K), \quad K$ compatto $\quad \Rightarrow \quad f \in Lip(K)$

Se no, $\exists x_j, y_j \in K : \|f(x_j) - f(y_j)\| \; \|x_j - y_j\|^{-1} \to +\infty$. *Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che* $x_j \to_j x \in K, y_j \to_j y \in K$. *Siccome* f *é limitata, necessariamente* $\|x_j - y_j\| \to 0$ *e quindi* $x = y$. *Ma* $x_j, y_j \in B_{r(x)}(x)$ *per* j *grande e* $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$, *contraddizione.*

6. Provare con un esempio che non é vero in generale che da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento numerabile.

Sia $X = l^\infty$ *dotato della metrica* $\|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$. *Sia* $E = 2^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \{0,1\}$. *Questo insieme é non numerabile. Siccome* $\alpha \neq \beta \in l^\infty \Rightarrow \|\alpha - \beta\|_\infty = 1$, *la famiglia (non numerabile) di aperti disgiunti* $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$ *é un ricoprimento di* E *e, chiaramente, cessa di essere tale non appena si lasci da parte anche un solo* $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$.

7. Mostrare, con un esempio, che non é vero in generale che ogni successione limitata in uno spazio normato ammette una estratta convergente.

Sia $E = l^2$ *dotato della norma* $\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Siano* $e_j(i) := \delta_{ij}$. *Allora* $\|e_n - e_m\| = 2$ *se* $n \neq m$ *e quindi* e_n *non ha estratte convergenti, dato che nessuna sua sottosuccessione é di Cauchy (una successione* x_n *in uno spazio metrico é di Cauchy se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* n_ϵ *tale che* $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ *se* $n, m \geq n_\epsilon$*; ovviamente ogni successione convergente é di Cauchy).*

8 . A connesso per archi $\Rightarrow A$ connesso.

Siano $O_i, i = 1,2$ aperti tali che $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ con $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1,2$. Sia γ cammino continuo in A, con $\gamma(0) \in O_1, \gamma(1) \in O_2$. Siccome, per continuitá, $\gamma(t) \in O_1$ se t é vicino a $t = 0$, l'intervallo $I := \{t \in [0,1] : \gamma(\tau) \in O_1 \, \forall \tau \in [0,t)\}$ é un intervallo non vuoto e $\overline{t} := \sup I < 1$. Siccome, sempre per continuitá, $\gamma(\overline{t}) \notin O_1$, si ha che $\gamma(\overline{t}) \in O_2$ e quindi, per continuitá, $\gamma(t) \in O_2$ per $t < \overline{t}$ vicino a $\overline{t}$. Dunque $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ e cioé A é connesso.

NOTA. Il viceversa é vero se A é aperto, ma non é vero in generale.

9 Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ uniformemente continua in $A \subset X$.

Allora esiste $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $\overline{f}(x) = f(x)\ \forall x \in A$.

Prova. Caso $m = 1$. Fissato $\epsilon > 0$, sia δ_ϵ tale che $d(x,y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Dato $x \in \overline{A}$, esistono $x_k \in A$ tali che $x_k \to_k x$. In particolare, x_k é di Cauchy, cioé $d(x_h, x_k) \leq \delta_\epsilon$ per h, k grandi. Quindi, per uniforme continuitá, $|f(x_k) - f(x_h)| \leq \epsilon$ e quindi $f(x_h)$ é di Cauchy e quindi converge a qualche y. Notiamo che tale y dipende solo da x e non dalla 'approssimante' x_k. Infatti, se $x'_k \to x$ e quindi, come sopra, $f(x'_k) \to y'$ per qualche y', si ha $|y - y'| \leq |y - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x'_k)| + |f(x'_k - y'| \to_k 0$ e quindi $y = y'$. Dunque $\overline{f}(x) := \lim_k f(x_k)$ é ben definita su $\overline{A}$.
Resta da provare che $\overline{f}$ é continua. Ma questo si vede subito: $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(y)| \leq 2\epsilon + |f(x_n) - f(y_n)|$ se n é abbastanza grande. Siccome poi, se $d(x,y) \leq \delta_\epsilon$, risulta $d(x_n, y_n) \leq 3\delta$ se n é grande, si ha che $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \epsilon$ se n é grande. In conclusione, $|f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon$. Se $m > 1$, l'argomento precedente assicura che ogni componente ha una estensione continua a $\overline{A}$ e quindi f si prolunga a tutto $\overline{A}$.

10. Sia $f : E \to \mathbf{R}$. f si dice *localmente costante in* E se

$$\forall x \in E, \quad \exists B_r(x) \quad \text{tale che} \quad f \text{ é costante in } B_r(x) \cap E$$

Notiamo che una funzione siffatta é necessariamente continua in E.

11. f localmente costante in E connesso per archi $\Rightarrow f$ é costante in E.

Prova. Sia, per ogni $x \in E$, $B_{r(x)}(x)$ tale che f sia costante in $B_{r(x)}(x)$. Siano $x, y \in E$ e sia γ cammino da x a y. Notiamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un intervallo, perché $f \circ \gamma$ é continua. Estraendo da $\{B_{r(x)}(x) : \quad x \in \gamma([0,1])\}$, ricoprimento aperto del compatto $\gamma([0,1])$, un sottoricoprimento finito, deduciamo che $(f \circ \gamma)([0,1])$ é un insieme finito di punti, che, trattandosi di un intervallo, deve ridursi a un punto.

12. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ 'curva parametrica' in $\mathbf{R}^n$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ biiezione. Allora $\tilde{\gamma}(\varphi(\tau)) : \tau \in [\alpha, \beta]$ é riparametrizzazione della 'curva' (o 'cammino') γ. Ovviamente le immagini ('sostegno' delle 'curve' γ e $\tilde{\gamma}$) $\gamma([a,b])$ e $\tilde{\gamma}([\alpha, \beta])$ coincidono: le due curve descrivono (percorrono..) in modo diverso lo stesso insieme di $\mathbf{R}^n$. Mostrare che, se γ é cammino differenziabile e φ é derivabile, con $\varphi(\tau) > 0 \quad \forall \tau$, allora γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso versore tangente in ogni punto.