AM210 2014-2015: II Settimana

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

Sia $\quad f \in C([t_0 - r, t_0 + r] \times [a, b], \mathbf{R})$. Supponiamo che

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall t \in (t_0 - r, t_0 + r) \quad \exists \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}$$

e $\quad \frac{\partial f}{\partial t} \in C((t_0 - r, t_0 + r) \times [a, b])$. Allora

$$\forall t \in (t_0 - r, t_0 + r), \quad \exists \quad \frac{d}{dt} \int_a^b f(t,x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dt} \int_a^b f(t,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Prova. $\frac{\partial f}{\partial x}$ é continua, e quindi Unif Cont in $I := [t_0 - r', t_0 + r'] \times [a, b])$ $\quad \forall r' < r$: $\forall \epsilon, \exists \delta_\epsilon : \quad t, s \in I, |t - s| \le \delta_\epsilon, \quad x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s,x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \le \epsilon$ e quindi

$$|t - t_0| < r', |t + h - t_0| < r \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{h} \left[\int_a^b f(t+h,x)\,dx - \int_a^b f(t,x)\,dx \right] - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \right| =$$

$$\left| \int_a^b \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right) ds \right] dt \right| \le \epsilon(b - a)$$

Derivazione sotto segno di integrale: il caso degli integrali impropri .

Sia $f \in C([t_0 - r, t_0 + r] \times [a, b], \mathbf{R})$. Se $\frac{\partial f}{\partial t}$ esiste ed é continua ed inoltre f e $\frac{\partial f}{\partial t}$ sono equidominate (cioé $\exists g$ integrabile in (a, b) tale che $\quad |f(t,x)| + |\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \le g(x)$ $\forall t \in [t_0 - r, t_0 + r], \quad x \in (a, b)$), $\quad$ allora

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t,x)\,dx \qquad \text{esiste in} (t_0 - r, t_0 + r) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dt} \int_a^b f(t,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Prova. Dalla equidominatezza di f e $\frac{\partial f}{\partial t}$ segue che $\quad \forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon, b_\epsilon$ tali che

$$\left| \frac{1}{h} \left[\int_a^{a_\epsilon} f(t+h,x)\,dx - \int_a^{a_\epsilon} f(t,x)\,dx \right] - \int_a^{a_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_a^{a_\epsilon} \left[\int_t^{t+h} \frac{\partial f}{\partial t}(s,x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) ds \right] dx \right| \le 2 \int_a^{a_\epsilon} g(x)dx \le 2\epsilon \qquad \text{ed anche}$$

$$\left| \frac{1}{h} \left[\int_{b_\epsilon}^b f(t+h,x)\,dx - \int_{b_\epsilon}^b f(t,x)\,dx \right] - \int_{b_\epsilon}^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \right| \le \epsilon \qquad \text{mentre giá sappiamo che}$$

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{1}{h} \left[\int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f(t+h,x)\,dx - \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f(t,x)\,dx \right] - \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \right| = 0.$$

Un bell'esercizio: calcolo dell'integrale di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(integrale di Dirichlet)}$$

Siccome $f(x,t) := \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$, $f_x = -e^{-tx}\sin t$ sono continue ed equidominate da $g(t) := e^{-t\underline{x}}$ in $[\underline{x}, +\infty) \times (0,\infty)$ per ogni $\underline{x} > 0$, si ha

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\, dt \qquad \text{e, come ricordato}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\, dt = \frac{1}{1+x^2} \qquad \sharp$$

Da qui $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi} dt = \arctan\xi - \arctan x.$$

Ma $\sup\limits_{t\in K} |f(x,t) - f(t)| \to_{\|x\|\to\infty} 0$ $\forall K \subset I$ compatto ed $f(x,t)$ é equidominata in $\{\|x\| \geq R\} \times I$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x,t)dt \to_{\|x\|\to\infty} \int_a^b f(t)dt$, e quindi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi} dt \overset{\xi\to+\infty}{\to} 0$.
Ció implica, per quanto sopra, che $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = \frac{\pi}{2}$. Resta da provare che

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt$$

cioé che $h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ é continua in $x=0$. *Il Teorema sulla dipendenza continua non si applica tuttavia in questo caso, perché non c'é equidominatezza:* $\exists g \geq 0 : \int_0^{\infty} g < \infty$ e $|\frac{\sin t}{t} e^{-tx}| \leq g(t)$ $\forall x > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt < \infty$, mentre $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$. Diamo qui una dimostrazione ad hoc.
Se $G(t) := \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$, esiste finito $G(\infty) := \lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$. Quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$ e G é limitata: $\exists M$ tale che $|G(t)| \leq M$ $\forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x\int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\tfrac{s}{x}) e^{-s} ds \to_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

perché $$\int_0^{+\infty} G(\tfrac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds \qquad \text{e}$$

$$\left|\int_0^{\delta} [G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds\right| \leq 2M[1 - e^{-\delta}] \qquad \int_\delta^{\infty} |G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon \text{ se } \frac{\delta}{x} \geq t_\epsilon.$$

LA FUNZIONE Γ DI EULERO E LA FORMULA DI STIRLING

$$\Gamma(s) \ := \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \quad s>0$$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} < +\infty \ \ \forall s>0$ e $e^{-t}\, t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{t}$.
Alcuni valori di Γ: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1, \quad \Gamma(2) = \int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$
Poi, effettuando il cambio $t=\tau^2$ e quindi integrando per parti, troviamo

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty \tau e^{-\tau^2}\tau d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Formula di ricorrenza (♣): integrando per parti troviamo

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = s\int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt = s\Gamma(s) \qquad (\clubsuit)$$

Segue, in particolare, che $\Gamma(n+1)=n!$. Poi, $\Gamma(0^+)=+\infty$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Regolaritá di Γ. $t \to t^{s-1}\, e^{-t}$, é equidominata per $s\in[\underline{s},\overline{s}]$, $0<\underline{s}<1<\overline{s}$, da

$$f(t) = t^{\underline{s}-1}\, e^{-t} \quad \text{in} \quad (0,1], \qquad f(t) = t^{\overline{s}-1}\, e^{-t} \quad \text{in} \quad [1,+\infty).$$

Quindi $\Gamma(s)$ é continua. Poi, siccome $\frac{\partial}{\partial s} t^{s-1}\, e^{-t} = t^{s-1}\log t\, e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, (\log t)\, e^{-t}\, dt$.
Γ é infatti C^∞. Ad esempio, $\Gamma''(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, (\log t)^2\, e^{-t}\, dt > 0$ e, iterando

$$\frac{d^n\Gamma}{dx^n} \ = \int_0^\infty t^{s-1}\, (\log t)^n\, e^{-t}\, dt$$

Dunque Γ é convessa. In particolare, ha un minimo assoluto che cade in $(1,2)$.
Si puó dimostrare che $\Gamma'(1)=-\gamma$, *ove* γ *denota la costante di Eulero-Mascheroni.*

NOTA i) Γ é addirittura *log-convessa* (cioé $\log\Gamma$ é convessa).
ii) (Teorema di Bohr-Mollerup). Γ é l'unica funzione *log-convessa* in $(0,+\infty)$ che vale 1 in 1 e che soddisfa la relazione di ricorrenza (♣) .

Formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) \ = \ s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \ + \ \circ(1) \right], \qquad \circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$$

Dimostrazione della Formula di Stirling.: Posto $t = s\tau$, troviamo

$$\Gamma(s+1) := \int_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = s^s \int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} s d\tau \ = \ s^{s+1}\, e^{-s} \int_0^\infty e^{-s(\tau-1-\log\tau\,)}\, d\tau \ \overset{t=\tau-1}{\Rightarrow}$$

$$\Gamma(s+1) \ = \ s^{s+1}\, e^{-s} \int_{-1}^\infty e^{-sh(t)}\, dt \qquad \text{ove} \quad h(t) := t - \log(t+1) \quad \text{ha le proprietá}$$

(i) $\quad h(t) \ = \ \frac{t^2}{2}(1+\epsilon(t))$ ove $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) \ = \ 0$ e $h(x) \ \geq \ \frac{x^2}{4}$ se $|x| \ \leq \ \beta \ << \ 1$

(ii) $\quad h''(t) \ > \ 0 \quad \forall t,$ e $(\frac{h(t)}{t})' \ = \ \frac{(t+1)\log(t+1)-t}{t^2(t+1)} \ \geq \ 0 \quad \forall t \ \geq \ -1$ e quindi

(iii) $\quad h(t) \ \geq \ \frac{h(\beta)}{\beta}\, |t| \ \geq \ \frac{\beta}{4}\, |t| \qquad \forall |t| \ \geq \ \beta.$

Quindi $\int_{|t|\geq\beta} e^{-sh(t)}\, dt \leq \int_{|t|\geq\beta} e^{-\frac{s\beta|t|}{4}}\, dt \ = \ \frac{8}{\beta s}\, e^{-\frac{s\beta^2}{4}} \ \overset{s\to+\infty}{\to} \ 0$ esponenzialmente!

Resta da determinare quanto rapidamente va a zero $\int_{|t|\leq\beta} e^{-sh(t))}\, dt.$ Effettuando il cambio di variabile $t\sqrt{s} = x,$ troviamo

$$\int_{-\beta}^{\beta} e^{-sh(t)}\, dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})}\, dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \circ(1) \right] \qquad \circ\,(1) \ \overset{s\to+\infty}{\to} \ 0$$

perché da $\quad h(t) = \frac{t^2}{2}(1+\epsilon(t)) \quad$ segue che:

$$\int_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]} \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \circ(1)$$

giacché la famiglia di funzioni $\quad x \to e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]} \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}, \quad x \in \mathbf{R}$ converge (uniformemente sui compatti al tendere di s all'infinito) alla funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ed é equidominata:

$$h(x) \geq \frac{x^2}{4} \quad se \quad |x| \leq \beta \quad \Rightarrow \quad e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})}\, \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]} \leq e^{-\frac{x^2}{4}} \quad se \quad |x| \leq \sqrt{s}\beta$$

Una applicazione: Invertibilitá nell'ordine di integrazione (Fubini)

Teorema di Fubini . Sia $f \in C([a,b]\times[c,d])$. Allora le funzioni $[a,b] \ni x \to \int_c^d f(x,y)dy$, $[c,d] \ni y \to \int_a^b f(x,y)dx$ sono continue (e quindi integrabili!) e si ha

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

Prova . Dal TFC: $\frac{d}{dy}\int_c^y f(s,t)dt = f(s,y)$; quindi, derivando sotto segno di integrale, $\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)dt\right) ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_c^y f(s,t)dt\right) ds = \int_a^b f(s,y)ds.$
D'altra parte, dalla continuitá di $t \to \int_a^b f(s,t)ds$ segue, grazie al TFC, che

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)ds\right) dt = \int_a^b f(s,y)ds.$$

Dunque,

$\frac{d}{dy}\left[\int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)ds\right) dt - \int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)dt\right) ds\right] \equiv 0$ e quindi (presi $y=c, y=d$): $0 =$

$$\int_c^c \left(\int_a^b f(s,t)ds\right) dt - \int_a^b \left(\int_c^c f(s,t)dt\right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s,t)ds\right) dt - \int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)dt\right) ds$$

Fubini negli integrali impropri. Siano $(a,b),(c,d)$ intervalli eventualmente illimitati, $f(x,y)$ continua in $(a,b)\times(c,d)$. Supposto che

(i) $\forall x \in (a,b) \quad \exists \quad \int_c^d f(x,y)dy \quad$ ed $\quad \exists \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$

(ii) $[\alpha,\beta] \subset (a,b), \quad c < \gamma_n < \delta_n < d, \gamma_n \to_n c, \quad \delta_n \to_n d \quad \Rightarrow$
$\int_\alpha^\beta \left[\int_{\gamma_n}^{\delta_n} f(x,y)dy\right] dx \to_n \int_\alpha^\beta \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$

(k) $\forall y \in (c,d) \quad \exists \quad \int_a^b f(x,y)dx \quad$ ed $\quad \exists \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$

(kk) $a < \alpha_n < \beta_n < b, \quad \alpha_n \to_n a, \quad \beta_n \to_n b \quad \Rightarrow$
$\int_c^d \left[\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx\right] dy \to_n \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$

Allora (vedi Appendice) $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$

Una applicazione: gli integrali di Dirichlet, di Gauss e di Fresnel.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \qquad (\mathit{Integrale\quad di\quad Dirichlet})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (\mathit{Integrale\quad di\quad Gauss})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (\mathit{Integrale\quad di\quad Fresnel})$$

Integrale di Dirichlet. Basta applicare Fubini alla funzione $f(x,y) = e^{-xy} \sin x$:

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dy \right] dx = \int_0^{+\infty} \sin x \left[\frac{e^{-xy}}{-x} \right]_0^{\infty} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx \right] dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \overset{Fubini}{\Rightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Integrale di Gauss. Si ha, effettuando il cambio di variabile $x^2 = t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Basta ora applicare Fubinii alla funzione $f(x,y) = \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}}\, e^{-x}$, perché

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}}\, e^{-x}\, dy \right] dx = \int_0^{+\infty} \left[e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}}\, dy \right] dx \overset{xy:=t}{=}$$

$$\int_0^{+\infty} \left[e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}\,\sqrt{x}}\, dt \right] = \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \right) \times \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right)^2 \overset{Fubini}{=}$$

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy-x}}{\sqrt{y}}\, dx \right] dy = \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-x(y+1)}}{-(1+y)\sqrt{y}} \right]_0^{\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} \overset{\sqrt{y}=s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2ds}{1+s^2} = \pi$$

Integrale di Fresnel. Si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx \overset{x^2=t}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt.$ Ora, usando la rappresentazione (♠) in Appendice, Fubini , ♯ e un cambio di variabile, troviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \overset{\spadesuit}{=} \int_0^{+\infty} \left[\sin x\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\, dt \right] dx \overset{Fubini}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\, dx \right] dt$$

$$\overset{\sharp}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)} \overset{t=\tau^2}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

perché (come da calcoli standard riportati in Appendice) $\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

APPENDICE

Fubini negli integrali impropri. Siano $(a,b),(c,d)$ intervalli eventualmente illimitati, $f(x,y)$ continua in $(a,b)\times(c,d)$. Supposto che

(i) $\quad \forall x\in(a,b) \quad \exists \int\limits_c^d f(x,y)dy \quad$ ed $\quad \exists \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx$

(ii) $\quad [\alpha,\beta]\subset(a,b), \quad c<\gamma_n<\delta_n<d, \gamma_n\to_n c, \quad \delta_n\to_n d \quad \Rightarrow$

$$\int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_{\gamma_n}^{\delta_n} f(x,y)dy\right] dx \to_n \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

(k) $\quad \forall y\in(c,d) \quad \exists \int\limits_a^b f(x,y)dx \quad$ ed $\quad \exists \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right] dy$

(kk) $\quad a<\alpha_n<\beta_n<b, \alpha_n\to_n a, \quad \beta_n\to_n b \quad \Rightarrow$

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx\right] dy \to_n \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Allora

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Prova. Siano $a<\alpha_n<\beta_n<b, \quad \alpha_n\to_n a, \quad \beta_n\to_n b, \quad c<\gamma_n<\delta_n<d, \quad \gamma_n\to_n c, \quad \delta_n\to_n d$. Da Fubini e (ii), segue che

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx\right] dy \stackrel{def}{=} \lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\gamma_m}^{\delta_m} \left[\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx\right] dy \stackrel{Fubini}{=}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \left[\int\limits_{\gamma_m}^{\delta_m} f(x,y)dy\right] dx \stackrel{(ii)}{=} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx \qquad \surd$$

Da ció, ed usando (kk) e $\surd$ troviamo che

$$\int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right] dy :\stackrel{(kk)}{=} \lim_{n\to+\infty}\int\limits_c^d \left[\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx\right] dy \stackrel{\surd}{=} \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

$$\stackrel{def}{=} \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

NOTA Le ipotesi (ii)-(kk) chiedono che siano leciti passaggi al limite sotto segno di integrale per le successioni di funzioni (convergenti, almeno puntualmente)

$F_n(x) := \int\limits_{\gamma_n}^{\delta_n} f(x,y)dy \to_n F(x) := \int\limits_c^d f(x,y)dy, \quad x \in [\alpha,\beta] \subset (a,b)$

$G_n(y) := \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx \ \to_n G(y) := \int\limits_a^b f(x,y)dx, \quad y \in (c,d)$

(ii) chiede che $\int\limits_\alpha^\beta F_n(x)dx \to_n \ dx \to_n \int\limits_\alpha^\beta F(x)\,dx$. Essendo un passaggio al limite negli integrali ordinari, basta ci sia uniforme convergenza in ogni $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$:

$(ii)' \quad \gamma_n \to c, \quad \delta_n \to d \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} \left| \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \ - \int\limits_{\gamma_n}^{\delta_n} f(x,y)\,dy \right| \to_n 0$

Nel caso (kk) siamo in presenza di un passaggio al limite nel caso di integrali impropri, o perché (c,d) sará illimitato o perché G potrebbe essere non limitata ad uno degli estremi di (c,d). In tal caso occorrerá supporre sia uniforme convergenza (sui compatti) che equidominatezza:

$(kk)' \quad \sup\limits_{y\in[\gamma,\delta]} \left| \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \ - \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)\,dx \right| \to_n 0 \qquad \forall[\gamma,\delta] \subset (c,b)$

$(kk)'' \quad \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b |f(x,y)|dx \right] \ dy < +\infty$

Chiaramente (kk)" assicura l'equidominatezza delle G_n in (c,d), perché

$|G_n(y)| = \left| \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x,y)dx \ \right| \leq \int\limits_a^b |f(x,y)|\,dx, \quad y \in (c,d).$

Questo argomento funziona per l'integrale di Gauss, ove $f(x,y) := \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} \ e^{-x}$:

$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \left| \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} \ e^{-x} \right| dx \right) dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} < \infty$, cioé (kk)" vale. Cosi' come (ii)', (kk)':

$x \geq x_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\delta_n}^\infty \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} e^{-x}dy + \int\limits_0^{\gamma_n} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} e^{-x}dy \leq e^{-x_0} \int\limits_{\delta_n}^\infty \frac{e^{-x_0 y}}{\sqrt{y}} dy + \int\limits_0^{\gamma_n} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} e^{-x}dy \to_n 0,$

$y \geq y_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{\alpha_n} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} \ e^{-x}\,dy + \int\limits_{\delta_n}^\infty \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} \ e^{-x}\,dy \leq \int\limits_0^{\alpha_n} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}} \ e^{-x}\,dy + \frac{1}{\sqrt{y}_0} \int\limits_{\delta_n}^\infty e^{-x}\,dx \to_n 0$

Anche in Dirichlet (ove $f(x,y) = \ e^{-xy} \ \sin x$) e Fresnel (ove $f(x,y) = \ \frac{e^{-xy} \ \sin x}{\sqrt{\pi\,y}}$) é facile verificare (ii)' e (kk)':

(D) $\quad x \geq x_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_{\delta_n}^\infty \sin x\, e^{-xy}\,dy \ + \int\limits_0^{\gamma_n} \sin x\, e^{-xy}\,dy \right| \leq \ e^{-x_0\delta_n} \ + \gamma_n \ \to_n 0,$

e $\quad y \geq y_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_{\beta_n}^\infty \sin x\, e^{-xy}\,dx \ + \int\limits_0^{\alpha_n} \sin x\, e^{-xy}\,dx \right| \leq \ e^{-y_0\beta_n} \ + \alpha_n \ \to_n 0,$

(F) $x \geq x_0 > 0 \Rightarrow \left| \int\limits_{\delta_n}^\infty \frac{e^{-xy} \sin x}{\sqrt{\pi\,y}} \ dy \ + \int\limits_0^{\gamma_n} \frac{e^{-xy} \ \sin x}{\sqrt{\pi\,y}} \ dy \right| \leq \int\limits_{\delta_n}^\infty \frac{e^{-x_0 y}}{\sqrt{\pi\,y}} dy + \int\limits_0^{\gamma_n} \frac{e^{-x_0 y}}{\sqrt{\pi\,y}} dy \to_n 0,$

$y \geq y_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_{\beta_n}^\infty \frac{e^{-xy} \sin x}{\sqrt{\pi\,y}} \ dy \ + \int\limits_0^{\alpha_n} \frac{e^{-xy} \ \sin x}{\sqrt{\pi\,y}} \ dy \right| \leq \int\limits_{\beta_n}^\infty \frac{e^{-xy_0}}{\sqrt{\pi\,y_0}} \ dx \ + \int\limits_0^{\alpha_n} \frac{e^{-xy_0}}{\sqrt{\pi\,y_0}} \ dx$

Tuttavia, nel caso degli integrali di Dirichlet e di Fresnel, trattandosi di integrali assolutamente divergenti, l'equidominatezza potrebbe essere un problema. In effetti, nel caso *(Dirichlet)* (ove $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$) $\quad g(x) \geq |\int_0^n f(x,y)dy| \quad \forall n, x$

$\Rightarrow \quad g(x) \geq |\sin x \int_0^\infty e^{-xy}dy| = |\frac{\sin x}{x}| \quad \forall x \ \Rightarrow \quad \int_0^\infty g = +\infty$

nel caso *(Fresnel)* (ove $f(x,y) = \frac{e^{-xy}\,\sin x}{\sqrt{\pi\, y}}$), $\quad g(x) \geq |\int_0^n f(x,y)dy| \quad \forall n, x$

$\Rightarrow \quad g(x) \geq |\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-xy}}{\sqrt{y}}dy| = |\frac{\sin x}{\sqrt{x}}| \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty g = +\infty.$

Equidominatezza, in $(0,+\infty)$, per $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{-xy}\, \sin x\, dx$ (caso Dirichlet).

Integrando due volte per parti, troviamo $\left|\int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{-xy}\, \sin x\, dx\right| =$

$$\left|\left[\frac{e^{-\alpha_n y}(\cos\alpha_n + y\sin\,\alpha_n)}{1+y^2} - \frac{e^{-\beta_n y}(\cos\alpha_n + y\sin(\beta_n)}{1+y^2}\right]\right| \leq 2\,\frac{1+\sup_{t>0}(ty\, e^{-ty})}{1+y^2}$$

Equidominatezza, in $(0,+\infty)$, per $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{e^{-xy}\sin x}{\sqrt{y}}\, dx$ (caso Fresnel).
Esattamente come nel caso Dirichlet, si trova che

$$\left|\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{e^{-xy}\sin x}{\sqrt{y}}\, dx\right| \leq 2\,\frac{1+\sup_{t>0}(ty\, e^{-ty})}{(1+y^2)\,\sqrt{y}}$$

Calcolo di $\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$**.**

In modo standard si perviene alla riduzione a frazioni semplici

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{2}\left[\frac{t\sqrt{2}+2}{1+(1+t\sqrt{2})^2} - \frac{t\sqrt{2}-2}{1+(1-\sqrt{2}t)^2}\right]$$

Poi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sqrt{2}+2}{1+(t\sqrt{2}+1)^2}\, dt \overset{t\sqrt{2}+1=s}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s+1}{1+s^2}\, ds = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sqrt{2}-2}{1+(1-\sqrt{2}t)}\, dt \overset{t\sqrt{2}-1=s}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s-1}{1+s^2}\, ds = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{1+\tau^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Prolungamento della funzione Γ ed una formula di rappresentazione

Prolungamento (analitico) di Γ *su tutto* $\mathbf{R} \setminus \{0, -1, \dots, -n, \dots\}$

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \forall x \in (-1, 0)$$

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \qquad \forall x \in (-n, -n+1)$$

Una utile formula di rappresentazione.

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1}\, e^{-tx} dt \qquad \forall s > 0 \qquad (\spadesuit)$$

In particolare, se $s = \frac{1}{2}$, vediamo che

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-tx} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} dt \qquad (\spadesuit)$$

Infatti, effettuando il cambio di variabile $tx = \tau$, troviamo che

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}\, e^{-tx} dt \overset{\tau = tx}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{s-1}}{x^{s-1}}\, e^{-\tau}\, \frac{d\tau}{x} = \frac{1}{x^s} \int_0^{+\infty} \tau^{s-1}\, e^{-\tau}\, d\tau = \frac{\Gamma(s)}{x^s}$$