AM210/2014-15: Tracce delle lezioni- Settimana XI

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t)), a_{ij} \in C(\mathbf{R}), \quad i,j = 1,\ldots,n$ matrice $n \times n$. Siccome, per ogni $T > 0$ risulta $\|\mathcal{A}(t)x\| \leq \left(\sup_{|t|\leq T} \|\mathcal{A}(t)\|\right) \|x\|$, **le soluzioni** del *sistema differenziale lineare a coefficenti variabili* di n equazioni nelle n incognite $x_i(t)$

$$(*) \qquad \dot{x} = \mathcal{A}(t)x, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x}_i(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{in}(t)x_n(t), \quad i = 1,\ldots,n$$

sono definite per tutti i tempi (segue dal Teorema di esistenza globale).

Proposizione L'insieme $\mathcal{N} := \{x \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) : \quad Lx := \dot{x} - \mathcal{A}x = 0\}$ di tutte le soluzioni di $(*)$ é un sottospazio linare di $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ di dimensione n.

Prova. Dobbiamo provare tre fatti:

1. $\mathcal{N}$ é un sottospazio lineare di $C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$, ovvero **combinazioni lineari** $\alpha x(t) + \beta y(t), \quad \alpha,\beta \in \mathbf{R}$ di soluzioni sono ancora soluzioni. Segue dal fatto che $\mathcal{N}$ é il **nucleo dell' operatore lineare** L.

2. Esistono $x^i \in \mathcal{N}, \quad i = 1,\ldots,n$ **linearmente indipendenti**, (in $C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$) cioé esistono n soluzioni x^i tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \quad \forall i$. Infatti, presi $v^i \in \mathbf{R}^n, \quad i = 1,\ldots,n$ linearmente indipendenti e detta x^i la soluzione di $(*)$ tale che $x^i(0) = v^i$, le x^i sono n soluzioni linearmente indipendenti.

3. Tali x^i **generano** $\mathcal{N}$: $\forall x \in \mathcal{N}, \quad \exists \quad c = (c_1,\ldots,c_n) : \quad x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) \quad \forall t$. Infatti, se x é soluzione, siano $c_i \in \mathbf{R}$ tali che $x(0) = \sum_{i=1}^n c_i v^i = \sum_{i=1}^n c_i x^i(0)$ e sia $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$. Siccome x e $\hat{x}$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy, allora $x \equiv \hat{x}$ (per il Teorema di Picard).

Definizione. Un sistema di n *soluzioni linearmente indipendenti* x^i di $(*)$ si chiama **sistema fondamentale** per $(*)$. Se x^i é sistema fondamentale, la matrice

$$\mathcal{X}(t) = \left(x^1,\ldots,x^n\right) = (x^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$$

avente per colonne i vettori x^i si dice **matrice fondamentale**.

Notiamo che se $\dot{\mathcal{X}} := (\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n) = (\dot{x}^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ é la matrice che ha per elementi le derivate degli elementi di $\mathcal{X}$, allora, con tale notazione,

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X}$$

Se $\mathcal{X}(t)$ é matrice fondamentale e $\mathcal{X}(0)$ é la matrice identitá, cioé $\mathcal{X}(0) = (e_1, \dots, e_n)$ ovvero $x^i_j(0) = \delta_{ij}$, $\mathcal{X}$ é detta **matrice principale**.
Se $\mathcal{X}$ é matrice fondamentale allora le soluzioni di $(*)$ si scrivono nella forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = \mathcal{X}(t)c \qquad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n \qquad \textbf{(Integrale Generale)}$$

Se $\mathcal{X}$ é matrice principale $\mathcal{X}(t)c$, $c \in \mathbf{R}^n$ é la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = c$.

Definizione. Date $x^i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), i = 1, \dots, n$ sia $\mathcal{X}(t) := (x^i_j(t))$.
$W(t) := \det \mathcal{X}(t)$ si dice determinante **Wronskiano** delle x^i.

Se $\exists t_0 :$ $W(t_0) \neq 0$ allora $x^i(t_0)$ sono n vettori di $\mathbf{R}^n$ linearmente indipendenti e quindi le funzioni x^i sono linearmente indipendenti (in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$). Il viceversa é falso in generale, : x^i linearmente indipendenti non implica $\det(x^i_j(t)) \neq 0$ (anche solo per qualche t). Ad esempio, $x^1(t) = (1, t)$, $x^2(t) = (t, t^2)$ sono funzioni (vettori di $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$) linearmente indipendenti, ma $x^2(t) = tx^1(t)$ $\forall t$, cioé, per ogni t, $x^1(t)$ e $x^2(t)$ sono vettori (di $\mathbf{R}^2$) linearmente dipendenti e quindi il Wronskiano di x^1, x^2, $\det(x^i_j(t)$ é nullo per ogni t! Tuttavia

Proposizione 1. Siano $x^i, i = 1, \dots, n$ soluzioni di $(*)$, $\mathcal{X}(t) := (x^i_j(t))$.

$$\mathcal{X}(t) \text{ é matrice fondamentale} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathcal{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{X}(t))^{-1} \quad \text{esiste} \quad \forall t$$

Prova. C'é solo da provare la prima $\Rightarrow$. Supponiamo, per assurdo, che esista t_0 tale che $W(t_0) = 0$ e quindi che i vettori $x^i(t_0)$ siano linearmente dipendenti: esistono c_i costanti non tutte nulle tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t_0) = 0$. Ora, se $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$, $\hat{x}$ é soluzione che si annulla in t_0, e quindi, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy, $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = \hat{x} \equiv 0$, cioé le x^i sono linearmente dipendenti.

Proposizione 2. Sia $\mathcal{X}$ matrice fondamentale. Allora

$$\dot{\overbrace{(\mathcal{X}^{-1})}} = -\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}, \qquad \dot{\overbrace{\left(\mathcal{X}^{-1}\right)^t}} = -\mathcal{A}^t \left(\mathcal{X}^{-1}\right)^t$$

Infatti, come si vede subito, se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono matrici $n \times n$ di funzioni C^1, allora $\dot{\overbrace{\mathcal{A}\mathcal{B}}} = \dot{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \mathcal{A}\dot{\mathcal{B}}$, e quindi (detta $\mathcal{O}$ la matrice nulla) $\mathcal{O} = \dot{\mathcal{I}d} = \dot{\overbrace{\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X}}}$ $\Rightarrow$

$$\mathcal{O} = \dot{\overbrace{\mathcal{X}^{-1}}}\mathcal{X} + \mathcal{X}^{-1}\dot{\mathcal{X}} = (\dot{\mathcal{X}^{-1}})\mathcal{X} + \left(\mathcal{X}^{-1}\right)\mathcal{A}\mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad (\dot{\mathcal{X}^{-1}}) + \left(\mathcal{X}^{-1}\right)\mathcal{A} = \mathcal{O}$$

SISTEMI LINEARI A COEFFICENTI COSTANTI

Esponenziale di una matrice, matrice principale. Siano , $a_{ij} \in \mathbf{R}$.

$$\text{Se} \quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{|i,j=1,\dots,n}\,, \qquad \text{é} \qquad e^{\mathcal{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathcal{A}^n}{n!}$$

Tale serie converge nello spazio (di Banach) delle matrici $\mathcal{M}_{n\times n}$ dotato della norma $\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|\mathcal{A}x\|_2$ perché $\|\sum_{n=N}^{N+p} \frac{\mathcal{A}^n}{n!}\| \le \sum_{n=N}^{N+p} \frac{\|A\|^n}{n!} \le \epsilon$ se $N \ge N_\epsilon, p \in \mathbf{N}$. Argomentando come per la serie esponenziale in $\mathbf{C}$ si vede che

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A}} e^{\mathcal{B}}$$

Ne consegue che $e^{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}} = \mathcal{I}d$ e quindi $e^{\mathcal{A}}$ é invertibile e $(e^{\mathcal{A}})^{-1} = e^{-\mathcal{A}}$. Inoltre,

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathcal{A}} := \lim_{\tau\to 0} \frac{e^{(t+\tau)\mathcal{A}} - e^{t\mathcal{A}}}{\tau} = e^{t\mathcal{A}} \lim_{\tau\to 0} \frac{e^{\tau\mathcal{A}} - \mathcal{I}}{\tau} = e^{t\mathcal{A}} \lim_{\tau\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n-1} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} = \mathcal{A}\, e^{t\mathcal{A}}$$

Siccome $e^{t\mathcal{A}}$ é invertibile per ogni t, $e^{t\mathcal{A}}$ é matrice fondamentale (anzi, principale) per $\dot{x} = \mathcal{A}x$, che genera quindi il

$$\textbf{flusso} \quad \textbf{'lineare'} \qquad t \to e^{t\mathcal{A}} x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n$$

ESEMPI.

$$(i) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \text{Se} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad \mathcal{B}^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k \beta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \beta^{2k} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \beta^{2k+1} \\ (-1)^k \beta^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi}$$

$$e^{\mathcal{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{2k!} & \frac{(-1)^{k+1} \beta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \frac{(-1)^k \beta^{2k+1}}{(2k+1)!} & \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{2k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad \text{e se}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\mathcal{I} + \mathcal{B} \qquad \text{é} \qquad e^{t\mathcal{A}} = e^{t\alpha\mathcal{I}} e^{t\mathcal{B}} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

RIDUZIONE A FORMA CANONICA

Sistemi lineari $n \times n$. Data $\mathcal{A} := (a_{ij})$ matrice $n \times n$, le resta associato il sistema di n (EDO) in n incognite $x_i = x_i(t)$:

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \qquad \text{ovvero} \qquad \dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (EDO)$$

Sia $\dot{x} = \mathcal{A}x$, $\mathcal{P}$ matrice $n \times n$ invertibile. Allora

$$\dot{\overbrace{\mathcal{P}^{-1}x}} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} = \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{A}x) = [\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}]\mathcal{P}^{-1}x$$

Ovvero, posto $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$, (EDO) si riscrive nella forma equivalente

$$\dot{y} = [\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}]y$$

Come noto, scelte opportune di $\mathcal{P}$ permettono di portare $\mathcal{A}$ in forme piú semplici, le *forme canoniche*. Ad esempio, se $\mathcal{A}$ ha n autovettori ξ^j linearmente indipendenti, corrispondenti ad autovalori λ_j, e $\mathcal{P}$ é la matrice che ha per colonne gli autovettori, allora $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é matrice diagonale, con elementi della diagonale dati dai λ_j.

IL CASO GENERICO: autovalori distinti, sistemi diagonalizzabili

Sia e_i, $i = 1, \ldots, n$ base canonica di $\mathbf{R}^n$. Sia $\mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n)$ (matrice diagonale avente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ come elementi sulla diagonale principale). Il (piú semplice) sistema differenziale

$$\dot{x} = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x \qquad\qquad x(t) = ((x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

é formato dalle n equazioni disaccoppiate $\quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$
Il sistema ammette quindi le soluzioni

$$x^i = e^{\lambda_i t}e_i, \qquad \text{o, in forma matriciale,} \qquad x(t) = e^{t\mathcal{D}}x(0)$$

Queste soluzioni sono a Wronskiano diverso da zero e quindi **formano un sistema fondamentale** e ogni altra soluzione é della forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t}\right), \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad (\textbf{ Integrale Generale })$$

Se tra i λ_j ve ne é uno complesso, diciamo $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$, a questo corrisponde l'equazione (per la funzione incognita -complessa- $z(t) = x(t) + iy(t)$)

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \lambda z(t) = (\alpha + i\beta)(x(t) + iy(t)) = (\alpha x(t) - \beta y(t)) + i(\beta x(t) + \alpha y(t))$$

ovvero il sistema di due equazioni nelle funzioni incognite-reali- x ed y:

$$\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & \alpha x - \beta y & \quad * \\ \dot{y} & = & \beta x + \alpha y & \quad * \end{array}$$

L'equazione $\quad \dot{z} = \lambda z, \quad$ ha le soluzione -complesse-

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (x(0) + iy(0))e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}(x(0) + iy(0))(\cos\beta t + i\sin\beta t) =$$

$$= e^{\alpha t}[(x(0)\cos\beta t - y(0)\sin\beta t) + i(y(0)\cos\beta t + x(0)\sin\beta t)]) \qquad \text{ovvero}$$

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & e^{\alpha t}\,(x(0)\cos\beta t - y(0)\sin\beta t) & \quad \heartsuit \\ y(t) & = & e^{\alpha t}\,(y(0)\cos\beta t + x(0)\sin\beta t) & \quad \heartsuit \end{array}$$

Se $\mathcal{A}$ ha n **autovalori reali distinti**, allora $\mathcal{A}$ **ha una base di autovettori** $v^i \in \mathbf{R}^n$ (vedi in Appendice). L'Integrale Generale del sistema $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ si scrive

$$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v^i, \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad\qquad (Integrale\ Generale)$$

Per provarlo, introduciamo la matrice (invertibile) con colonne gli autovettori v^i:

$$\mathcal{P} := \left(v^1, \ldots, v^n\right) = \left(v^i_j\right)_{i,j=1,\ldots,n} = (\mathcal{P}e_1, \ldots, \mathcal{P}e_n)\,, \qquad \mathcal{P}^{-1}v^i = e_i$$

É $\quad \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_i = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v^i = \lambda_i\mathcal{P}^{-1}v^i = \lambda_i e_i \qquad$ ovvero $\lambda_i e_i$ é la i-esima colonna di $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$. $\quad$ Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad \textbf{(forma canonica)}$$

e, se $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ e $\quad y := \mathcal{P}^{-1}x\,, \quad$ é $\quad x = \mathcal{P}y \quad$ e $\quad \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}x \quad$ e quindi

$$\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y \qquad \text{e quindi} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i$$

e **l'integrale generale di** $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ si scrive $\quad \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i.$

Piú in generale, supponiamo che $\mathcal{A}$ abbia n autovalori semplici, diciamo q **autovalori reali** $\mu_i, \quad i = 1, \ldots, q \quad$ **e** $\quad 2p \geq 2$ **autovalori complessi,** $q + 2p = n$ (notiamo che se $\lambda = \alpha + i\beta$ é autovalore complesso allora anche $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo é, perché $\mathcal{A}$ é matrice di numeri reali e quindi il suo polinomio caratteristico é a coefficenti reali).
Siano $\lambda_j,\ \overline{\lambda}_j\ \ j = 1, \ldots, p\ $ gli autovalori complessi e $\ \mu_i,\ i = 1, \ldots, q\ $ gli autovalori reali di $\mathcal{A}$. A tali autovalori corrispondono n autovettori linearmente indipendenti,

diciamo $v^j, \overline{v}^j, \; j=1,\ldots,p, \quad u^i, \quad i=1,\ldots,q$: notiamo che mentre $u^i \in \mathbf{R}^n$, $v^j := \xi^j + i\eta^j, \quad \xi^j, \eta^j \in \mathbf{R}^n$ sono vettore in $\mathbf{C}^n$ e compaiono in coppie complesse coniugate giacché $\mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}\overline{v}^j = \overline{\lambda}_j \overline{v}^j$. Si ha

$$\mathcal{A}\xi^j + i\mathcal{A}\eta^j = \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j = (\alpha_j + i\beta_j)\,(\xi^j + i\eta^j) = \alpha_j\xi^j - \beta_j\eta^j + i(\beta_j\xi^j + \alpha_j\eta^j) \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}\xi^j = \alpha_j\xi^j - \beta_j\eta^j, \qquad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j\xi^j + \alpha_j\eta^j$$

Sia ora
$$\mathcal{P} := \left(\xi^1, \eta^1, \ldots, \xi^p, \eta^p, u^1, \ldots u^q\right)$$

la matrice ($n \times n$ reale) avente le prime $2p$ colonne formate dai vettori parte reale e coefficente dell'immaginario degli autovettori corrispondenti ai λ_i e le rimanenti q colonne formate dagli autovettori reali. Ovviamente tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi $\mathcal{P}$ é invertibile. Mostriamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} =$$

$$(\alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2, \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \ldots, \alpha_p e_p - \beta_p e_{p+1}, \beta_p e_p + \alpha_p e_{p+1}, \quad \mu_1 e_{2p+1}, \ldots, \mu_q e_n)$$

($\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é qui, come altrove, descritta come n-upla di vettori colonna). É questa la **forma canonica di $\mathcal{A}$ in presenza di autovalori distinti, reali o complessi**. Verifichiamolo:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\xi^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\alpha_1\xi^1 - \beta_1\eta^1\right) = \alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\eta^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\beta_1\xi^1 + \alpha_1\eta^1\right) = \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2$$

e cosí via fino alle colonne di posto $2p-1$ e $2p$. Per le altre si trova invece

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_{2p+i} = \mu_i e_{2p+i}$$

Posto $y = (x, \xi, \eta) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, il sistema $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y$ si disaccoppia nelle q equazioni e nei p sistemi 2×2

$$\dot{x}_i = \mu_i x_i \qquad i = 1, \ldots, q \qquad \begin{array}{rcl} \dot{\xi}_j &=& \alpha_j\xi_j - \beta_j\eta_j \\ \dot{\eta}_j &=& \beta_j\xi_j + \alpha_j\eta_j \end{array}$$

le cui soluzioni sono

$$x_i = x_i(0)e^{\mu_i t} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} x_j(t) &=& e^{\alpha_j t}\,(x_j(0)\cos\beta_j t - y_j(0)\sin\beta_j t) \qquad \heartsuit \\ y_j(t) &=& e^{\alpha_j t}\,(y_j(0)\cos\beta_j t + x_j(0)\sin\beta_j t) \qquad \heartsuit \end{array}$$

Ecco $2p + q$ soluzioni che, come si vede subito, sono a Wronskiano diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale per il sistema in forma canonica e che, applicando $\mathcal{P}$, fornisce un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

LA FORMULA DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Siano $a_{ij}, b_i \in C(\mathbf{R}), \quad i,j = 1,\dots,n,\ \mathcal{A} = (a_{ij}), \quad b = (b_1,\dots,b_n)$.
Sia $\overline{x}$ soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b \qquad\qquad (**)$$

Allora , se $\mathcal{N} = KerL$ é lo spazio delle soluzioni del **sistema lineare omogeneo associato** $\dot{x} = \mathcal{A}x$, si ha che

$$x \in \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad (\overline{x} \dot{+} x) = \mathcal{A}(\overline{x} + x) + b \quad \Rightarrow \quad \overline{x} + \mathcal{N} \subset \{x : \dot{x} = \mathcal{A}x + b\}$$

Viceversa, se y é soluzione di $(**)$, allora

$$\dot{y} = \mathcal{A}y + b \quad \Rightarrow \quad (y \dot{-} \overline{x}) = \mathcal{A}(y - \overline{x}) \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{x} + \mathcal{N}$$

e quindi

$$\{x : \dot{x} = \mathcal{A}x + b\} = \overline{x} + \mathcal{N} \qquad (\textbf{integrale generale di}) \quad (**)$$

Vogliamo ora dare una formula per ottenere una soluzione particolare del sistema non omogeneo a partire da una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato; in effetti, troveremo l'integrale generale di $(**)$. Sia $\mathcal{X}$ matrice principale del **sistema lineare omogeneo associato** $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Allora

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b, \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}^{-1}b = \mathcal{X}^{-1}\dot{x} - \mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}x =$$

$$= \mathcal{X}^{-1}\dot{x} + (\dot{\mathcal{X}^{-1}})x(t) = \overbrace{\mathcal{X}^{-1}x}^{\cdot} \Rightarrow \quad \mathcal{X}^{-1}x(t) = \mathcal{X}^{-1}(0)x(0) + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}b\, d\tau =$$

$$= x(0) + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}b\, d\tau \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathcal{X}x_0 + \mathcal{X}\int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\, d\tau)$$

Verifichiamo che tale $x(t)$ é soluzione: $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{X}x_0 + \mathcal{X}\int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\, d\tau\right) = \dot{\mathcal{X}}x_0 +$

$$+\dot{\mathcal{X}}\int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\, d\tau + \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t)b(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}\left(x_0 + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\, d\tau\right) + b = \mathcal{A}x + b$$

Quindi, se $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}d$, la soluzione di $(**)$ tale che $x(0) = x_0$ é data dalla

$$x(t) = \mathcal{X}(t)\left(x_0 + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right) \qquad \textbf{formula della variazione delle costanti}$$

FORMULA DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI.
UN ESEMPIO
oscillazioni armoniche forzate

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

Posto $\quad p = \dot{x}, \quad$ l'equazione si scrive equivalentemente, in forma di sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -x + f(t) \end{aligned}$$

La matrice principale del sistema omogeneo associato é

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \mathit{mentre} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Dunque l'Integrale Generale della equazione non omogenea é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\int_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau \\ \int_0^t f(\tau)\cos\tau d\tau \end{pmatrix} \right] =$$

e quindi

$$x(t) = x(0)\cos t + p(0)\sin t - \cos t \int_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau + \sin t \int_0^t f(\tau)\cos\tau d\tau \qquad (IG)$$

Osserviamo che le soluzioni dell'oscillatore armonico (cioé con $f = 0$) sono tutte 2π periodiche. La situazione é ovviamente diversa in presenza del termine forzante $f \neq 0$. Da (IG) si legge che

- se f non é 2π periodica le soluzioni non sono piú periodiche

-se f é 2π periodica le soluzioni sono periodiche se e solo se $\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos\tau d\tau = \int_0^{2\pi} f(\tau)\sin\tau d\tau = 0.$

ESERCIZI

1. l^p, $p \geq 1$ é completo; l^∞ é completo.

2. $C([a,b],\mathbf{R})$, munito della norma $\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ non é completo.

3. Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue e 2π periodiche. Allora $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$ é una norma su $C_{2\pi}$, che, munito di tale norma, risulta completo.

Inoltre, $\|f\|_2 := \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ é una norma su $C_{2\pi}$ e vale Cauchy-Schwartz:

$$|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

E rispetto a tale norma $C_{2\pi}$ non é completo.

4. (i) Provare che $C_0(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza uniforme $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ non é completo.
Provare poi che $V := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad f(x) \to_{|x|\to\infty} 0\}$ dotato della norma della convergenza uniforme é completo, e che $C_0(\mathbf{R})$ é denso in V.

(ii) Provare che $C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza in media $\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbf{R}} |f(t)|dt$ non é completo.
Provare che $\|.\|_1$ non é una norma su V.
Provare che $\|.\|_1$ é una norma in $W := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad \int_{\mathbf{R}} |f| < \infty\}$ e che W, dotato di tale norma, non é completo.

5. Sia $k \in C([a,b] \times [c,d])$. Per ogni $f \in c([a,b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(x,t)f(x)dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c,d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[a,b])} |\int_a^b k(x,t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t)\in[a,b]\times[c,d])} |k(x,t)|\right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a,b],\mathbf{R})$ a $C([c,d],\mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.

APPENDICE: RIDUZIONE A FORMA CANONICA
autovalori multipli

Abbiamo osservato ch se $\mathcal{P}$ é matrice invertibile e $\sum_{i=1}^{n} c_i y^i$ é Integrale Generale di $\dot{y} = \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}y$, allora

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{P} y^i$$

é Integrale Generale di $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Si tratta allora di trovare una matrice $\mathcal{P}$ che riduca $\mathcal{A}$ nella forma piú semplice possibile, la sua **forma canonica**.
Cosí abbiamo proceduto nel caso diagonalizzabile. Si puó procedere in questo modo anche quando, a causa della presenza di autovalori multipli, fosse impossibile diagonalizzare $\mathcal{A}$ (ricordiamo che anche in presenza di autovalori multipli $\mathcal{A}$ puó avere n autovettori linearmente indipendenti e quindi essere diagonalizzabile: é questo il caso se $\mathcal{A}$ é simmetrica).
In tali casi la forma canonica risulterá peró piuttosto complicata (forme di Jordan).

Ci limitiamo a considerare il caso

$\mathcal{A}$ ha **un solo autovalore, reale, cui corrisponde un unico autovettore**.

Cominciamo dalla situazione piú semplice, cioé $n = 2$.

Sia dunque λ zero di molteplicitá 2 (**molteplicitá algebrica** di λ) del polinomio caratteristico di $\mathcal{A}$, matrice 2×2 . Se la **molteplicitá geometrica** di λ, ovvero $\dim(\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}))$ é uguale alla molteplicitá algebrica di λ (cioé é 2) cioé a λ corrispondono due autovettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{A}$ é, come sopra, diagonalizzabile.

Supponiamo quindi che λ abbia **un unico autovettore** v. Ció implica che

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{h \in \mathbf{R}^2 : \quad \exists u \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tale che} \quad \mathcal{A}u - \lambda u = h\}$$

é un sottospazio di dimensione 1: $Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tu : \, t \in \mathbf{R}\}$ per qualche $u \neq 0$. Di piú,

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tv : \, t \in \mathbf{R}\}$$

Questo perché

$$\mathcal{A}u - \lambda u = tu \Rightarrow \mathcal{A}u - (\lambda + t)u = 0$$

e quindi $t = 0$ (λ é l'unico autovalore !) e quindi u é un multiplo di v (v é l'unico autovettore !). Dunque

$$\exists u : \quad \mathcal{A}u - \lambda u = v, \qquad u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2$$

u si dice **autovettore generalizzato**. Sia ora

$$\mathcal{P} = (v, u)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore e l'autovettore generalizzato; ovviamente $\mathcal{P}$ é invertibile. Si ha

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v = \mathcal{P}^{-1}\lambda v = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u + v) = \lambda e_2 + e_1$$

Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2)$$

É questa la **forma canonica** di $\mathcal{A}$. Il sistema associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{x} = \lambda x + y, \qquad \dot{y} = \lambda y$$

Una soluzione di tale sistema é

$$y \equiv 0, \quad x = e^{\lambda t}$$

Una seconda soluzione é $\quad y = e^{\lambda t}$ e quindi $\quad (xe^{-\lambda t})' = 1$ e quindi $x = te^{\lambda t}$. Tali soluzioni

$$x_1 = e^{\lambda t}, \quad y_1 \equiv 0, \qquad x_2 = te^{\lambda t}, \quad y_2 = e^{\lambda t}$$

sono a Wronskiano non nullo e quindi formano un sistema fondamentale. Dunque un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$ é dato da

$$\mathcal{P}\left(e^{\lambda t}e_1\right) = e^{\lambda t}v, \qquad \mathcal{P}\left(te^{\lambda t}e_1 + e^{\lambda t}e_2\right) = te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$$

Argomenti analoghi si applicano al caso piú generale in cui la matrice $n \times n$ $\mathcal{A}$ **ha un unico autovalore** λ (avente quindi **molteplicitá algebrica** n) avente **molteplicitá geometrica** 1, cioé $\mathcal{A}u = \lambda u$ ha una sola soluzione u_1 (a meno di multipli).
La proprietá chiave (che sussiste in effetti senza ipotesi sulla molteplicitá geometrica di λ e che diamo senza dimostrazione) é la seguente:

$$(!) \qquad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n = \mathbf{R}^n \qquad (!)$$

1. Una conseguenza di (!) é che

$$Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = \mathbf{R}^n$$

Infatti,

$$u \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2} \;\Rightarrow\; \quad 0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\mathcal{A}u - \lambda u) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u-\lambda u)=0 \quad \Rightarrow \quad u \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}=Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k.$$

2. Una conseguenza di $dim\,[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})]=1$ é che

$$(+) \qquad dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right]=dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k\right]+1$$

se $Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$ é sottospazio proprio di $Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}$. Infatti, da

$$\exists u: \qquad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(u)=0, \qquad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(u)\neq 0$$

segue

$$0=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(u)=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(u) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\alpha u)=u_1$$

per qualche $\alpha\neq 0$. Ugualmente

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(\overline{u})=0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\beta\overline{u})=u_1$$

per qualche $\beta\neq 0$ e quindi $\alpha u+\beta\overline{u}\in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$.
In particolare, da (!) e 1., segue che allora (+) vale per ogni $k<n$.

3. Una conseguenza di 2. é che

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right]=Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$$

Intanto,

$$u\in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u-\lambda u)=0$$

cioé $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right]\subset Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$. Poi, usando 2.,

$$dim\,[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})]=1 \Rightarrow dim\left[(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left(Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right)\right]=$$

$$=dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right]-1=dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k\right]$$

Da 3. segue che esiste u_2 tale che $\mathcal{A}u_2-\lambda u_2=u_1$, e poi, iterando, per ogni $k<n$ esiste $u_{k+1}\in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}$ tale che $\mathcal{A}u_{k+1}-\lambda u_{k+1}=u_k$.
Sia ora

$$\mathcal{P}=(u_1,\ldots,u_n)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore u_1 e gli **autovettori generalizzati** $u_k \quad k=2,\ldots,n$. Siccome

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_1=\mathcal{P}^{-1}\lambda u_1=\lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_k=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_k=\mathcal{P}^{-1}(\lambda u_k+u_{k-1})=\lambda e_k+e_{k-1}, \qquad k=2,\ldots,n$$

concludiamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, \lambda e_2 + e_1, \ldots, \lambda e_n + e_{n-1})$$

ove $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é descritta come riga di vettori colonna. É questa la **forma canonica** per $\mathcal{A}$.

Ora, il sistema differenziale associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3, \quad \ldots \quad , \dot{y}_{n-1} = \lambda y_{n-1} + y_n, \qquad \dot{y}_n = \lambda y_n$$

Iterando il calcolo effettuato nel caso $n = 2$ troviamo per tale sistema le n soluzioni

$$\begin{array}{l}
(e^{\lambda t} \ , 0 \, , \ldots\ldots\ldots\ldots , \ 0) \\
(te^{\lambda t} \ , e^{\lambda t}, 0, \ldots\ldots\ldots , \ 0) \\
(t^2 e^{\lambda t}, \ te^{\lambda t}, \ e^{\lambda t}, \ 0, \ldots \ , \ 0) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(t^{n-1}e^{\lambda t}, t^{n-2}e^{\lambda t}, \ldots\ldots , e^{\lambda t})
\end{array}$$

Tali n soluzioni hanno Wronskiano evidentemente diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale da cui, applicando $\mathcal{P}$, si ottiene un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Base di autovettori corrispondenti ad autovalori distinti. Mostriamo qui un fatto usato in precedenza, ma ben noto: se una matrice $n \times n$ complessa $\mathcal{A}$ ha tutti gli autovalori distinti allora ammette una base di autovettori.

Sia $n = 2$ e sia $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \mathcal{A}\eta = \mu\eta$. Se $\xi = \alpha\eta$, allora

$$\lambda\xi = \mathcal{A}\xi = \alpha\mathcal{A}\eta = \alpha\mu\eta = \mu\xi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu$$

Supponiamo, induttivamente, che l'affermazione sia vera per le matrici $n-1 \times n-1$. Siano $\mathcal{A}\xi^j = \lambda_j \xi_j$, $\xi^j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Supponiamo che gli ξ^j non siano linearmente indipendenti, diciamo $\quad \xi^n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \xi^j$. Possiamo supporre, eventualmente sostituendo ad $\mathcal{A}$ la matrice $\mathcal{A} - \lambda_n \mathcal{I}$ che $\lambda_n = 0$ e quindi

$$0 = \mathcal{A}\xi^n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \xi^j = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \lambda_j \xi^j \qquad \text{e quindi gli} \quad \xi^j \quad \text{sono linearmente dipendenti}$$

contraddicendo l'ipotesi induttiva.