Esercitazione del 26-10

1. Discutere continuità e differenziabilità delle seguenti funzioni

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^2 x^6}{x^4 + y^4} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\cos(xy) - x^2y^2 - 1}{x^4 + y^4} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Calcolare lo Jacobiano della trasformazione

$$H := F \circ G$$

quando

$$F = F(u,v,z) = (e^u, \cos(xyz))\,, \qquad G = G(x,y) = (xy, x^2, y^6)\,,$$

sia direttamente che con la regola della catena.

3. Calcolare il Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ per funzioni radiali. Si ricordi che una funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ si dice radiale se esiste $v \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tale che $u(x) = v(|x|)$.

4. Data $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ si definisca $E := \{f \neq 0\}$. Mostrare che se esiste $\xi \neq 0$ tale che $\partial_\xi f \geq a > 0$ allora E è sconnesso. Mostrare con un controesempio che il risultato è falso se si assume solo che $\partial_\xi f > 0$.