

Esercitazione del 25-10

1. Discutere continuità e differenziabilità delle seguenti funzioni

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 + y^2 x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2) - x^2 + y^6}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Calcolare lo Jacobiano della trasformazione

$$H := F \circ G$$

quando

$$F = F(u, v, z) = (\cos uv, \sin z), \quad G = G(x, y) = (e^{xy}, x^3, y^2),$$

sia direttamente che con la regola della catena.

3. Calcolare il Laplaciano in coordinate polari in \mathbb{R}^2 .

4. Data una successione di sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R}^n ,

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$$

mostrare che se E_0 è limitato allora

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \neq \emptyset.$$

Mostrare con un controesempio che l'affermazione è falsa se si toglie l'ipotesi che E_0 sia limitato.