AM210-2012/13: Tracce delle lezioni-VIII Settimana

Teorema 1 (approssimazione via convoluzione)

Siano $\varphi_n \in C_0([-M,M])$, $\varphi_n \ge 0$, con $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = 1$. Allora

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(x)dx \to_n 1 \quad \forall \delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{[-R,R]} |(f*\varphi_n((x) - f(x)| \to_n 0 \quad \forall f \in C(\mathbf{R}), \forall R > 0$$

Prova. Per ogni $\delta > 0$, si ha $|f(x) - (f*\varphi_n)(x)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-y))\, \varphi_n(y)\, dy \right| \le$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{-\delta} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)\, dy + \int\limits_{\delta}^{+\infty} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)\, dy + \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)\, dy$$

Ma, per la uniforme continuitá di f in $[-(R+\delta), R+\delta]$, si ha che $\forall \epsilon, \exists \delta_\epsilon$ tale che

$$|x| \le R \quad \Rightarrow \quad \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)\, dy \le \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\, dx = \epsilon$$

mentre $\int\limits_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(x)dx \to_n 1 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{-\delta} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)dy + \int\limits_{\delta}^{+\infty} |f(x) - f(x-y)|\, \varphi_n(y)dy \le$

$$\le 4 \sup_{z \in [-(R+M), R+M]} |f(z)| \quad \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(y)\, dy + \int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(y)\, dy \right] \to_n 0$$

ESEMPIO 1. $\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{c_n} \chi_{[-1,1]}$, $\psi_n(x) := (1-x^2)^n$, $c_n = \int\limits_{-1}^{1} \psi_n(x)dx.$

Si tratta di provare che $\varphi_n \to_n 0$ uniformemente in $|x| \ge \delta \quad \forall \delta > 0$.
Intanto $|x| \ge \delta \Rightarrow (1-x^2)^n \le (1-\delta^2)^n$. Poi,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta d\theta \ge 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{n+1}$$

(in effetti é $\int\limits_0^1 (1-s^2)^n ds = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}}) \right]$). Dunque

$$\sup_{|x| \ge \delta} \varphi_n(x) \le (1-\delta^2)^n\, (n+1) \to_n 0$$

IL TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.

Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[-R, R]$ quale che sia R, ovvero

$$\text{esistono polinomi } p_n \text{ tali che} \qquad \sup_{|x|\le R} |f(x) - p_n(x)| \to_n 0 \qquad \forall R > 0.$$

Prova . É sufficente provare che se $f(x) = 0$ per $|x| \ge \frac{2}{3}$, allora esistono p_n polinomi tali che $\sup\limits_{|y|\le\frac{1}{3}} |f(y) - p_n(y)| \to 0.$

Infatti, presa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi \equiv 1$ in $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, $\varphi(x) = 0$ se $|x| \ge \frac{2}{3}$, e posto $f_R(x) := \varphi(x)f(3Rx)$, é $f_R(x) = 0$ se $|x| \ge \frac{2}{3}$, ed esistono allora polinomi p_n tali che

$$\sup_{|x|\le\frac{1}{3}} |f_R(x) - p_n(x)| \to 0$$

$$\text{e quindi} \qquad \sup_{|y|\le R} |f(y) - p_n(\tfrac{y}{3R})| = \sup_{|x|\le\frac{1}{3}} |\varphi(x)f(3Rx) - p_n(x)| \to 0$$

Da ció segue infine che esistono polinomi $p_1, \dots, p_n, \dots$ tali che

$$\sup_{|x|\le 1} |f(x) - p_1(x)| \le 1, \ \dots, \ \sup_{|x|\le n} |f(x) - p_n(x)| \le \tfrac{1}{n} \dots$$

e quindi, fissato R, $\sup\limits_{|x|\le R} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{n}$ non appena $n \ge R$.
Possiamo dunque supporre che $f(x) = 0$ per $|x| \ge \frac{2}{3}$. Ma, allora,

$$p_n(x) := (f * \varphi_n)(x), \quad x \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \quad \text{sono polinomi,}$$

(le φ_n sono quelle dell'Esempio 1) giacché $\varphi_n = c_n^{-1}\psi_n\chi_{[-1,1]}$ e

$$|x| \le \tfrac{1}{3},\ |y| \ge 1 \quad \Rightarrow \quad |x - y| \ge \tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x - y)\chi_{[-1,1]}(y) = f(x - y)$$

e ció assicura che $\qquad |x| \le \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad (f * \varphi_n)(x) =$

$$c_n^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)(1 - y^2)^n \chi_{[-1,1]}\, dy = \ c_n^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)(1 - y^2)^n\, dy = \ c_n^{-1}\, (f * \psi_n)(x)$$

che sono appunto polinomi. Dunque la restrizione di p_n a $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ é un polinomo.

Basta infine osservare che, in virtú del Teorema 1, $p_n * f$ converge uniformemente sui compatti, e quindi, in particolare, su $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$) ad f.

I POLINOMI TRIGONOMETRICI SONO DENSI IN $C_{2\pi}(\mathbf{R})$

Sia $\quad C_{2\pi} := \{f \in C(\mathbf{R}), f(t+2\pi) = f(t)\ \forall t\}\quad$ lo spazio delle funzioni continue 2π periodiche dotato della norma della convergenza uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{\mathbf{R}} |f(x)| = \sup_{|x|\le\pi} |f(x)|$$

Un importante sottospazio lineare di $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ é quello dei polinomi trigonometrici

$$P := \{P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) : a_n, b_n \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N}\}$$

Vogliamo dimostrare il **Teorema di aprossimazione di Weierstrass** per funzioni in $C_{2\pi}$: *ogni $f \in C_{2\pi}$ é limite uniforme di successioni di polinomi trigonometrici, ovvero P é denso in $C_{2\pi}$.*

Anche qui useremo l'approssimazione per convoluzione. Ricordiamo che, date $f, g \in C_{2\pi}$, é definita la funzione, detta convoluzione di f con g, data da

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds, \qquad \forall f, g \in C_{2\pi}$$

e valgono le proprietá: $\quad f * g = g * f \quad$ é continua e 2π-periodica. Ricordiamo:

Proposizione.
(i) Se $f \in C_{2\pi}$ e P_N é polinomio trigonometrico, allora $f * P_N$ é un polinomio trigonometrico.
(ii) Il prodotto di polinomi trigonometrici é un polinomio trigonometrico.

Circa (ii), basta mostrare che $\cos nt \cos mt, \sin nt \sin mt, \cos nt \sin mt$ sono polinomi trigonometrici. Verifichiamolo per $\cos nt \cos mt$, usando le formule di Eulero:

$$\cos nt \cos mt = \frac{1}{2}\left(e^{int} + e^{-int}\right)\frac{1}{2}\left(e^{imt} + e^{-imt}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(n+m)t} + e^{i(n-m)t} + e^{-i(n-m)t} + e^{-i(n+m)t}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right)$$

Teorema 2 (approssimazione per convoluzione). Siano $g_k \in C_{2\pi}$ tali che
(i) $g_k(t) \ge 0 \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad$ e $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_k(t)dt = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$
(ii) $g_k \to_k 0$ uniformemente in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \qquad \forall \delta \in (0, \pi)$.

Allora $\qquad \|f * g_k - f\|_\infty \to_k 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}$

ESEMPIO 2. $g_k = P_k(t) := (c_k)^{-1}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k, \qquad c_k = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt.$

Chiaramente vi é solo da provare (ii). Stimiamo c_k:

$$2\pi c_k = 2\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geq \int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t dt = \frac{2}{(k+1)}$$

Dunque, $$\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} P_k(t) \leq (c_k)^{-1}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \leq \pi(k+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \to_k 0$$

Conclusione: P é denso in $C_{2\pi}$. Infatti, se $f \in C_{2\pi}$ e P_n sono come nell'esempio 2, la successione di polinomi trigonometrici $f * P_n$ converge uniformemente a f .

DENSITÁ DEI POLINOMI TRIGONOMETRICI IN $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$

$C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ é lo spazio (vettoriale su $\mathbf{C}$) delle funzioni continue e 2π periodiche definite in $\mathbf{R}$ e a valori in $\mathbf{C}$:

$$f = \Re f + i\Im f \in C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \Re f, \Im f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$$

In $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ sono definite, come in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$, le norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}}|f(t)| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|, \qquad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

La norma $\|.\|_2$ deriva dal prodotto scalare

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g}(t)dt$$

ove $\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\Re f(t) + \Im f(t)]dt := \int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Re f)(t)dt + i\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Im f)(t)dt.$

Si vede facilmente che continuano a valere Cauchy-Schwartz e Pitagora. Le funzioni

$e_n := e^{int}, n \in \mathbf{Z}$ formano un *sistema ortonormale* in $(C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}), \|.\|_2)$:

$$< e_n, e_m >= 0 \quad \text{se} \quad n \neq m, \quad < e_n, e_n >= 1 \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

Infatti, $< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = \frac{1}{i(n-m)2\pi}[e^{i(n-m)t}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(n-m)2\pi}[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}] = 0$ per periodicitá. In particolare,

$$\|\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Gli e_n generano il sottospazio dei *polinomi trigonometrici complessi*:

$$P_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

$c_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, $N \in \mathbf{N}$. Scrivendo $c_n = a_n - ib_n$, le formule di Eulero danno

$$P_N = \sum_{n=-N}^{N} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] + i \sum_{n=-N}^{N} [a_n \sin nt - b_n \cos nt]$$

In particolare, $\Re P_N$ e $\Im P_N$ sono polinomi trigonometrici. Siccome $\overline{\sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int}} = \sum\limits_{m=-N}^{N} \overline{c_{-m}} e^{imt}$, P_N é reale se e solo $c_{-n} = \overline{c_n}$, ovvero $a_{-n} = a_n$ e $b_{-n} = -b_n$ per $n = 0, \dots, N$.
Ogni polinomio trigonometrico reale é anche polinomio trigonometrico complesso:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sum_{0<|n|\le N} c_n e^{int},$$

ove $c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ $\forall n = 1, \dots, N, c_n = \overline{c}_{-n}$ se $n = -1, \dots, -N$. Quindi, se P_N, Q_M sono due polinomi trigonometrici reali, allora $P_N + iQ_M$ é polinomio trigonometrico complesso. Dal Teorema di approssimazione per funzioni in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ segue quindi che

$$\forall f \in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})} \quad \exists P_N \in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})}, \quad \text{polinomi trigonometrici:} \quad \|P_N - f\|_\infty \to_N 0$$

Osserviamo infine che $\quad f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad \Rightarrow$

$$(f * P_N)(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \left[c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right] e^{int}$$

cioé la convoluzione di una $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ con un polinomio trigonometrico é un polinomio trigonometrico.

SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER

Serie trigonometriche. Dati $c_n \in C$, $n \in \mathbf{Z}$, $N \in N$, resta definita la *serie trigonometrica* $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, $t \in \mathbf{R}$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, tale serie converge uniformemente e la sua somma

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

é una funzione (o *serie trigonometrica*) appartenente a $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Si ha: $\forall n \in \mathbf{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-n)t}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = c_n$$

perché, dato che la convergenza é uniforme, si puó integrare termine a termine; inoltre $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = 0$ se $n \neq m$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = 2\pi$ se $n = m$. Dunque

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty, \quad f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Definizione (coefficenti di Fourier). Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, restano definiti

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad \textbf{(coefficenti di Fourier) di} \quad f$$

Definizione (serie di Fourier). Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \textbf{é serie di Fourier di} \quad f$$

La f si dice **sviluppabile in serie di Fourier** se la sua serie di Fourier converge e

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \forall \quad t \in \mathbf{R}$$

NOTA: in generale tale serie non convergerá, neppure puntualmente! Una (facile) risposta positiva si ha nel caso di serie trigonometriche assolutamente convergenti. Da $(*)$ e da $\|\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2$ (Pitagora!) deduciamo infatti

Esempio e Identitá di PARSEVAL: la somma di una serie trigonometrica assolutamente convergente $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ é sviluppabile in serie di Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right) e^{int} \qquad e \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$